

الفصل الأول: التحليل التوافقي

نتطرق في هذا الفصل الى بعض طرق تحديد عدد نواتج الممكنة لتجربة معينة أو عدد العناصر في مجموعة ما بغير طريقة العد المباشر، وتسمى هذه الطرق بالتحليل التوافقي، وهو مبني على قاعدتين اساسيتين.

1. قاعدتي الجمع والضرب:

أ. قاعدة الجمع (قاعدة "أو")

إذا كان بالإمكان إنجاز عملية ما بـ n طريقة وكان بالإمكان إنجاز عملية ثانية تختلف عن الاولى بـ m طريقة، فإن إنجاز العملية الاولى أو الثانية تحدث بـ $m+n$ طريقة.

مثال 01: لتكن لدينا مجموعة طلبة تتكون من اربعة طلبة ذكور A, B, C, D وأربعة طالبات E, F, G

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار طالب أو طالبة من هذه المجموعة.

الحل: لدينا 4 طلبة اذا يوجد 4 امكانيات لاختيار طالب، ولدينا 3 طالبات اذا يوجد 3 امكانيات لاختيار طالبة. وبما أن المطلوب هو طالب "أو" طالبة نستخدم قاعدة الجمع، فيصبح عدد الامكانيات هو $7 = 4+3$ امكانيات.

(A) (B) (C) (D) (E) (F) (G)

ب. قاعدة الضرب (قاعدة "و")

إذا كان بالإمكان إنجاز عملية ما بـ n طريقة وكان بالإمكان إنجاز عملية ثانية تختلف عن الاولى بـ m طريقة، فإن إنجاز العملية الاولى و الثانية مع بعضهما بـ $n \times m$ طريقة.

مثال 02: لتكن لدينا مجموعة طلبة تتكون من اربعة طلبة ذكور A, B, C, D وأربعة طالبات E, F, G

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار طالب وطالبة من هذه المجموعة.

الحل: لدينا 4 طلبة اذا يوجد 4 امكانيات لاختيار طالب، ولدينا 3 طالبات اذا يوجد 3 امكانيات لاختيار طالبة. وبما أن المطلوب هو طالب "و" طالبة نستخدم قاعدة الضرب، فيصبح عدد الامكانيات هو $12 = 4 \times 3$ امكانية.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{l} E \\ F \\ G \end{array} \right. \\ B \left\{ \begin{array}{l} E \\ F \\ G \end{array} \right. \\ C \left\{ \begin{array}{l} E \\ F \\ G \end{array} \right. \\ D \left\{ \begin{array}{l} E \\ F \\ G \end{array} \right. \end{array} \right.$$

{(AE) (AF) (AG) (BE) (BF) (BG) (CE) (CF) (CG) (DE) (DF) (DG)}

تعميم:

- اذا كان لدينا تجربة 1 (E1) تتم بـ N_1 طريقة، تجربة 2 (E2) بـ N_2 طريقة، ... حتى التجربة K (EK) بـ N_K طريقة فإن K عملية تتم وتحدث معا بـ: $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_K$ طريقة.
- اذا كان لدينا تجربة 1 (E1) تتم بـ N_1 طريقة، تجربة 2 (E2) بـ N_2 طريقة، ... حتى التجربة K (EK) بـ N_K طريقة فإن E1 او E2 او ... او EK عملية تتم بـ: $N_1 + N_2 + \dots + N_K$ طريقة.

2. التبادلات (المتبادلات):

لتكن لدينا المجموعة E تتكون من ثلاثة عناصر A, B, C، اذا كان اهتمامنا هو عدد الطرق التي يمكن ان نرتب بها عناصر هذه المجموعة، فان إيجاد عدد الطرق باستخدام الشكل الموالي

لدينا ثلاثة خانات لتستوعب العناصر الثلاثة لهذه المجموعة، حيث عدد الخانات على حسب الحاجة، ثم نقوم بكتابة داخل كل خانة عدد الامكانيات لشغلها.

عدد الامكانيات	1	2	3
رقم الخانة	03	02	01

الخانة رقم 01 لديها ثلاثة امكانيات (A او B او C) وبعد تثبيت احد العناصر في الخانة رقم 01 يبقى عنصرين مرشحين لشغل الخانة رقم 02 وبعدها تثبيت احد العنصرين في الخانة رقم 02 يبقى عنصر واحد لشغل الخانة رقم 03.

وعليه يكون العد بطريقة الضرب لوجود و في العد: لدينا 3 امكانيات لشغل الخانة 01 و 2 امكانيات لشغل الخانة 02 وامكانية واحدة لشغل الخانة الاخيرة، أي $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. اذن لدينا 6 طرق لترتيب هذه العناصر الثلاثة.

نلاحظ أن العناصر الثلاثة مختلفة أي بدون تكرار لها.

تعميم:

نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنها تبديلة بدون تكرار، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر n ، فعدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحدها على الأقل، ونكتب

$$p_n = n!$$

حيث العاُملي (!) هو جداء للحدود المتتالية المتناقصة الى غاية الواحد.

$$n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$0! = 1 \quad ; \quad 1! = 1 \quad ; \quad 2! = 2 \quad ; \quad 3! = 6 \quad ; \quad 4! = 24$$

$$5! = 120 \quad ; \quad 6! = 720 \quad ; \quad 7! = 5040$$

في حالة وجود التكرار نسميها تبديلة بتكرار:

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أي عندما تكون العناصر متماثلة. في هذه الحالة يمكن معرفة عدد التبديلات من خلال الصيغة الموالية:

$$p_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!}$$

حيث ان $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ هي عدد تكرار العناصر المتشابهة او المتماثلة ومجموعها يساوي n .

مثال 03: ما هو عدد التبديلات التي يمكن تشكيلها بحروف كلمة **probabilité**

نلاحظ ان هذه الكلمة تتشكل من 11 حرف، مع وجود بعض الحروف مكررة أكثر من مرة وعليه يكون:

$$n_1 = 1; n_2 = 1; n_3 = 1; n_4 = 2; n_5 = 1; n_6 = 2; n_7 = 1; n_8 = 1; n_9 = 1.$$

$$p_{11}^{1,1,1,1,2,1,2,1,1} = \frac{11!}{1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 2! \times 1! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{11!}{4}$$

عملية القسمة هنا لحذف تأثير التكرار حيث نلاحظ حرفين مكررين مرتين وهو ما يدعو للقسمة على جداء عاملي التكرارات.

3. الترتيبية

في بعض الحالات يكون الترتيب مهم وبدون تكرار

مثال 04: فوج طلبة به 33 طالب نريد اختيار ممثل للفوج ونائب له، فما هو عدد الامكانيات لاختيار ممثل الفوج ونائبه.

نختار ممثل للفوج اولاً ليكون لجميع الطلبة نفس فرصة الظهور في اعلى رتبة وبذلك لدينا 33 امكانية لاختياره، ومن ثم نختار النائب، فيبقى 32 طالب نختاره منهم وبالتالي لدينا 32 امكانية لاختياره.

اذن عدد الامكانيات لاختيار ممثل الفوج ونائبه هو $32 \times 33 = 1056$ امكانية.

$$1056 = \frac{33!}{(33-2)!} = \frac{33!}{31!}$$

تعميم:

اذا كان الترتيب مهم وبدون تكرار، لترتيب k عنصر من اصل n عنصر $(n > k)$ ، نحسب عدد الامكانيات

بالعلاقة الموالية ونسميها ترتيبية بدون تكرار ل k عنصر من اصل n :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

في حالة $n=k$ تصبح تبديلة.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n!$$

اما اذا كان التكرار مسموح تصبح قائمة

مثال 05: نريد تشكيل عدد هاتفي من خمسة ارقام، كم عدد يمكن تشكيله؟

10	10	10	10	10	عدد الامكانيات
05	04	03	02	01	رقم الخانة

في ارقام الهاتف التكرار مسموح به وعليه نشكل الخانات المقابلة، حيث ان كل الارقام متاحة من 0 الى 9 يكون عدد الامكانيات لكل خانة هو 10، وعدد الاعداد الممكن تشكيلها

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000 = 10^5 \text{ هو}$$

تعميم:

اذا اردنا ترتيب k عنصر من n عنصر وكان التكرار مسموح، فان عدد الترتيب يسمى قائمة يعطى بالعلاقة

$$n^k = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{k \text{ مرة}} \quad \text{الموالية:}$$

4. التوفيقات

لتكن لدينا المجموعة E تتكون من أربعة عناصر $E = \{A, B, C, D\}$ ، اذا كان اهتمامنا هو عدد الطرق التي يمكن ان نشكل لجنة من ثلاثة عناصر من هذه المجموعة، واللجان الترتيب فيها غير مهم

$$A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 24$$

وبما ان الترتيب غير مهم يصبح عدد اللجان 4 بدل 24 وهي موضحة كما يلي:

اللجنة الاولى: ABC هي نفسها ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

اللجنة الثانية: ABD هي نفسها ADB, BAD, BDA, DAB, DBA

اللجنة الثالثة: ACD هي نفسها ADC, CAD, CDA, DAC, DCA

اللجنة الرابعة: BCD هي نفسها BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

$$4 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{A_4^3}{3!} = \frac{\text{عدد الترتيبات}}{6=3!} \text{، اذن التوفيقاة} = \frac{24}{6} = 4$$

يمكننا استنتاج العلاقة العامة التي تحسب لنا عدد التوفيقات؛ عند سحب بدون ارجاع (او في آن واحد) لـ k

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{عنصر من اصل n عنصر (k < n) كما يلي:}$$

مثال 06: ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من 21. نلاحظ ان عناصر المجموعة n=21 وعدد العناصر المسحوبة هو k=4، بتطبيق قانون التوفيق نحصل على:

$$C_{21}^4 = \frac{21!}{17!4!} = 5985 \text{ لجنة مختلفة}$$

كما تستعمل التوفيقات لحساب نشر نيوتن لـ $(x+y)^n$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

مثلث باسكال

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

لاحظ في المثلث $10 = 4 + 6$ ، يمكن تشكيل المثلث بهذه الخاصية

جدول يلخص طرق حساب عدد الحالات الممكنة

حيث	القانون	في حالة	نستعمل
K مجموعة جزئية من n	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	اذا كان الترتيب مهم، حيث $n > k$ بدون تكرار	الترتيبية A_n^k (بدون تكرار)
K هي نفسها المجموعة n	$A_n^n = n! = p_n$	اذا كان الترتيب مهم، حيث $n = k$	التبادلية p_n (بدون تكرار)
$n \geq k$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	اذا كان الترتيب غير مهم	التوفيق C_n^k
ينقص من المجموعة عنصر لتجاور العنصر الاول والاخير	$p_{n-1} = (n-1)!$	اذا كان الترتيب مهم، حيث $n = k$	التبادلية الدائرية
$n \geq k$	n^k	اذا كان التكرار مسموح به	القائمة (ترتيبية مع التكرار)
$r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ هي عدد تكرارات من 1, 2, ... k	$P_{(n,ri)} = \frac{n!}{r_1! r_2! r_3! \dots r_k!}$		التبادلية مع التكرار

5. تمارين محلولة

التمرين 01 : كم عددا مكون من 3 أرقام يمكن تشكيله من الأرقام التالية 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 :

1- لا يسمح بتكرار الأرقام؟

2- العدد يجب أن يكون أقل من 480؟

3- الأعداد الفردية؟

4- الأعداد الزوجية؟

الحل:

1- بما أن الترتيب مهم يمكن استعمال الترتيب، في هذه الحالة لا يسمح بتكرار: $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$

أو بطريقة الخانات نتحصل على نفس النتيجة

$$9 \times 8 \times 7 = 504$$

عدد الامكانيات	7	8	9
رقم الخانة	03	02	01

2- بطريقة الخانات: نختار رقم المئات ب 5 طرق ورقم العشرات ب 8 طرق ورقم الآحاد ب 9 طرق.

$$360 = 9 \times 8 \times 5$$

عدد الامكانيات	5	8	9
رقم الخانة	03	02	01

كما يمكن استعمال الترتيب $A_5^1 A_8^1 A_9^1 = 360$

3- نختار رقم الآحاد ب 4 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الفردية الموجودة، تم نختار رقم المئات ب 8 طرق

$$256 = 4 \times 8 \times 8$$

4- نختار رقم الآحاد ب 5 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الزوجية الموجودة، ورقم المئات ب 8 طرق ورقم

$$320 = 5 \times 8 \times 8$$

التمرين 02 : بكم طريقة يمكن أن يجلس 4 طلبة و 3 طالبات في صف إذا كان:

1- الجلوس كما يتغون؟

2- الطلبة جنب بعضهم والطالبات جنب بعضهن؟

3- الجلوس كما يتغون على طاولة مستديرة؟

4- طالبان لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

الحل:

1- عدد الطرق الممكن إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاؤون هو تبديلة $7! = p_7 = 5040$

2- الطلبة مع بعضهم والطالبات مع بعضهن $4! \times 3! \times 2! = 288$

3- إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاءون على طاولة مستديرة نسميها تبديلة دائرية، نقص عنصر من

$$P_{n-1} = P_{7-1} = P_6 = 6! = 720 \text{ طريقة } (n-1)؛$$

4- طالبان لا يمكنها الجلوس جنب بعضهما :

لدينا عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة كما يشاءون هو 5040 طريقة.

نعتبر هذان الطالبان شخص واحد وبالتالي يصبح لنا 3 طلبة و 3 طالبات حيث يمكنهم الجلوس بطرق عددها: $6! = 720$ طريقة

لكن هذان الطالبان يمكنهما الجلوس جنب بعضهما ب: $2! = 2$ طريقة

وبالتالي عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات مع جلوس طالبين جنب بعضهما هو

$$\text{طريقة } 6! \times 2! = 1440$$

ومنه عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات بحيث طالبين لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما هو

$$\text{طريقة } 5040 - 1440 = 3600$$

التمرين 03: كم عدد التبديلات التي يمكن تكوينها من حروف الكلمات, STATISTIQUES, CENTREE, STOCHASTIQUES, GOOGLE.

الحل:

$$p_{12}^{3,3,1,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{3! \times 3! \times 1! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{12!}{72} : \text{STATISTIQUES} \bullet$$

$$p_7^{1,3,1,1,1} = \frac{7!}{1! \times 3! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{7!}{6} : \text{CENTREE} \bullet$$

$$p_{13}^{3,2,1,1,1,1,1,1,1} = \frac{13!}{3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{13!}{12} : \text{STOCHASTIQUES} \bullet$$

$$p_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{6!}{4} : \text{GOOGLE} \bullet$$

التمرين 04: صندوق به كرات: 5 حمراء و 3 صفراء و 2 خضراء، نسحب ثلاث كرات في آن واحد.

1. كم هو العدد الكلي للإمكانات؟

2. عدد الامكانيات لظهور لون واحد؟

3. عدد الامكانيات لظهور لونين؟

4. عدد الامكانيات لظهور كرة خضراء على الاقل؟

5. عدد الامكانيات لظهور كرتان صفراء؟

الحل:

نستخدم التوفيقات للإجابة على الاسئلة

$$2. \text{ العدد الكلي } \frac{10!}{7!3!} = 4320$$

$$3. \text{ عدد الامكانيات لظهور لون واحد هو: } C_5^3 + C_3^3 = \frac{5!}{2!3!} + \frac{3!}{0!3!} = 11$$

$$C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = \frac{5!}{4!} \times \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!} = 30$$

4. لظهور 3 ألوان: $C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = \frac{5!}{4!} \times \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!} = 30$

لونين = العدد الكلي - (لون + 3 ألوان) : امكانية $4320 - (11 + 30) = 3981$

5. كرة خضراء على الأقل (واحدة أو اثنتين):

$$C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1 = \frac{2!}{1!} \times \frac{8!}{6!2!} + \frac{2!}{2!} \times \frac{8!}{7!} = 64$$

6. لظهور كرتان أصفران $C_3^2 \times C_7^1 = \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{6!} = 21$

- التمرين 05: يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرة إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5
- (1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟
- (2) نعيد التجربة هذه المرة لكن دون إرجاع الكرة المسحوبة . ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟
- ما احتمال الحادثة A " الكرة الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "

الحل :

- (1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات ، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية و من أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد) و بالتالي هناك $5 \times 5 \times 5 = 125$ عددا ممكنا
- (2) في الحالة الثانية هناك $5 \times 4 \times 3 = 60$ عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى ، الكرة المسحوبة لا ترجع)

- المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي $4 \times 3 = 12$ حالة ملائمة و بالتالي

التمرين 6: ما هو عدد كلمات السر التي يمكن الحصول عليها من استخدام حرفين من حروف اللغة الإنجليزية

(عددها (26 وثلاثة أرقام يسار الأحرف في الحالات التالية:

- 1- عدم تكرار الحرف والرقم؟
- 2- تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم؟
- 3- تكرار الحرف والرقم؟

الحل:

- 1- عدد الكلمات مع عدم تكرار الحرف والرقم هو

$$468000 = 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 =$$

2- عدد الكلمات مع تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم هو

$$486720 = 26 \times 26 \times 10 \times 9 \times 8 =$$

3- عدد الكلمات مع تكرار الحرف والرقم هو

$$676000 = 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 =$$

التمرين 7: في مسابقة معينة فرض على الطلبة الإجابة على 5 من 8 أسئلة، بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار

عدد الأسئلة في الحالات التالية:

1- اختيار الأسئلة بدون شرط؟

2- إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية؟

3- إذا كان من الضروري الإجابة على ثلاثة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى؟

الحل:

1- يمكن اختيار الأسئلة الخمسة بطرق عددها: = طريقة 56

2- إذا أحب الطالب على الأسئلة الثلاثة الأولى، يبقى له اختيار السؤالين المتبقين من بين الأسئلة الخمسة

الأخيرة بطرق عددها = :طريقة 10

3- يمكنه اختيار الأسئلة الثلاثة الضرورية من الخمسة أسئلة الأولى بطرق عددها = :طريقة 10

ويبقى له سؤالين يتم اختيارهما من الأسئلة الثلاثة الأخيرة بطرق عددها 3:

وبالتالي يكون إجمالي عدد طرق اختيار الأسئلة الخمسة هو = 3×10 : طريقة 30

التمرين 8: إذا كان لدينا مجموعة من الطلبة متكونة من 5 طلبة و 7 طالبات. إذا أردنا تكوين لجنة من

هؤلاء الطلبة حيث تتكون من 5 أشخاص، ما هي عدد اللجان التي يمكن تكوينها إذا علمت:

1- بدون شرط؟

2- ثلاثة طلبة يرفضون ترشيحهم؟

3- يجب أن يكون ضمن اللجنة طالبين على الأقل؟

4 - الطالب Q والطالبة R يرفضان أن يكونا في اللجنة معا؟

الحل:

1- عدد اللجان التي يمكن تكوينها هي = لجنة 792

2- عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث ثلاثة من الطلبة يرفضون الترشح هو = لجنة 126

3- عدد اللجان التي يكون فيها طالبين على الأقل هي

$$596 = 1 \times 1 + 5 \times 7 + 10 \times 21 + 10 \times 35 + 10 \times 1$$

4- لا يمكنهما أن يكونا في اللجنة معا هو R والطالبة Q

عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث الطالب أما ضمن اللجنة وبالتالي عدد اللجان التي يجتمعان فيها هي :

R والطالبة Q نعتبر الطالب

=لجنة240

من خلال R :والطالبة Q من تم يمكن حساب اللجان التي لا يجتمع فيها الطالب

= ,لجنة552 = 792 - 240

التمرين 9: عميد كلية يريد تشكيل لجنة تضم 5 أعضاء يتم اختيارهم من 5 رجال و 6 نساء.

1- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟

2- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا علمت أن:

أ - من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط؟

ب - من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر؟

ج - يجب أن تتكون اللجنة من رجلين وامرأتين على الأقل؟

3- ما هو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب؟

الحل:

1 - عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو

=لجنة462

2- عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا كان:

أ - من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط هو:

= 15 × 5 = 75 لجنة

ب - من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر هو:

= 1 × 1 + 5 × 6 + 10 × 15 = 181 لجنة

ج - يجب أن تكون اللجنة متكونة من رجلين وامرأتين على الأقل هو:

= 10 × 15 + 10 × 20 = 350 لجنة

3- عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب هو

=لجنة990

التمرين 10: تستقبل ثانوية L تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M1 ، M2 ، M3 .

25 % من التلاميذ يأتون من المتوسطة M1 ، 40 % من المتوسطة M2 و الباقي من المتوسطة M3

5 % من تلاميذ من المتوسطة M1 ، 10 % من تلاميذ M2 و 0,1 % من تلاميذ M3

يعيدون السنة .

نختار تلميذا عشوائيا .

(a) كۆن شجرة متوازنة تترجم الوضعية .

(b) احسب احتمال الحادثة A " التلميذ الذي تم اختياره يعيد السنة "

الحل:

نرمز بالرمز A_i للحادثة " التلميذ قادم من المتوسطة M_i " مع $1 \leq i \leq 3$

و بالرمز B للحادثة " التلميذ يعيد السنة "

(a) بما أن القانون ذو توزيع منتظم (تساوي احتمال) تترجم النسب الى الاحتمالات التالية

$$p(A_1) = 0,40 ; p(A_2) = 0,25 ; p(A_3) = 1 - p(A_1) - p(A_2) = 0,35$$

◀ نشكل الشجرة المتوازنة

نضع على الفروع الأولى الاحتمالات السابقة

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1$$

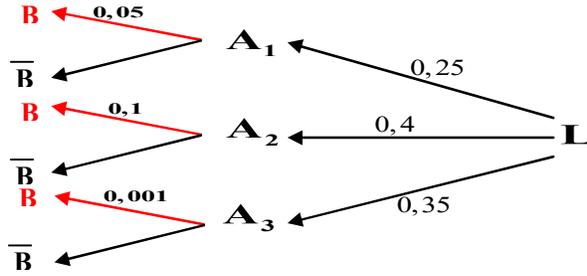
◀ تظهر في نص التمرين الاحتمالات الشرطية كما يلي :

احتمال أن يكون التلميذ معيدا إذا كان قادمًا من المتوسطة M1 هو 0,05

أي $p_{A_1}(B) = 0,05$ و كذلك نقرأ $p_{A_2}(B) = 0,1$ و $p_{A_3}(B) = 0,001$

◀ نكمل الشجرة بفروع تتجه نحو B أو \bar{B} (الحادثة العكسية للحادثة B)

الفروع مثقلة بالاحتمالات الشرطية



لا تنس أن مجموع احتمالات الفروع في نفس المستوي يساوي 1

$$p(A_i \cap B) = p(A_i) \times p_{A_i}(B) \quad \text{و كذلك} \quad p_{A_1}(B) + p_{A_1}(\bar{B}) = 1$$

(b) نحسب $p(B)$ باستعمال دستور الاحتمالات الكلية

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B)$$

$$= 0,25 \times 0,05 + 0,4 \times 0,1 + 0,35 \times 0,001 = 0,05285$$

6. تمارين

التمرين الاول:

1 - أحسب القيم التالية: $3!$ ، $7!$ ، $\frac{15!}{12!}$ ، $\frac{5!}{12!}$

2- أكتب على أبسط شكل ممكن الكسور التالية:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n-1)!}, \quad \frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}, \quad \frac{(n+1)!}{n!}, \quad \frac{n!}{(n-2)!}, \quad \frac{5 \cdot (6!)^2}{6! \cdot 5!}, \quad \frac{14! \cdot 6!}{12! \cdot 5!}$$

التمرين الثاني:

أثبت أن:

1. $\forall (s, n, p) \in \mathbb{N}^3: C_s^p \cdot C_{s-p}^{n-p} = C_s^n \cdot C_n^p$
2. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2: p \cdot C_n^p = n \cdot C_{n-1}^{p-1}$
3. $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2: p \cdot C_{n+1}^p = (n+1) \cdot C_n^{p-1}$

التمرين الثالث:

$$A_n^1 + A_n^3 = 9$$

هل يوجد عدد صحيح n موجب حيث يكون:

التمرين الرابع: بين صحة العلاقة التالية:

1. $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$
2. $C_n^{n-k} = C_n^k$
3. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

التمرين الخامس: يتكون رقم الهاتف من ستة أرقام ما هو عدد الأرقام الهاتفية الممكنة؟

التمرين السادس: بكم طريقة يمكن لمجموعة مكونة من خمسة أشخاص أن يجلسوا

1- في صف به خمسة مقاعد؟

2- حول طاولة مستديرة تشمل خمسة مقاعد؟

3- إذا أصر شخصين من أن يجلسا جنبا إلى جنب؟

التمرين السابع: قطار يتكون من عشر عربات مختلفة فيكم طريقة يمكن تركيب هذا القطار

(بفرض أن القاطرة موجودة دوما بالرأس)؟

التمرين الثامن: ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من أحرف الكلمات التالية:

CENTREE , EQUATION, AGRICULTURE.

التمرين التاسع: كم عدد من ستة أرقام يمكننا أن نكون وذلك بأخذ العدد 1 مرتين, ثلاث مرات العدد 2 ومرة واحدة العدد 3 ؟

التمرين العاشر: تتشكل كلمة سر من ثلاث أحرف لاتينية متبوعة برقمين مختلفين

- 1- كم كلمة سر يمكننا تشكيلها بهذه الطريقة ؟
- 2- من بين هذه الكلمات كم منها ينتهي بحرف زوجي ؟

التمرين الحادي عشر:

- 1- كم عدد من 3 أرقام مختلفة يمكن تشكيله بالأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ؟
- 2- ما هو عدد الأعداد الزوجية ؟
- 3- ما هو عدد الأعداد الفردية ؟
- 4- ما هو عدد الأعداد الزوجية التي تبدأ بالرقم 1 ؟

التمرين 12: لجنة مكونة من 20 طالب تختار مكتباً لها مكوناً من خمسة أعضاء. الرئيس, نائب الرئيس, 3 أمناء.

- فبكم طريقة يمكن تكوين هذا المكتب ؟

التمرين 13: نادي به 8 أعضاء

- 1- كم عدد اللجان المختلفة المكونة من ثلاثة أعضاء يمكن تكوينها بهذا النادي ؟
- 2- كم عدد اللجان المختلفة المكونة من ثلاثة أعضاء يمكن تكوينها بهذا النادي إذا علمنا أن لكل رئيس و أمين صندوق و سكرتير ؟

التمرين 14: لنفرض عدم وجود التكرار في هذا التمرين.

- 1- كم عدد يمكن تشكيله بثلاثة أرقام من بين الأرقام التالية 2, 3, 5, 6, 7, 9 ؟
- 2- كم من بين هذه الأعداد تكون اقل من 400 ؟
- 3- كم من عدد زوجي يمكن تكوينه ؟
- 4- كم من عدد فردي يمكن تكوينه ؟
- 5- كم منها هي من مضاعفات العدد 5 ؟

التمرين 15: لدينا صندوق يحتوي على 5 كريات حمراء و 3 كريات بيضاء نسحب 3 كريات في آن واحد, فما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على:

1- كرة حمراء واحدة فقط ؟

2- كرتين بيضاويتين ؟

3- على الأقل كرة حمراء واحدة ؟

التمرين 16: أراد شخص استدعاء 05 اصدقاء من أصل 11 صديقا من المقربين لمأدبة عشاء

1- فيكم طريقة يمكنها استدعاءهم ؟

2- بكم طريقة ممكنة اذا علمت إن اثنين منهم لا يحضران إلا معا ؟

3- كم لديه من خيار اذا كان اثنين منهم لا يستطيعان الحضور معا ؟

التمرين 17: قسم يتكون من 9 طلبة و 3 طالبات

1- بكم طريقة يمكن للأستاذ تكوين لجنة من 4 طلبة ؟

2- بكم من طريقة يمكن تكوين لجنة بها طالبة على الأقل ؟

3- بكم طريقة يمكن تكوين لجنة بها طالبة واحدة فقط ؟

التمرين 18: خلال امتحان على الطالب الإجابة على 8 أسئلة من بين مجموع 10 أسئلة

1- ما هي مجموعة الاختيارات الممكنة ؟

2- كم من اختيار لديه إذا كان عليه الإجابة على الثلاث أسئلة الأولى ؟

3- كم اختيار لديه إذا كان عليه الإجابة على الأقل على 4 من بين الخمس أسئلة الأولى ؟