

Correction de l'examen d'Algèbre 1.

Exo 1 :

I) Les négations :

1) L'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive (1)

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x < y$ et $f(x) \leq f(y)$. (1)

II) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $g(n) = g_p(n) + 1$ et $g = g_p$.

Donc pour $n = p$, on a : $g(p) = g_p(p) + 1$, alors $g(p) = g(p) + 1$,
ainsi $0 = 1$! Contradiction, d'où P n'existe pas. (3)

Exo 2 :

1) a) R est réflexive : On a : $x - x = 0 = 3 \cdot 0$ ($k = 0$);
alors $x R x, \forall x \in \mathbb{Z}$.

b) R est symétrique : On a :
 $x R y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \setminus x - y = 3k$, donc $y - x = -3k$, alors =
 $y - x = 3(-k) = 3k'$, ainsi $y R x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1,5)

c) Soient x, y et $z \in \mathbb{Z}$ tels que : $x R y$ et $y R z$.
On a : $x R y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \setminus x - y = 3k$.

$$y R z \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} \setminus y - z = 3k'$$

donc $x - z = 3(k + k') = 3k''$, alors $x R z$.

2) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$\bar{a} = \{y \in \mathbb{Z} : y R a\} = \{y \in \mathbb{Z} : y = a + 3k\}$$

$$= \{a + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) En particulier : $\bar{0} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 0\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}.$ (1,5)

$$\bar{1} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 1\} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} + 1.$$

$$\bar{2} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 2\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} + 2.$$

4) on a : $2023 = 3 \times 674 + 1$. Donc $2023 \in \bar{1}.$ (1,5)

Exo 3 : I) 1) on a : $\ell_{\mathbb{C}^*} = 1 \in U_n$ (car $1^n = 1$).

Soient $z_1, z_2 \in U_n$: $(z_1 \times z_2^{-1})^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$.
donc $z_1 \times z_2^{-1} \in U_n.$ (1,5)

Alors U_n est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2) a) Soient $z_1, z_2 \in U_n$ on a :

$$\varphi_n(z_1 \times z_2) = (z_1 \times z_2)^2 = z_1^2 \times z_2^2 = \varphi_n(z_1) \times \varphi_n(z_2),$$

donc φ_n est un homomorphisme de groupes. Puisque $\varphi_n: U_n \rightarrow U_n$ (1)
Alors φ_n est endomorphisme de groupes.

b) on a : $\varphi_3 = \varphi_3 \rightarrow U_3$

$$z \mapsto \varphi_3(z) = z^2 \quad \text{car } U_3 = \{1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2\}.$$

$\text{Ker } \varphi_3 = \{z \in U_3 \mid z^2 = 1\} = \{1\}$, alors φ_3 est injective. (1,5)

II) 1) On a: $\frac{1}{1} = 1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$, alors $\mathbb{Z}[i] \neq \emptyset$.

• Pour $a_1 + ib_1$ et $a_2 + ib_2 \in \mathbb{Z}[i]$.

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(-b_1 + b_2) \in \mathbb{Z}[i] \quad (1)$$

$$(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{Z}[i].$$

Alors $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

2) a) On a: $z \times \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = N(z)$. (1)

b) $N(z \cdot z') = (z \cdot z') \cdot \overline{(z \cdot z')} = z \cdot \bar{z} \cdot z' \cdot \bar{z}' = N(z) N(z')$ (1)

c) Si z est inversible, donc $\exists z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z z' = 1$.

$$z z' = 1 \Rightarrow N(z z') = N(1) = 1 \Rightarrow N(z) N(z') = 1 \Rightarrow N(z) = N(z') = 1$$

Car $N(z) \in \mathbb{N}$.

Réciproquement: si $N(z) = 1$ et comme $N(z) = z \cdot \bar{z}$, alors =

$$z \cdot \bar{z} = 1 \text{ d'où } \exists z' = \bar{z} \in \mathbb{Z}[i] \text{ tel que } z \cdot z' = 1$$

Ainsi z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$.

d) z est inversible $\Leftrightarrow N(z) = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \text{ et } b^2 = 0 \text{ ou } a^2 = 0 \text{ et } b^2 = 1.$$

Alors $a = \pm 1$ et $b = 0$ ou $a = 0$ et $b = \pm 1$. (1)

Ainsi les éléments inversibles sont $1, -1, i$ et $-i$.