الفصل الثاني :نظرية الإنتاج:

أولا : دالة الإنتاج :

أ: تعريف الإنتاج:

هو العملية التي تسمح بتحويل المدخلات **Inputs** (اليد العاملة، المواد الأولية، رأس المال، الآلات و المعدات، الأراضي) ..إلى مخرجات **Outputs** (السلع و الخدمات) ، و نميز بين نوعين من المدخلات:

-المدخلات الثابتة les inputs fixes: هي المدخلات التي تكون كميتها ثابتة و لا يمكن تغييرها.

-المدخلات المتغيرة les inputs variables: هي المدخلات التي يمكن للمؤسسة تغيير كميتها.

ب: تعريف دالة الإنتاج:

هي علاقة دالية بين المدخلات و المخرجات خلال وحدة زمنية، أي أنها تتمثل في العلاقة بين كمية عوامل الإنتاج المستعملة(اليد العاملة، رأس المال، المواد الأولية) ...و حجم الإنتاج المحصل عليه، و يمكن تمثيل دالة الإنتاج بجدول أو منحنى أو معادلة، و تأخذ دالة الإنتاج الصيغة التالية:

$$Q = F (L . K)$$

حيث أن:

L عنصر العمل أو حجم (العمالة) أو الاستخدام مقاسا بمجموع ساعات العمل الفعلية المبذولة خلال مدة زمنية.

Q حجم الناتج أو قيمة الناتج الإجمالي في حالة تقدير دالة الإنتاج على المستوى الكلي.

K عنصر رأس المال و هو يعبر عن إجمالي الأصول الثابتة.

ج: أنواع الفترات الزمنية.

-المدى القصير : هو الفترة التي لا يمكن للمؤسسة خلالها تعديل أو تغيير عوامل إنتاجها (المدخلات) إلا جزئيا في حالة تغير الوضعية (محيط أو بيئة المؤسسة)، و بالتالي و خلال هذه الفترة

سنفترض أن أحد عوامل الإنتاج ثابت على الأقل، في حين أن عوامل الإنتاج الأخرى تكون متغيرة.

-المدى الطويل : هو الفترة التي يمكن للمؤسسة خلالها تعديل أو تغيير كل عوامل إنتاجها (المدخلات) في حالة تغير الوضعية (محيط أو بيئة المؤسسة)،

ثانيا: دالة الإنتاج في الفترة القصيرة:

أ: الناتج (الإنتاج الكلي)، الإنتاجية المتوسطة و الإنتاجية الحدية:

دالة الإنتاج في هذه الحالة ستكون بمتغير واحد فقط هو اليد العاملة أو العمل **L** ، في حين أن المتغير الآخر ثابت و هو رأس المال K، و بالتالي فدالة الإنتاج تأخذ الشكل التالي:

$$PT_L = f(L, K) \Rightarrow PT_L = F(L)$$

- الناتج الكلي أو الإنتاج الكلي PT_L : و يمثل كمية الإنتاج الموافقة لاستخدام كميات متغيرة من العمل.

- الإنتاجية المتوسطة للعمل (الناتج المتوسط PML): هو مساهمة العامل الواحد في الإنتاج الكلي أي أن :

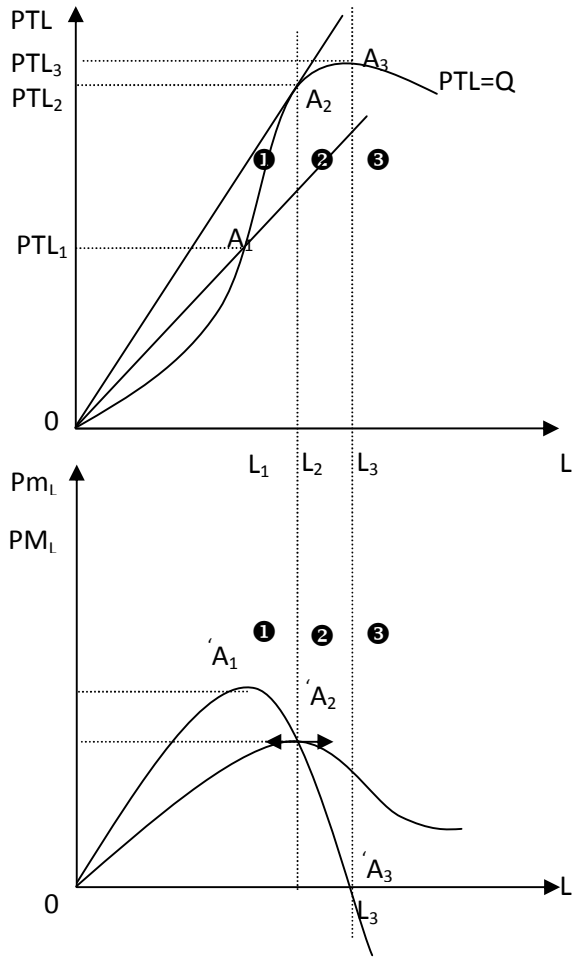
$$PML = PT_L / L$$

حيث L هو عدد العمال و PT_L هو كمية الإنتاج الكلي

الإنتاجية الحدية للعمل (الناتج الحدي **PmL**): و هي التغير في كمية الإنتاج الكلي الناتجة عن تغير كمية العمل بوحدة واحدة، و هو مشتق دالة الإنتاج بالنسبة للعمل أي أن:

$$PmL = \Delta PT_L / \Delta L = \partial PT_L / \partial L$$.

ب: منحنيات الناتج الكلي، المتوسط، الحدي:



ج: ملاحظات حول دوال الإنتاج:

. يتحدد منحنى الناتج المتوسط للعمل PM_L و الناتج الحدي للعمل Pm_L انطلاقا من منحنى الناتج الكلي PT_L.

- نلاحظ أن منحنى الناتج المتوسط للعمل PM_L متزايد (يرتفع) في البداية بتزايد وحدات العمل المستعملة إلى أن يصل إلى نهايته العظمى ($\partial PM_L / \partial L = 0$) حيث تكون فيها قيمة الناتج المتوسط مساوية لقيمة الناتج الحدي ($PM_L = Pm_L$) أيضا، ليبدأ في التناقص (الانخفاض) بعد هذه النقطة، ونسجل أن قيمة الناتج المتوسط دائما موجبة كون قيمة الناتج الكلي PT_L موجبة دائما.

- نلاحظ أن منحنى الناتج الحدي للعمل Pm_L متزايد (يرتفع) أيضا في البداية بتزايد وحدات العمل المستعملة إلى أن يصل إلى نهايته العظمى ليبدأ في التناقص(الانخفاض) بعد هذه النقطة إلى أن تصبح قيمة الناتج الحدي للعمل معدومة، وتكون عندها قيمة الناتج الكلي PT_L عند أقصى قيمة لها، تصبح قيمة الناتج الحدي بعد ذلك سالبة بزيادة اليد العاملة ليبدأ الناتج الكلي بذلك في الانخفاض بعدها.

هـ : قانون تناقص الغلة:

يصور قانون تناقص الغلة العلاقة بين الزيادة في كمية أحد عناصر الإنتاج المتغيرة، عندما تبقى العناصر الإنتاجية الأخرى ثابتة. ينص هذا القانون على انه انطلاقا من نقطة معينة(عدد العمال)، فإن زيادة كمية عامل الإنتاج (اليد العاملة) سيؤدي لانخفاض الكميات الإضافية المحصل عليها من الإنتاج، أي انخفاض قيمة الناتج الحدي (للعمل) بزيادة عامل الإنتاج (عدد العمال) انطلاقا من هذه النقطة.

و : مراحل الإنتاج:

-المرحلة الأولى: يمتد مجالها من نقطة بداية الإنتاج إلى غاية وصول قيمة الإنتاجية المتوسطة إلى قيمتها العظمى ($\partial PM_L / \partial L = 0$) ، أي من نقطة المبدأ إلى غاية النقطة التي يتساوى فيها الإنتاجية الحدية و المتوسطة للعمل و يكون عندها ($PM_L = Pm_L$).

-المرحلة الثانية : من نقطة تساوي الإنتاجية الحدية و المتوسطة للعمل($PM_L = Pm_L$)

إلى النقطة التي تنعدم فيها الإنتاجية الحدية للعمل ($Pm_L = 0$)

-المرحلة الثالثة : في الجزء الذي تكون فيه الإنتاجية الحدية للعمل سالبة.

المنتج لن ينتج في المرحلة الثالثة حتى لو كانت اليد العاملة مجانية لأنه بالإمكان رفع كمية الإنتاج PT_L باستخدام يد عاملة أقل ، كما أنه لن يختار المرحلة الأولى للإنتاج لأنه باستطاعته الرفع من حجم الإنتاج من خلال زيادة عدد العمال ، إذن فالمنتج العقلاني سيختار المرحلة الثانية للإنتاج أين يكون كلا الناتجين الحدي و المتوسط موجبين.

مثال: لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q=10L^2 - L^3$

المطلوب: 1- أوجد كمية العمل التي تقسم الدالة إلى مراحلها الثلاثة (تحديد المنطقة الاقتصادية).

2- حدد حجم الإنتاج في نهاية المرحلة الأولى و بداية المرحلة الثالثة.

الحل: من أجل تحديد بداية المنطقة الاقتصادية للإنتاج(المنطقة الثانية)

يجب أن تكون: $PM_L=P_{mL}$

$$=> \frac{Q}{L} = \frac{\partial Q}{\partial L} \Rightarrow \frac{10L^2 L^3}{L} = 20L + 3L^2$$

$=> 10L - L^2 = 2L - 3L^2 => 10 - L = 20 - 3L$

$=> 20 - 10 = 3L - L => 10 = 2L => L=S$

عند $L=5$ <= $Q= 10(5)^2 - (5)^3 => Q= 250 - 125$

$Q= 125$ unités

- تحديد حجم العمال في نهاية المرحلة الثانية:

$\frac{\partial Q}{\partial L}=0 => 20\ L - 3L^2 = 0 => 20 = 3L => L = 20/6 = 6.66$ (وحدة عمل)

- حجم الإنتاج المقابل لهذا الحجم من العمال:

$Q = 10L^2 - L^3 = \frac{4000}{27}$ unités

ثالثا: دالة الإنتاج في الفترة الطويلة:

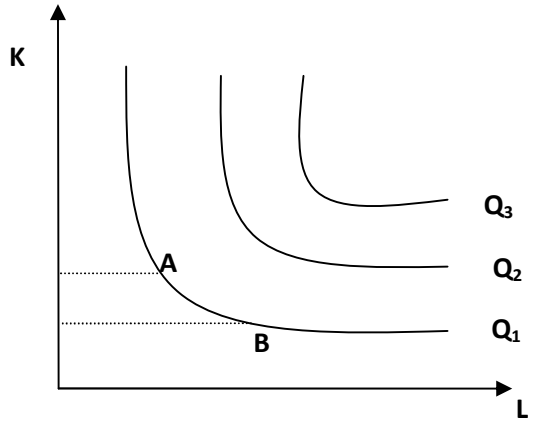
أ: منحنى الناتج المتساوي:

منحنى الناتج المتساوي يعبر عن مستوى معين ثابت من الناتج يمكن الحصول عليه باستخدام توليفات مختلفة من عناصر الإنتاج (عنصر العمل وعنصر رأس المال مثلا). أي أن الانتقال من نقطة لأخرى على منحنى الناتج المتساوي يعني إنتاج نفس حجم الإنتاج من السلعة التي ينتجها المشروع ولكن باستخدام توليفة مختلفة من عناصر الإنتاج المستخدمة حيث يمكن إحلال عنصر محل آخر في عملية إنتاج السلعة، ولكن عملية الإحلال بين عناصر الإنتاج تكون ضمن حدود معينة.

وكلما ارتفع منحنى الناتج المتساوي إلى أعلى كلما دل ذلك على زيادة حجم الناتج والتي تتم من خلال زيادة الكميات المستخدمة من عناصر الإنتاج التي يستخدمها المشروع في العملية الإنتاجية . ويوضح الرسم اللاحق منحنيات الناتج المتساوي وذلك بافتراض أن المشروع يستخدم عنصرين من عناصر الإنتاج وهما العمل ورأس المال.

هذا ويتم إحلال عنصر محل آخر على أساس معدل يعرف بالمعدل الحدي للإحلال التقني $\mathbf{TMST_{L.K}}$.

أو معدل الإحلال " **Technical Rate of Substitution**" الحدي بين عناصر الإنتاج .فمثلا المعدل الحدي لإحلال عنصر العمل محل عنصر رأس المال.



تتميز منحنيات الناتج المتساوي بالخصائص التالية:

. منحنيات الناتج المتساوي تنحدر من الأعلى إلى الأسفل من اليسار إلى اليمين؛ وهذا ما يفسر إمكانية الإحلال بين عناصر الإنتاج.

. منحنيات الناتج المتساوي محدبة نحو نقطة الأصل وذلك راجع إلى تناقص المعدل الحدي للإحلال التقني $\mathbf{TMST_{L.K}}$.

– منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع فيما بينها فلو تقاطعت هذه المنحنيات فهذا يعني إمكانية إنتاج كميتين مختلفتين من السلعة بنفس المجموعة من عنصري الإنتاج.

ب: تعريف المعدل الحدي للاحلال التقني $\mathbf{TMST_{L.K}}$:

يعرف بأنه الكمية من عنصر رأس المال التي يمكن أن يحل محلها وحدة واحدة من عنصر العمل للحصول على نفس المستوى من الناتج .

والمعدل الحدي لإحلال العمل محل رأس المال هو نفسه يمثل ميل منحنى الناتج المتساوي عند نقطة معينة، وهو ميل سالب لأن زيادة استخدام عنصر العمل يكون مقترنًا بنقص استخدام العنصر الآخر وهو عنصر رأس المال .

$$\mathbf{TMST_{L.K}} = \left|\frac{-\Delta K}{\Delta L}\right| = \left|\frac{-dK}{dL}\right| = +\frac{PmL}{PmK}$$

ملاحظة:

يقل ميل منحنى الناتج المتساوي كلما انتقلنا على المنحنى من أعلى إلى أسفل أي كلما اتجه المشروع إلى إحلال عنصر العمل محل عنصر رأس المال، حيث تقل نسبة الإنتاجية الحدية للعمل إلى الإنتاجية الحدية

لرأس المال كلما زادت الكمية المستخدمة من العمل وقلت الكمية المستخدمة من رأس المال، فميل منحنى الناتج المتساوي (نسبة التغير في المستخدم من رأس المال إلى المستخدم من العمل) هو نفسه يعبر عن نسبة الإنتاجية الحدية للعمل إلى الإنتاجية الحدية لرأس المال.

و على سبيل المثال إذا كان Pm_K =½ و Pm_L =2 عند نقطة معينة على منحنى الناتج المتساوي، فمعنى هذا أن لإنتاجية الوحدة L تعادل 4 مرات إنتاجية وحدة من K عند نفس النقطة و على ذلك يمكن للمؤسسة أن تتخلى عن 4 وجدات من K مقابل استخدام وحدة إضافية من L مع البقاء على نفس مستوى الإنتاج، أي على نفس منحنى الإنتاج المتساوي.

ج: خط التكاليف المتساوية:

تكاليف الإنتاج هي مجموع قيمة عناصر الإنتاج المستخدمة في عملية الإنتاج أو هي مجموع ما يتكلفه المشروع لإنتاج كمية معينة من السلعة خلال مدة معينة.

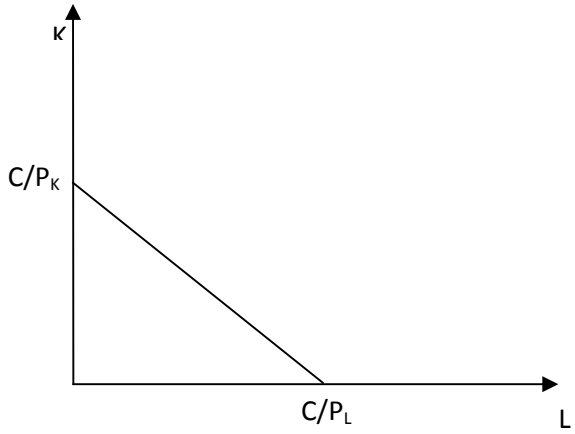
و نعبر عنه رياضيا: $C= P_K K + P_L L$

و حتى يمكن الحصول على خط تكلفة المتساوي نفرض أنه لو قامت المؤسسة بإنفاق جميع الدخل لديها على شراء وحدات من رأس المال لتمكنت من الحصول على وحدات من رأس المال تساوي حاصل قسمة C/P_K و إذا قامت المؤسسة بإنفاق جميع ميزانية المؤسسة على شراء العمل لتحصلت على وحدات من العمل تعادل ناتج قسمة C/ P_L و بربط بين هذين النقطتين بخط مستقيم نحصل على خط التكاليف المتساوية " " و يوضح خط التكلفة المتساوي أن بإمكان المؤسسة الحصول على أي مجموعة من العمل و رأس المال واقعة على هذا الخط. و يعبر عن معادلة خط التكلفة المتساوي بالمعادلة التالية:

$$C = P_L .L + P_K .K$$

$$\frac{C}{Pk} = \frac{Pl}{Pk}.L + \frac{Pk}{Pk}.k$$

$$\mathbf{K= \frac{C}{Pk} - \frac{Pl}{Pk} L}$$



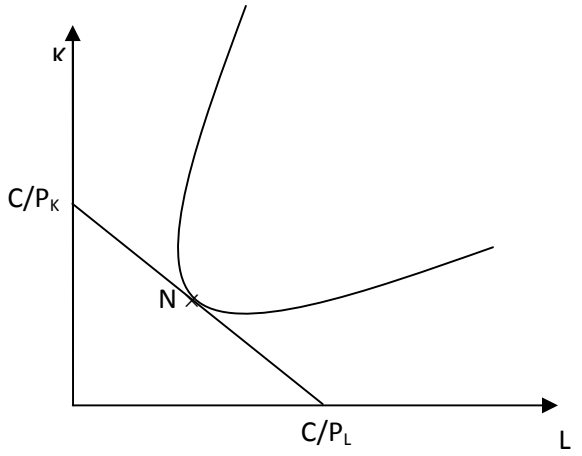
د: **توازن المنتج:**

✓ **توازن المنتج بيانيا:**

نقطة التوازن هي نقطة تماس منحنى الناتج متساوي مع خط التكاليف، و تحدد لنا هذه النقطة المقادير من العمل و رأس المال(عوامل الإنتاج) و هذا من أجل تحقيق أقصى إنتاج في حدود الإمكانيات المتاحة، و في هذه الحالة يكون:

ميل منحنى الناتج المتساوي= ميل خط التكاليف(الميزانية)= المعدل الحدي للإنتاج الفني

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{Pm_L}{Pm_K}$$



✓ **توازن المنتج رياضيا:**

للمنتج هدفان، هما إما تدنية التكاليف أو تعظيم الإنتاج

طريقة 1: حالة تعظيم الإنتاج.

$$\mathbf{L(L.K.\lambda) = F(L.K) + \lambda[C - Pl(L) + Pk(K)]}$$

$$\partial L = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial L} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial L} - \lambda Pl = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial K} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial k} - \lambda Pk = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow CT - Pl.L - PK.K = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{PmK}}{\mathbf{Pk}} = \frac{\mathbf{PmL}}{\mathbf{Pl}}$$

علما أن:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial L} = PmL \\ \frac{\partial f}{\partial k} = PmK \end{cases}$$

و منه شرط توازن المستهلك في حالة تعظيم الإنتاج هو :

$$\begin{cases} \frac{PmL}{Pl} = \frac{PmL}{Pk} = \lambda \\ CT = Pl.L + Pk.K \end{cases}$$

طريقة 2:حالة تدنية التكاليف

$$\mathbf{L = P_L\,(L) + P_K\,(K) + \lambda\,(\,Q_0 - f(L.K)}$$

$$d\,L = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \rightarrow Pl - \lambda' \frac{\partial f}{\partial l} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ❶ \\ \frac{\partial l}{\partial k} = 0 \rightarrow Pk - \lambda' \frac{\partial f}{\partial k} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ❷ \\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \rightarrow Q° - f(L.K) = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots ❸ \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\lambda' = \frac{Pl}{PmL} = \frac{Pk}{Pmk}}$$

علما أن:

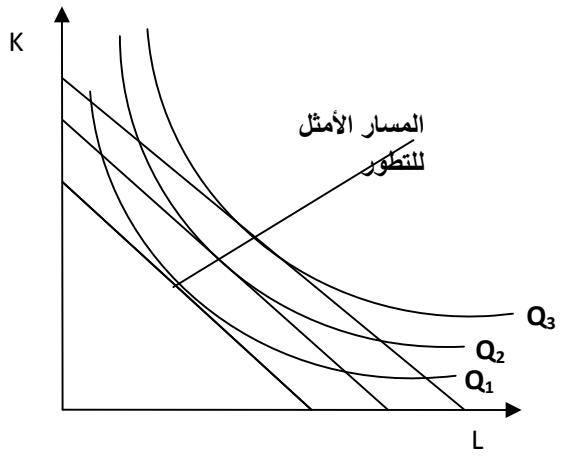
$$Pm_K = \frac{\partial f}{\partial K} \qquad Pm_L = \frac{\partial f}{\partial L}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{Pl}{PmL} = \frac{Pk}{PmK} = \lambda} \\ \mathbf{Q = F(L.K)} \end{cases}$$

✓ **مسار التوسع:**

إذا قامت المؤسسة بتغير نفقاتها الكلية مع ثبات كل من سعر العمل وسعر رأس المال فإن ذلك سيؤدي إلى انتقال خط التكلفة المتساوي بشكل موازي لنفسه فيزداد يتحول إلى الأعلى عندما تزداد النفقات الكلية والى الأسفل إذا انخفضت النفقات الكلية للمؤسسة.

وتكون خطوط التكلفة المتساوية المختلفة مماسا لمنحنيات ناتج متساوي مختلفة وتعبر هذه المماسات عن نقاط توازن مختلفة عن المنتج وعند ربط نقاط التوازن هذه نحصل على مجرى التوسع للمؤسسة.



هـ : دوال الطلب على عناصر الإنتاج :

ان الطلب على أي عنصر من عناصر الإنتاج يرتبط بسعره و سعر المنتوج و أسعار عناصر الإنتاج الأخرى ، لذلك نعبر عن دوال الطلب رياضيا كالتالي :

$$K=f(P_X .P_L .P_K)$$
$$L=f(P_X . P_L . P_K)$$

و لإيجاد دوال الطلب نقوم باشتقاق دالة الربح .

دالة الربح = الإيرادات – التكاليف

$$CT = RT-CT$$

$$\text{Max } \pi \rightarrow d\,\pi = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial k} = 0 \end{cases}$$

مثال 04: لتكن دالة النتاج التالية:

$$Q=K .L$$

اوجد دوال الطلب على عناصر الإنتاج

$$\boldsymbol{\pi = RT - CT}$$
$$\pi = P_X .Q - P_L .L - P_K K$$
$$\pi = P_X .K.L - P_L .L - P_K .K$$

$$d\pi = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial l} = 0 \rightarrow Px\,.K - Pl = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial k} = 0 \rightarrow Px\,.L - Pk = 0 \end{cases}$$

دالة الطلب على k: $\mathbf{k}=\frac{\boldsymbol{Pl}}{\boldsymbol{Px}}$

دالة الطلب على L: $\mathbf{L}=\frac{\boldsymbol{Pk}}{\boldsymbol{Px}}$

و :مرونات الإنتاج:

✓ **المرونة الجزئية للإنتاج:**

مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال :

تقيس درجة استجابة الكميات المنتجة للتغير النسبي في عنصر رأس المال.

$$\mathbf{e_k}=\frac{\boldsymbol{\Delta Q\%}}{\boldsymbol{\Delta K\%}} = \frac{\boldsymbol{dQ/Q}}{\boldsymbol{dK/K}} = \frac{\boldsymbol{dQ}}{\boldsymbol{dK}}.\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{Q}} = \frac{\boldsymbol{PmK}}{\boldsymbol{PMK}}$$

مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل :

تقيس درجة استجابة الكميات المنتجة للتغير النسبي في عنصر العمل.

$$\mathbf{e_L}=\frac{\boldsymbol{\Delta Q\%}}{\boldsymbol{\Delta L'}} = \frac{\boldsymbol{dQ/Q}}{\boldsymbol{dL'/L}}=\frac{\boldsymbol{dQ}}{\boldsymbol{dL}}.\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{Q}} = \frac{\boldsymbol{PmL}}{\boldsymbol{PML}}$$

✓ **مرونة الإحلال**: élasticité substitution technique (EST)

تقيس مرونة الإحلال مدى استجابة الكميات المختلفة من عوامل الإنتاج المستخدمة نتيجة التغير في الأسعار النسبية لعوامل الإنتاج. أو تقيس مدى السهولة أو الصعوبة التي يمكن بها إحلال العمل محل رأس العمل.

$$\mathbf{E_{L.K}}=\frac{\boldsymbol{\Delta\frac{K}{L}\%}}{\boldsymbol{\Delta TMSTl.k\%}} = \frac{\boldsymbol{d(\frac{k}{l})}}{\boldsymbol{dTMSTl.k}}.\frac{\boldsymbol{TMSTl.k}}{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{l}}}$$

ى: غلة الحجم:

يراد بمصطلح غلة الحجم أثر اقتصاديات الحجم على العلاقة بين مقادير عناصر الإنتاج المعبئة في العملية الإنتاجية و الناتج .

هناك دالة يطلق عليها مصطلح دالة **كوب–دوغلاس** Fonction Cobb –Douglass تقيس غلة الحجم، بحيث نميز ثلاث حالات لغلة الحجم:

✓ **زيادة غلة الحجم:** في هذه المرحلة إذا ما زيدت عوامل الإنتاج بنسبة معينة فإن الإنتاج يتزايد بنسبة أعلى من نسبة زيادة عوامل الإنتاج و في هذه الحالة تكون دالة الإنتاج متجانسة من درجة أعلى من الدرجة الأولى أي: $(n>1)$. بحيث : n درجة التجانس.

✓ **ثبات غلة الإنتاج:** إن تزايد غلة الحجم الذي تحققه المؤسسات نتيجة لتوسعها المستمر لا يستمر إلى ما لا نهاية إذ أن المؤسسات لا بد و أن تصل إلى حجم معين تستنفذ قدرة الموفرات التي تحصل عليها من التخصص و عدم القابلية للتجزئة و عليه تصل إلى مرحلة زيادة العوامل بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة الناتج بنفس النسبة تقريبا، ة في هذه الحالة تكون دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى أي $(n=1)$. حيث أن نسبة الزيادة في الإنتاج تكون مساوية لنسبة الزيادة في عوامل الإنتاجية.

✓ **تناقص غلة الحجم:** في هذه المرحلة نسبة الزيادة في الناتج الكلي تكون أقل من نسبته في زيادة عوامل الإنتاج، و تبدأ هذه المرحلة حين يبدأ الإنتاج الكلي في التناقص و حين يصبح الإنتاج الحدي يقترب من الصفر و لذلك لا مبرر لاستخدام وحدات إضافية من عامل الإنتاج حتى لو كان مجانيا لأن الاستمرار في استخدام يؤدي إلى تخفيض الإنتاج.و بين الأسباب التي تؤدي إلى ظهور هذه المرحلة هو تعقد الإدارة و ظهور المشاكل التنظيمية فيؤدي ذلك الى هبوط فعالية عناصر الإنتاج و هذه الأسباب مع غيرها تؤدي إلى ظهور مرحلة تناقص غلة الحجم.

❖ **درجة التجانس :**

نقول عن دالة أنها متجانسة من الدرجة (n) إذا تحقق لدينا من أجل كل قيمة لـ(t) صحة العلاقة التالية:

$$F(tx.n\ y) = t^n\ f(x.y)$$

بمعنى إذا ضعفنا عوامل الإنتاج (t) مرة يزيد حجم الإنتاج (t) مرة بحيث(n) تمثل درجة تجانس الدالة.

الشكل العام لهذه الدالة هو : $\mathbf{Q=K^{\alpha}.L^{\beta}}$

حيث: $\alpha.\beta$ ثوابت حقيقية موجبة . تمثل α : مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال و β مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل ، تحقق هذه الدالة العلاقة التالية :$\mathbf{f(tK.\ tk)=t^{\alpha+\beta}\ f(L.K)}$

يعتبر تابع **كوب– دوغلاص** ، تابع متجانس من الدرجة **($\alpha+\beta$)**، وعليه يكون حجم الإنتاج متزايد بدلالة الحجم إذا كانت **$\alpha+\beta>1$** (نسبة التزايد في عوامل الإنتاج أكبر نسبة التزايد في **Q**).و متناقصة عندما **$\alpha+\beta<1$**(نسبة التزايد في عوامل الإنتاج أصغر نسبة التزايد في **Q**). و ثابتة من اجل **$\alpha+\beta=1$** (نسبة التزايد في عوامل الإنتاج تساوي نسبة التزايد في **Q**).

مثال: $Q=3x^2 + 2xy + y^2$

أحسب أي مرحلة يمر الإنتاج الكلي أو درجة من تجانس الدالة بتطبيق العلاقة السابقة.

الحل:

$f(tx.ty)=t^n f(ty)$

$f(tx.ty)=3(tx)^2+2(tx.\ ty) + (ty)^2$

$=3t^2x^2+2t^2\ ty + t^2\ y^2$

$f(tx.\ ty) = t^2\ f(n.y)$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية أو أن الإنتاج يمر بمرحلة تزايد غلة الإنتاج أي أن درجة التجانسn أكبر من الواحد: $n>1$.