Université Djilali Bounaama –Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
L1- ST-SM. Maths2 - Semestre 2- 2020/2021

Matrices, Déterminants et Systèmes d'Equations Linéaires

Notes de cours

Mathématiques 2 SM-ST

Présenté par Leila Slimane

1 Matrices

1.1 Définitions et notions

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{k}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition 1.1 *On appelle matrice A de dimension (taille) $n \times p$ à coéfficients dans $\mathbb{k}$ un tableau rectangulaire de nombres dans $\mathbb{k}$ comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coéfficients de la matrice A.*

Notation

1. Les matrices sont représentées par des lettres majuscules $(A, B, C, \cdots \text{etc.})$.
2. Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$
ou encore $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ ou $A = (a_{ij})$.
3. On note a_{ij} l'élément ou le coéfficient de la matrice situé sur la $i^{éme}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne (ces indices donne l'adresse ou la position de chaque élément).
4. La dimension (la taille, l'ordre) de la matrice est notée par $\dim A$: $\dim A = n \times p$, n désigne le nombre de lignes et p le nombre de colonnes.
5. L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ à coéfficients dans $\mathbb{k}$ est noté par $M_{n,p}(\mathbb{k})$.

Remarque 1.1 *On ne doit pas confondre a_{ij} qui est un élément avec (a_{ij}) qui est une matrice dont les éléments sont les a_{ij}.*

Exemple 1.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \pi & -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} i & 3+2i & 0 \\ 1 & 0 & e \\ -7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.
On a $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 3$. *On a par exemple :* $a_{12} = 0$, $a_{23} = 1 + \sqrt{5}$, $b_{11} = i$, $b_{12} = 1$, $b_{33} = 11$.

1.2 Matrices particulières

1. La matrice nulle de dimension $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note $0_{n,p}$. Par exemple :
$0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. La matrice A est une matrice ligne (vecteur-ligne) si $\dim A = 1 \times p$ $(n = 1)$: $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1p})$ .Par exemple : $A = \left(-7, 4, \sqrt{3}\right)$.
3. La matrice A est une matrice colonne (veteur-colonne) si $\dim A = n \times 1$ $(p = 1)$:
$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$.
4. La marice A est dite matrice carée si $n = p$ (le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes). On note $M_{n,n}(\mathbb{k})$ par $M_n(\mathbb{k})$. Les éléments a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forment la diagonale principale.
5. La matrice identité (ou unité) I_n est une matrice carrée d'ordre n où $a_{ij} = 1$ si $i = j$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Par exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. La matrice A est une matrice diagonale si A est carrée et si $a_{ij} = 0$ quand $i \neq j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
7. A est une matrice triangulaire supérieure si A est une matrice carée et $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
8. A est une matrice triangulaire inférieure si A est une matrice carée et $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

1.3 Egalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients (ou les éléments) située à la même place sont éguaux :
$\dim A = \dim B = n \times p$ et $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$.

Exemple 1.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
On a $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 2$. *Donc* $A \neq B$ *car* $\dim A \neq \dim B$.

Exemple 1.3 *Trouver les valeurs des réels x et y tels que $A = B$, où :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ y^2 - 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2x-1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les deux matrices ont la même dimension, on a $A = B$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y^2 - 3 = 6 \\ 2x - 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

1.4 Opérations sur les matrices.

Dans cette section on va définir quelques opérations sur l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{k})$.

1.4.1 Addition des matrices

Définition 1.2 *Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même dimension $n \times p$. Leur somme est la matrice $C = (c_{ij})$ de dimension $n \times p$ définie par :*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

(On additionne les éléments qui ont la même position). On note $C = A + B$.

Remarque 1.2
- *On ne peut pas additionner deux matrices de dimension différentes.*
- *De même on peut définir la soustraction de deux matrices : $C = A - B$ est la matrice de dimension $n \times p$ définie par $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.*

1.4.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.3 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *une matrice et* $\alpha \in \mathbb{k}$ *un scalaire. Le produit de la matrice* A *par le scalaire* α *donne une matrice notée* $\alpha A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *et définie par :* $\alpha A = \alpha (a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$ *(i.e. on multiplie chaque coéfficent de* A *par* α*).*

Exemple 1.4 *Soit :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.
Evaluons $A+2B$, $B+C$. *Les matrices* A *et* B *ont la même dimension* $(\dim A = 2 \times 2 = \dim B)$ *par la suite* A *et* $2B$ *ont aussi la même dimension donc* $A + 2B$ *est bien définie :*

$$\begin{aligned} A + 2B &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-6 & 5+0 \\ -1+4 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\dim B = 2 \times 2 \neq \dim C = 2 \times 3$, $B + C$ *n'est pas définie (elle ne peut pas être calculée).*

Proposition 1.1 *Soit* $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$*. On a les propriétés suivantes :*

1. *Commutativité :* $A + B = B + A$.
2. *Associativité :* $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. *Elément neutre pour la somme :* $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
4. *Elément symétrique :* $A - A = A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$.
5. *Associativité du produit par un scalaire :* $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
6. *Distributivité sur l'addition des scalaires* $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.
7. *Elément neutre pour le produit par un scalaire :* $1A = A$.

Remarque 1.3 *On peut montrer que l'ensemble* $M_{n,p}(\mathbb{k})$ *muni des deux opérations précédentes est un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel.*

1.4.3 Produit (multiplication) matriciel

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{k})$ deux matrices. Le produit matriciel de ces deux matrices $C = AB$ est une matrice de $M_{n,q}(\mathbb{k})$ dont les coéfficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Autrement dit l'élément c_{ij} est le résultat du produit scalaire de la ligne i de la matrice A avec la colonne j de la matrice B.

Exemple 1.5 *Soit :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.
Effectuons le produit matrciel AB et AC si c'est possible.

On a : $\dim A = 2\times 3$ *et* $\dim B = 3\times 2$. *Alors le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B donc le produit AB est bien défini avec* $\dim AB = 2\times 2$ *et on a :* $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2\times(-3)+5\times 2+4\times 0 & 2\times 0+5\times 1+0\times(-7) \\ -1\times(-3)+0\times 2+3\times 4 & (-1)\times 0+0\times 1+3\times(-7) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}.$$

Comme le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de C, car $\dim A = 2\times 3$ *et* $\dim C = 2\times 2$, *alors le produit AC n'est pas défini.*

Le produit matriciel a des propriétés différentes de celles du produit de deux réels :

- Le produit AB n'est pas toujours défini : il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- En géneral $AB \neq BA$: le produit n'est pas commutatif, même dans le cas de deux matrices carrées. Prenons : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
  On a $AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$.
- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$, *i.e.* il existe A et B non nulles telles que $AB = 0$.
  On a par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. Comme exemple on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.2 *Soient A, B et C des matrices de dimension $n\times p$, $p\times q$ et $q\times m$ respectivement et α et β deux scalaires. On a les propriétés suivantes :*

1. *Associativité du produit matriciel* $A(BC) = (AB)C$.
2. *Distributivité à gauche sur l'addition matricielle :* $A(B+C) = AB + AC$.
3. *Distributivité à droite sur l'addition matricielle :* $(A+B)C = AC + BC$.

4. *Associativité pour la multiplcation par un scalaire :* $(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta(AB)$.
5. $I_n A = A I_p = A$, $A 0_{p,r} = 0_{n,r}$ *et* $0_{r,n} A = 0_{r,p}$.

Définition 1.4 *Soit $A \in M_n(\Bbbk)$ une matrice carrée. On définit les puissances succecives de A par :* $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^{k+1} = A^k A$, $k \in \mathbb{N}$. *C'est-à-dire :*

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\ fois}.$$

Proposition 1.3 *Soit $A, B \in M_n(\Bbbk)$. On a*
1) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$,
2) $(A+I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$.

Exemple 1.6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- *Calculer* A^2, A^3, A^4.
- *Déduire* $A^p, p \geq 4$.

On trouve $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.
- *D'après les calculs précédents on peut déduire que*

$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. *Cette formule peut être démontrée par le principe de récurrence.*

1.4.4 Transposition de matrices

Définition 1.5 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$. La matrice transposée de A, notée A^t est obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A :*
$A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk) \Rightarrow A^t = (a_{ji}) \in M_{p,n}(\Bbbk)$.

Exemple 1.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Alors sa transposée* $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *De plus* $\dim A = 2 \times 3 \Rightarrow \dim A^t = 3 \times 2$.

Proposition 1.4 *Soit A et B deux matrices et $\alpha \in \mathbb{k}$ un scalaire. On a :*

1. $(A^t)^t = A$,
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$,
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$,
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Définition 1.6 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$, une matrice carrée.*
1) A est dite "symétrique" si et seulement si $A^t = A$.
2) A est dite "antisymétrique" si et seulement si $A^t = -A$.

Exemple 1.8 *1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. On a $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A$, donc la matrice A est symétrique.*

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -5 & 3 & -6 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. On a $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} = -B$, donc la matrice B est antisymétrique.

Définition 1.7 *La trace de la matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$, notée trA, est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit : $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.*

Exemple 1.9 *Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors : $trA = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2 + 6 + 5 = 13$.*

Proposition 1.5 *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, alors :*

1. $tr(A+B) = trA + trB$,
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$,
3. $tr(A^t) = tr(A)$,
4. $tr(AB) = tr(BA)$.

2 Déterminants

Le déterminant est un nombre que l'on associe à une matrice carrée
$A \in M_n(\mathbb{k})$. Le déterminant est un outil très important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires. Avant de donner son expression dans le cas générale on commence par donner sa formule pour des matrices de petites tailles.

Cas d'une matrice d'ordre 1

Dans ce cas $A = a_{11}$ et le déterminant est défini par : $\det A = a_{11}$.

Cas d'une matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est le nombre :
$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Cas d'une matrice d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Dans ce cas le déterminant est défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

On définit le déterminant dans le cas général d'une manière récursive.

Définition 2.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On note A_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. En développant suivant une ligne i quelconque, le déterminant est le nombre :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

ou d'une manière équivalente en développant suivant une colonne j quelconque :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Le nombre $\det A_{ij}$ est appelé le mineur d'ordre $n-1$ de la matrice A et $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est appelé le cofacteur de A relatif au coéfficient a_{ij}. Le terme $(-1)^{i+j}$ donne une distribution des signes $+$ et $-$ analogue à la distribution des cases noirs et blans sur un damier :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Exemple 2.1 *Soit* $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. *Alors* $\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times 7 - 3 \times 9 = 8.$

Exemple 2.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

En développant suivant la prmière ligne on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-6+3) + (-3-12) + 0 = -24.$$

Développant maintenant suivant la troixième colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Règle de Sarrus

Cette règle s'applique uniquement pour les matrices d'ordre 3 :

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ alors on a :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}].$$

Exemple 2.3 *Calculons le déterminant suivant par la règle de Sarrus :* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

On a :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [2\times(-1)\times 1 + 1\times 3\times 3 + 0\times 1\times 2] - [0\times(-1)\times 3 + 2\times 3\times 2 + 1\times 1\times 1]$$
$= -6.$

Proposition 2.1 *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire supérieure (ou inférieure) A est égal au produit des termes diagonaux :*

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}.$$

Exemple 2.4 *On a :* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (-8) \times 4 = -32.$

C'est facile à voir que $\det(I_n) = 1$ et $\det(0_n) = 0$.

Théorème 2.1 *Soit A, $B \in M_n(\mathbb{k})$ deux matrices et $\lambda \in \mathbb{k}$ un scalaire. Alors :*

1. $\det(AB) = \det(A)det(B)$.
2. $\det(A^t) = \det(A)$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. $\det A = 0$ *si A contient une colonne (resp. ligne) nulle.*
5. $\det A = 0$ *si A contient deux colonnes (resp. lignes) égales.*
6. $\det A = 0$ *si une des colonnes (resp. lignes) de A est une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. lignes).*
7. *Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. lignes).*
8. *Un déterminant change de signe si l'on éffectue un nombre impair de permutations (si par exemple, on permute deux lignes uniquement ou deux colonnes uniquement).*

Exemple 2.5 *1) Le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ *est nul car la deuxième colonne C_2 est une combinisant linéaire des autres colonnes : $C_2 = C_1 + 2C_3$.*

2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times (-1) = -10.$

On a multiplié par -1 car on a permuté entre la première colonne et la troixième colonne.

3 Matrice inverse

Définition 3.1 *Soit $A \in M_n(\Bbbk)$ une matrice carrée. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\Bbbk)$ telle que :*

$$AB = I_n \qquad \text{et} \qquad BA = I_n.$$

On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

C'est facile à vérifier que la matrice I_n est inversibele avec $I_n^{-1} = I_n$ et que la matrice nulle 0_n n'est pas inversible.

Exemple 3.1 *Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible. On va étudier l'existence d'une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_2$ et $BA = I_2$. On a :*

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 5c = 0 \\ 5d = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b = -\frac{2}{5} \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{5} \end{array} \right. .$$

Donc $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. De plus on a bien
$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire $BA = I_2$. Donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.*

Théorème 3.1 *La matrice $A \in M_n(\Bbbk)$ est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Exemple 3.2 *Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 9 & \alpha^2 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = \alpha^3 - 27$. La matrice A est inversible si $\det(A) = \alpha^3 - 27 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 3$.*

Proposition 3.1 *Soit $A, B, C \in M_n(\Bbbk)$. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si A est inversible, alors son inverse est unique et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.*
2. *Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et on a $(A^{-1})^{-1} = A$.*

3. *Si A est inversible, alors A^t est aussi inversible et on a $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*
4. *Si A et B sont inversibles, alors AB est aussi inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
5. *Si C est inversible, alors $AC = BC \Longrightarrow A = B$.*

Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice inversible et $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1 \in \mathbb{R}$. Si

$$a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A = I_n$$

alors :

$$A\left(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right) = I_n \Longrightarrow A^{-1} = \left(a_n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n\right).$$

Exemple 3.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer $2A - A^2$ et déduire A^{-1}.*

On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

donc $2A - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par la suite $2A - A^2 = I_3 \Rightarrow A(2I_3 - A) = I_3 \Rightarrow A^{-1} = (2I_3 - A)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1 Calcul de la matrice inverse par la méthode de cofacteurs

On présente ici une méthode pratique pour calculer la matrice inverse.

Définition 3.2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$. On appelle matrice des cofacteurs $C = com(A)$(ou la comatrice) la matrice de coéfficients $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{èmé}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.*

Théorème 3.2 *Si A est inversible alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(com(A)\right)^t$.*

Exemple 3.4 *Appliquons ce théorème pour une matrice d'ordre 2. Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Supposons que $\det(A) = ad - bc \neq 0$, *donc* A^{-1}*existe.*

On a $com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}$, $(com(A))^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Finalement $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 3.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = -2 \neq 0$, *alors* A *est inversible. Evaluons la comatrice de* A *:*

$$com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

$$c_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad c_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{donc } com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow com(A)^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Systèmes d'équations linéaires

Définition 4.1 *Soit* $n, p \geq 1$ *deux entiers. On appelle système d'équations linéaires à* n *équations et* p *inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *le système :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} . \qquad (S)$$

Les coefficients a_{ij} et les seconds membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{k}$. Les inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{k}$.

Définition 4.2 *1. On appelle solution du système (S) tout vecteur $X = (x_j)_{1\leq j\leq p}$, $x_j \in \mathbb{k}$ vérifiant les équations du système simultanément.*

2. Résoudre (S) signifie déterminer toutes les solutions possibles.

3. Deux systèmes sont dit équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple 4.1 *Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est solution du système :*

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases},$$

car le vecteur X vérifie les deux équations du système simultanément :

$$\begin{cases} 2 \times 2 - 3 = 1 \\ 5 \times 2 - 2 \times 3 = 4 \end{cases}.$$

Proposition 4.1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit incompatible ou impossible.

4.1 Forme matricielle(écriture matricielle)

Le système (S) peut être écrit sous la forme matricielle suivante : $AX = B$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

$X = (x_j)_{1\leq j\leq p}$: le vecteur des inconnues,
$B = (b_j)_{1\leq j\leq p}$: le vecteur du second membre,
$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$: la matrice des coéfficients de (S).

Exemple 4.2 *La forme matricielle du système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ 5x - y + 2z = -7 \\ x + 2y + 6x = 11 \end{cases}$$

$$\textit{est : } AX = B \textit{ où : } \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \textit{et } \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

4.2 Méthodes de résolution

On s'intéresse à la résolution du système (S) dans le cas $n = p$. Dans ce cas le système (S) peut prendre la forme matricielle : $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On distingue deux cas :

I) si $\det(A) = 0$ le système (S) n'a pas de solution ou le système possède une infinité de solutions,

II) si $\det(A) \neq 0$ le système (S) admet une solution unique. On va présenter dans la suite deux méthodes différentes pour calculer cette solution.

4.2.1 Méthode de l'inverse

Cette méthode fait appel à linverse de la matrice des coéfficients. Comme $\det(A) \neq 0$ implique que la matrice A est inversible (A^{-1} existe) alors on peut calculer la solution comme suit :

$$\begin{aligned} AX = B \quad & \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ & \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ & \Leftrightarrow I_n X = A^{-1}B \\ & \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Exemple 4.3 *Considérons le système :* $\begin{cases} x + 3y + 4z = 50 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31. \end{cases}$.

La forme matricielle du système est :

$$AX = B \textit{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; \textit{et } B = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = -8 \neq 0$ *donc le système possède une solution unique* $X = A^{-1}B$. *Calculons la matrice inverse* A^{-1} :

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 1 \\ 34 & -18 & 5 \\ -32 & 16 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{\det(A)}\left(com(A)\right)^t = \tfrac{1}{-8}\begin{pmatrix} 18 & 34 & 1 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors $X = A^{-1}B = \tfrac{1}{-8}\begin{pmatrix} 18 & 34 & 1 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$

4.2.2 Méthode de Cramer

Si $\det(A) \neq 0$ le système (S) qui est équivalent à : $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{k})$ possède une solution unique donnée par :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

La matrice A_i est obtenue en remplacant la $i^{ème}$ colonne de A par la colonne du second membre B.

Exemple 4.4 *Considérons le système :* $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16. \end{cases}$. $\quad (S_1)$

La forme matricielle de (S_1) *est :*

$$AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 26 \neq 0$ *donc* (S_1) *admet une solution unique que l'on peut obtenir par la méthode de Cramer :*

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{26} = 1, \\ y &= \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix}}{26} = -3, \\ z &= \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix}}{26} = -2. \end{aligned}$$

La solution est donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 4.5 *Résoudre* $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$.

La matrice des coéfficients est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = 0$ *donc ce système soit possède une infinité de solutions ou n'admet aucune solution. De la première ligne du système on a :*

$$y = 2x - 3.$$

Remplaçant la valeur de y *dans la deuxième ligne nous obtenons :*

$$4x - 2(2x - 3) = 5 \Leftrightarrow 6 = 5,$$

ce qui est impossile. Donc le système n'a pas de solution.

Exemple 4.6 *Soit :* $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$.

La matrice des coéfficients est $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = 0$. *De la première ligne du système on a :*

$$x = 3y + 1.$$

Remplaçant la valeur de x dans la deuxième ligne nous obtenons :

$$3(3y+1) - 9y = 3 \Leftrightarrow 3 = 3,$$

ce qui est toujours vrai $\forall y \in \mathbb{R}$. Par la suite ce système possède une infinité de solutions données par :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3y+1 \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \right\}.$$