حل السلسلة 04

التمرين 01:

$$H_0: \mu = 500 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 500$$

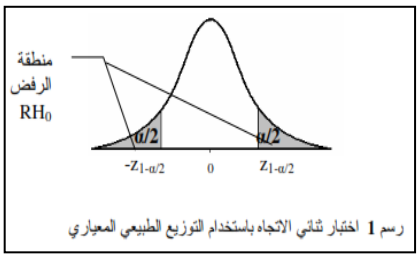
نحتاج إلى اختبار ثنائي الاتجاه لأن جودة التعبئة تعني عدم الزيادة و لا النقصان.

المجتمع مجهول التوزيع، لكن يمكن استخدام التوزيع الطبيعي استنادا إلى نظرية النهاية المركزية لأن $n = 100 \geq 30$.

إذن: $m \approx N(\mu, \sigma_m)$

قاعدة القرار تكون كالتالي:

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{m-\mu_0}{\sigma_m} \notin [-z_{1-\alpha/2} \; ; \; z_{1-\alpha/2}] \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$



رسم 1 اختبار ثنائي الاتجاه باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري

أو نكتب أيضا:

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \left|\dfrac{m-\mu_0}{\sigma_m}\right| > z_{tab} = z_{1-\alpha/2} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

نهمل معامل الإرجاع بفرض أن المجتمع (أوزان العلب المنتجة في المعمل) كبير بحيث $n/N < 0.05$. وحسب الفرضية الصفرية فإن: $\mu = 500$ إذن:

$$M \approx N\left(500 \; , \; \frac{3}{\sqrt{100}}\right)$$

$$z_{cal} = \frac{503-500}{3/\sqrt{100}} = 10 \qquad ; \qquad z_{tab} = z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.10/2} = z_{0.95} = 1.64$$

$|z_{cal}| > z_{tab} \Rightarrow RH_0$ نرفض الفرضية الصفرية ونستدل أن الآلة تحتاج إلى تصحيح.

التمرين 02:

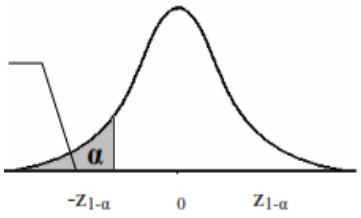
نحتاج هنا إلى اختبار أحادي الاتجاه لكي نرى إن كانت بيانات العينة *(m = 497)* تصل أن تعتبر دليلا إحصائيا على دعوى المستهلكين بنقص تعبئة العلب أم أنها أقل من ذلك و أن القيمة 497 تفسر بالعوامل العشوائية التي تتضمنها التعبئة.

$$H_0: \mu = 500 \leftrightarrow H_1: \mu < 500 \text{ g}$$

$n = 100 \geq 30 \Rightarrow m \approx N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$; Sous $H_0: \mu = 500 \Rightarrow$ $m \approx N(500, 3/\sqrt{100})$.

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{m-\mu_0}{\sigma_m} < -z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$z_{cal} = \frac{497-500}{3/\sqrt{100}} = -10 \qquad ; \qquad z_{tab} = z_{1-\alpha} = z_{1-0.10} = z_{0.90} = 1.28$$



رسم 2 اختبار أحادي الاتجاه من اليسار

$z_{cal} < z_{tab} \Rightarrow RH_0$

نرفض الفرضية H_0 ونستدل أن بيانات العينة تؤيد شكاوى المستهلكين.

لاحظ أنه ربما نصل إلى نتيجة معاكسة، أي عدم رفض الفرضية الصفرية ومن ثم عدم تأييد الدعوى بنقصان التعبئة، إذا اخترنا مستوى معنوية أكثر شدة (0.01 أو 0.05 بدل 0.10). كلما كانت القيم المحصل عليها في العينة بعيدة عن القيمة الافتراضية كان ذلك أدل على قوة الدليل الإحصائي. يعتبر بعض الإحصائيين نتيجة الاختبار الإحصائي "معتبرة جدا" *très significatif* إذا كانت تقع في منطقة رفض بمستوى 0.01، و"معتبرة باحتمال" *probablement significatif* إذا كانت تقع في منطقة الرفض 0.05 لكن ليس 0.01، ما يعني ضرورة مواصلة البحث عن أدلة و "غير معتبرة" *non significatif* إذا كانت تقع في منطقة 0.10 لكن ليس 0.05.

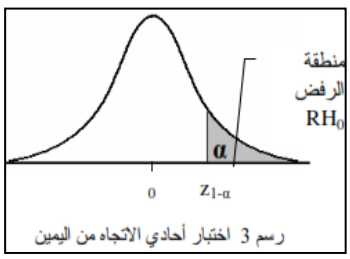
التمرين 03:

نحتاج إلى اختبار أحادي الاتجاه من اليمين لنرى ما إذا كانت البيانات الإحصائية للفوج تؤكد أن مستوى الفوج أعلى من المعدل العام أم أن الفرق أقل من أن يعني ذلك وأنه ينسب للعوامل العشوائية.

$$H_0: p = 0.6 \leftrightarrow H_1: p > 0.6$$

$$n = 36 \geq 30 \Rightarrow p' \approx N(p \; ; \; \sigma_{p'}) \qquad ; \text{sous } H_0 : p' \approx N\left(0.6 \; ; \sqrt{\frac{0.6(0.4)}{36}}\right)$$

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{p'-p_0}{\sigma_{p'}} > z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$



رسم 3 اختبار أحادي الاتجاه من اليمين

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{28}{36} = 0.7777; \; \sigma_{p'} = \sqrt{\frac{0.6(0.4)}{36}} = 0.08164 \Rightarrow z_{cal} = \frac{0.7777-0.6}{0.08164} = 2.177$$

$$z_{tab} = z_{1-\alpha} = z_{1-0.1} = z_{0.9} = 1.28$$

$z_{cal} > z_{tab} \Rightarrow RH_0$

و نستدل أن نتائج الفوج أكبر من المعدل العام بمستوى معنوية 0.10.

* $\alpha = 0.05$: $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.64$

$z_{cal} > z_{tab} \Rightarrow RH_0$

و نستدل أن نتائج الفوج أكبر من المعدل العام بمستوى معنوية 0.05.

* $\alpha = 0.01$: $z_{1-\alpha} = z_{0.99} = 2.33$ $\quad z_c \leq z_{tab} \Rightarrow R'H_0$

ونستدل بمستوى معنوية 0.01 أن نتائج الفوج ليست أكبر من المعدل العام.

لاحظ أن اختيار مستوى المعنوية يؤثر على نتيجة الاختبار. اختيار مستوى معنوية أكبر يعني احتمالا أكبر لرفض الفرضية الصفرية وبالعكس، مستوى معنوية أقل يعني احتمالا أقل لرفضها. اختيار مستوى المعنوية يكون بحسب خطورة عدم رفض فرضية العدم إن كانت خاطئة. إذا كانت هناك شكوك بأن مادة منزلية تسبب مضاعفات خطيرة على صحة المستخدم فإن من المناسب أن يكون الاختبار متشددا باعتماد مستوى معنوية كبير ما يعني القبول بدليل إحصائي ضعيف. لاحظ أن مبدأ الاختبار هو الرغبة في الحصول على دليل إحصائي ينفي H_0 لكي نقبل H_1 و قوة الدليل تكون بمقدار بعد النتيجة عن القيمة الافتراضية.

التمرين 05:

$H_0: p = 0.9 \leftrightarrow H_1: p < 0.9$

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{p' - p_0}{\sigma_{p'}} < -z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{28}{35} = 0.805;\ \sigma_{p'} = \sqrt{\frac{0.9(0.1)}{35}} = 0.0507 \Rightarrow z_{cal} = \frac{0.805 - 0.9}{0.0507} = -1.972$$

$$\alpha = 0.1 \Rightarrow z_{tab} = -z_{1-\alpha} = -z_{1-0.1} = -z_{0.9} = -1.28$$

$$-1.972 < -1.28 \Rightarrow RH_0$$

ونستدل أن بيانات العينة تدل إحصائيا على أن قطع المورد لا تلبي المعيار المحدد.

التمرين 06:

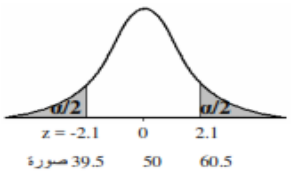
1) $P(RH_0/H_0) = P(X > 60 \text{ U } X < 40) = 1 - P(40 \le X \le 60).$

$Sous\ H_0 :\ p = 0.5. \qquad X \sim B(100, 0.5). \quad npq \ge 9 \Rightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq})$

$$P(40 \le X \le 60) = P\left(\frac{39.5 - 50}{5} \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{60.5 - 50}{5}\right) = P(-2.1 \le Z \le 2.1)$$

$$= F(2.1) - 1 + F(2.1) = 2F(2.1) - 1 = 0.964 \Rightarrow P(RH_0/H_0) = 1 - 0.964 = 0.036$$

2) $$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{x - 50}{5} \notin [-2.1\ ;\ 2.1] \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$



احتمال رفض الفرضية الصفرية بينما هي صحيحة ممثل بالمساحة

45 توجد داخل المجال لذلك يكون القرار بقبول الفرضية الصفرية، و كذلك القيمة 40.

3) $P(\overline{R}H_0/H_1) = P(\overline{R}H_0/p = 0.55) = P(40 \le X \le 60/p = 0.55).$

$X \sim B(100, 0.55). \quad npq \ge 9 \Rightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq})$

$$P(40 \le X \le 60/p = 0.55) = P\left(\frac{39.5 - 55}{4.9749} \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{60.5 - 55}{4.9749}\right)$$

$$= P(-3.1156 \le Z \le 1.1055) = 0.86$$

2) $P(\overline{R}H_0/H_1) = P(\overline{R}H_0/p = 0.60) = P(40 \le X \le 60/p = 0.60).$

$X \sim B(100, 0.60). \quad npq \ge 9 \Rightarrow X \approx N(np, \sqrt{npq})$

$$P(40 \le X \le 60/p = 0.60) = P\left(\frac{39.5 - 60}{4.89899} \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{60.5 - 60}{4.89899}\right)$$

$$= P(-4.18 \le Z \le 0.102) = 0.54$$

نلاحظ أن احتمال الخطأ تناقص وذلك لأن 0.6 أبعد (بالمقارنة مع 0.55) من القيمة المفترضة 0.5 ومن ثم يكون من المستبعد الخطأ بمقدار 0.10 في قيمة النسبة الحقيقية النظرية p للحصول على الصورة.

التمرين 07:

$$H_0 : \ \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$\mu_{m_1-m_2} = \mu_{m_1} - \mu_{m_2} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\text{sous } H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_{m_1-m_2} = 0$$

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } z_{cal} = \dfrac{(m_1 - m_2) - 0}{\sigma_{m_1-m_2}} > z_{1-\alpha} \\ \overline{R}H_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\sigma_{m_1-m_2} = \sqrt{\sigma^2{}_{m_1-m_2}} = \sqrt{\sigma^2{}_{m_1} + \sigma^2{}_{m_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cong \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{50} + \frac{7^2}{60}} = 1.45$$

$$z_{cal} = \frac{(m_1 - m_2)}{\sigma_{m_1-m_2}} = \frac{86-81}{1.45} = 3.448 \ ; \ z_{1-0.01} = z_{0.99} = 2.33$$

$$z_{cal} > z_{tab} \Rightarrow RH_0$$

ونستنتج أن بيانات الدراسة تؤيد فكرة أن تحسين ضروف العمل يزيد في إنتاجية العامل.

نحصل على نفس نتيجة الاختبار في حالة اعتماد اختبار ثنائي الاتجاه رغم أن مساحة الرفض من اليمين تتقلص إلـــى النصف:

$$z_{tab} = z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58 < z_{cal} = 3.448$$

لاحظ أننا استخدمنا S^2 تعويضا للتباين المجهول (في حالة العينة الكبيرة $S^2 \equiv \widehat{S}^2$ لذلك لا نميز بينهما).