المعادلات التفاضلية

مثال تمهيدي الدالة $f_0 : x \mapsto e^{\alpha x}$؛ $\left(\alpha \in \mathbb{R}^*\right)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ولدينا $f_0'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x} = \alpha \cdot f$ ، والدالة f_0 تحقق المساواة $f_0' - \alpha \cdot f_0 = 0$

تسمى المعادلة $f' - \alpha f = 0$ (1) حيث المجهول f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: **معادلة تفاضلية**، ويسمى f_0 **حل** لهذه المعادلة. تكتب المعادلة (1) أيضا بالشكل: $y' - \alpha y = 0$ (2) حيث المجهول y، دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

بالعكس، يمكن طرح مسألة تعيين كل الدوال y للمتغير x والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، والتي تحقق المعادلة (2).

معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى

نعتبر المعادلة التفاضلية $g(x, y, y') = 0$ (*)

- نعني بحل المعادلة التفاضلية (*) تعيين كل الدوال y حيث:
  - الدالة y معرفة على D من $\mathbb{R}$، وتأخذ قيمتها في $\mathbb{R}$.
  - الدالة y تقبل الاشتقاق D.
  - الدالة y تحقق المعادلة (*).
- إذا بدلنا y, y' في (*) بعبارتيهما بالنسبة إلى x، فإن الدالة y ذات المتغير x تصبح مساوية للصفر على مجال D من $\mathbb{R}$ تكون فيه y ومشتقتها y' معرفة.

مثلا: في المعادلة $y' = 3$ ، $D = \mathbb{R}$ ، تكون مجموعة حلولها y، هي الدوال الأصلية للدالة الثابتة على $\mathbb{R}$: $x \mapsto 3$ أي $y = 3x + c$ (c من $\mathbb{R}$). $y = 3x + c$: معادلة كل المنحنيات البيانية الممثلة للدالة y $\left(x \in \mathbb{R}\right)$

قيمة خاصة للثابت الاختياري c : من أجل $c = 1$، $y = 3x + 1$: معادلة (منحنى) مستقيم.

إذا اشتمل أحد هذه المنحنيات الممثلة للدالة y على النقطة $M_0(x_0, y_0)$، فإن $y_0 = 3x_0 + c$. ومنه $c = y_0 - 3x_0$

والمعادلة المرفقة هي: $y = 3x + \left(y_0 - 3x_0\right)$

ونقبل بأن حل المعادلة التفاضلية (*) يشمل ثابتا حقيقيا (مستقلا)، يُسمى مثل هذا الحل **الحل العام**، كما يسمى كل حل ينتج من الحل العام بإعطاء قيمة لهذا الثابت **بالحل الخاص**.

- نحسب التكامل $z(x) = \int \frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx$. ونشكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x) = -\frac{1}{2}\left(2x + x^2 - 2c\right)\cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي).

نشتق الدالة: $z(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x-2c)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2c-2)\cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z + z' = -(x+1)\cdot e^{-x}$

- الدوال: $y = \lambda \cdot e^x$ (λ عدد حقيقي)، هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y' - y = 0$.

بالفعل، الدالة y معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $y' = \lambda \cdot e^x$.

بوضع $\lambda = \frac{y'}{e^x}$ $(e^x \neq 0)$، وتبديله بقيمته في عبارة y، نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة.

معادلات من الشكل: $y' = f(x)$ (1) حيث f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت h دالة أصلية لـ f على I، فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I، هي الدوال y، حيث: $y=\int f(x)\,dx=h(x)+c \quad (c\in\mathbb{R})$

- $y'=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ، $D=]0,+\infty[$ ، $f\mapsto\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ مستمرة على D، والحل العام: $y=\int-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=e^{\frac{1}{x}}+c \quad (c\in\mathbb{R})$

الحل الخاص $y(1)=e$. لدينا $c=e \Leftrightarrow e^1+c=e \Leftrightarrow y(1)=e$ ومنه الحل الخاص على $]0,+\infty[$ هو $y_0=e^{\frac{1}{x}}$

معادلات من الشكل $y'=\alpha y \quad (3)$ حيث α من $\mathbb{R}^*$.

نعين الدوال y القابلة للاشتقاق على $D\subset\mathbb{R}$ التي تحقق (3). نلاحظ بأن $y=0$ حل ظاهري لـ (3)

نبحث عن الحلول التي لا تنعدم على D: ليكن y حل للمعادلة (3)، بحيث y لا ينعدم على D.

لدينا $(3) \Leftrightarrow \alpha=\frac{y'}{y} \quad (3')$ وبمكاملة طرفي $(3')$ نجد: $\ln|y|=cx+d$ ، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

أي: $|y|=e^{cx+d}=e^d\cdot e^{cx}$ ، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

وبما أن y مستمرة ولا تنعدم على D فإن إشارتها تبقى ثابتة على هذا المجال. إما $y=e^d\cdot e^{cx}$ وإما $y=-e^d\cdot e^{cx}$

في كلتا الحالتين، نكتب $y=\lambda\cdot e^{cx}$ ، $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$. وحلول (3)، هي الدوال $x\mapsto\lambda\cdot e^{cx}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$

أ) تعيين الحل العام ليكن y حل كيفي للمعادلة (3). نعلم بأن $x\mapsto e^{cx}$ المعرفة على D هي حل للمعادلة (3)

بوضع $z=\frac{y}{e^{cx}}$ $(e^{cx}\neq0)$ يكون لدينا $y=z\cdot e^{cx}$. y تقبل الاشتقاق على D: $y'=z'e^{cx}+cx\,e^{cx}$

ومنه $y'-cy=z'\cdot e^{cx}+cx\cdot e^{cx}-cx\cdot e^{cx}=z'\cdot e^{cx}$

بما أن y هي حل للمعادلة (3) فإن $z'=0$، أي أن z هي الدالة الثابتة على D.

إذن الدوال $y=\lambda\cdot e^{cx}$ ، $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$ المعرفة في $\mathbb{R}$، وكذلك، من أجل $\lambda=0$ (الحل الخاص: $y=0$) هي حلول للمعادلة التفاضلية (3).

إذا كان (x_0,y_0) من $(D,\mathbb{R})$ يكون $y_0=\lambda\cdot e^{cx_0}$، ومنه $\lambda=y_0\cdot e^{-cx_0}$ والحل الخاص الوحيد $y=y_0\cdot e^{c(x-x_0)}$

معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

ليكن a و b ثابتين حقيقيين مع $a\neq0$.، ولتكن g دالة عددية معرفة ومستمرة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

- لنعتبر المعادلة التفاضلية $af'+bf=g \quad (1)$

نكتب (1) بالشكل $af'(x)+bf(x)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

عندما g هي الدالة المعدومة، المعادلة (1) تأخذ الشكل $af'+bf=0$، وتسمى معادلة متجانسة أو معادلة بدون طرف ثاني.

المعادلة المتجانسة تكافئ المعادلة $\frac{f'}{f}=-\frac{b}{a}$ التي حلها هو : $f(x)=c\cdot e^{-\frac{b}{a}x}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

تكون مجموعة حلول المعادلة (1)، هي مجموعة الدوال التي هي على شكل مجموع لحل خاص للمعادلة (1) وحل عام للمعادلة المتجانسة المرفقة.

- إذا كانت $g(x)$ مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$، وكان المعاملان a و b دالتين لـ x مستمرتين على I بحيث $0 \neq a(x)$.

$$(1) \quad a(x)y'(x)+b(x)y(x)=g(x)$$

فإن المعادلة المتجانسة: $$(2) \quad a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$$

ستأخذ الشكل $\frac{y'}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}$ وهي تكافئ عندما تكون $H(x)$ دالة أصلية للطرف الأيمن، المعادلة $\ln y(x)=H(x)$

ومنه $\boxed{y(x)=y_1(x)=c\cdot e^{H(x)}}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

نحصل على مجموعة حلول المعادلة (1)، بإضافة حل خاص للمعادلة (1) إلى كل حلول المعادلة المتجانسة المرفقة.

البحث عن حل خاص للمعادلة (1) بطريقة تغيير الثابت

هذا الحل الخاص يوضع بالشكل $y(x)=c(x)\cdot e^{H(x)}$ حيث تتحدد الدالة $c(x)$ "بتغيير الثابت".

بالاشتقاق $y'(x)=c'(x)\cdot e^{H(x)}+H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}$. وبالتعويض في (1) نجد:

$$a(x)\left(c'(x)\cdot e^{H(x)}+H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}\right)+b(x)c(x)\cdot e^{H(x)}=g(x)$$

$$a(x)c'(x)\cdot e^{H(x)}+\cancel{a(x)H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}}+\cancel{b(x)c(x)\cdot e^{H(x)}}=g(x)$$

$a(x)c'(x)\cdot e^{H(x)}=g(x)$ ومنه $c'(x)=\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}$

بمكاملة هذه الأخيرة (مركبة من دوال مستمرة على I) والتعويض في عبارة هذا الحل الخاص ، نجد :

$$\boxed{y(x)=y_0(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}dx}$$

فيكون $y(x)$ الحل العام للمعادلة (1) مؤلفا من مجموع الحلين : $y_1(x)$ حل عام للمعادلة المتجانسة و $y_0(x)$ حل خاص للمعادلة (1). أي $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$

$$\boxed{y(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}dx+c\cdot e^{H(x)}} \qquad H(x)=\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx$$ (c ثابت اختياري من $\mathbb{R}$)

- حل المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ .... (1)

  واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=1$

- أحسب التكامل $z(x)=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx$. ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x)=-\frac{1}{2}\left(2x+x^2-2c\right)\cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي)

- ❑ نوجد أولا الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'(x)+y(x)=0$ بالشكل: $y_1=c\cdot e^{-x}$
- ❑ ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة التفاضلية (1) يكون بالشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-x}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}$ أي: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-y_0$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على: $c'(x)\cdot e^{-x}-y_0+y_0=x\cdot e^{-x}$

التي تكافئ: $c'(x)=x \iff \dfrac{dc}{dx}=x \iff dc=x\cdot dx$

وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية بالشكل: $c(x)=\int dc=\int x\cdot dx=\frac{1}{2}x^2$

فيأخذ الحل الخاص للمعادلة المتجانسة الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-x}=\dfrac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

- الحل العام y للمعادلة (1) : $y=y_1+y_0$ أي : $y=c\cdot e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

والحل الخاص y_0 للمعادلة (1) الذي يحقق الشرط: $y_0(0)=1$ أي : $c\cdot e^{-0}+\frac{1}{2}0^2\cdot e^{-0}=c=1$ هو :

$$y(0)=f(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}$$

– إحدى الدوال الأصلية للدالة: $f(x)$ نجدها بالمكاملة بالتجزئة كالآتي:

$$z(x)=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^{-x}$$

- باشتقاق الدالة: $z(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x-2c\right)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+2c-2\right)\cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z+z'=-(x+1)\cdot e^{-x}$

• حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1$ ...... (1)
واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y(0)=0$.

أ) **1.** حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1$ ... (1)

- نوجد الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=0$ ... (2) :

$$e^x\cdot y'(x)-y(x)=0 \iff \frac{y'}{y}=e^{-x} \iff \ln|y|=c_1-e^{-x} \iff y=\pm c_1\cdot e^{-e^{-x}}$$

ومنه الحل العام لـ (2) : $y_1(x)=c\cdot e^{-e^{-x}}$ حيث $c\in\mathbb{R}$

- ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة (1) يكون من الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-e^{-x}}$.

باشتقاق هذه العلاقة نجد: $y_0'(x)=c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}$

وبالتعويض في (1) نحصل على: $e^x y_0'-y_0=$

$$e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}-\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}=e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}=1$$

ومنه $c'(x)=e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}$. وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية لـ $c(x)$ بالشكل:

$c(x)=\int e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}dx=-e^{-e^{-x}}$ ، فيكون الحل الخاص لـ (1) : $y_0(x)=-e^{-e^{-x}}\cdot e^{-e^{-x}}=-1$

- الحل العام y للمعادلة (1) : $y=y_1+y_0$ هو : $y(x)=c\cdot e^{-e^{-x}}-1$ حيث $c\in\mathbb{R}$

الحل الخاص y_2 للمعادلة (1) الذي يحقق $y(0)=0$: $c\cdot e^{-e^{-0}}-1=0 \iff c\cdot e^{-1}=1$

ومنه : $c=\frac{1}{e}$ ويكون الحل الخاص المطلوب هو : $y_2(x)=\frac{1}{e}\cdot e^{-e^{-x}}-1$.