الفصل الثالث : إختبار الفرضيات الاختبارات الاحصائية

1) تعريف : ان الفرضية هي ادعاء او تصريح حول معلمة مجتمع ما ، واختبار الفرضيات التي تعبر عن خصائص المجتمع تعد جانب أساسي من جوانب الاستدلال و التحليل الإحصائي

وتتم عملية اختبار الفرضيات باقامة فرضية ما عن خاصية المجتمع غير المعلومة ، ثم نأخذ عينة عشوائية من المجتمع ، وعلى اساس الخاصية المناظرة في العينة إما نقبل أو نرفض الفرضية بدرجة ثقة محددة .

وخلال هذه العملية يمكن ارتكاب نوعين من الأخطاء :

- الاول : يمكن ان نرفض على اساس معلومات عن العينة فرضية بينما تكون صحيحة في الواقع . وتسمى هذا النوع بـ α .

- الثاني : ان نقبل فرضية خاطئة وتسمى هذا النوع من الأخطاء بـ β

وتشمل عملية اختبار الفرضيات 4 مراحل هي :

- صياغة الفرضية الصفرية و الفرضية البديلة :

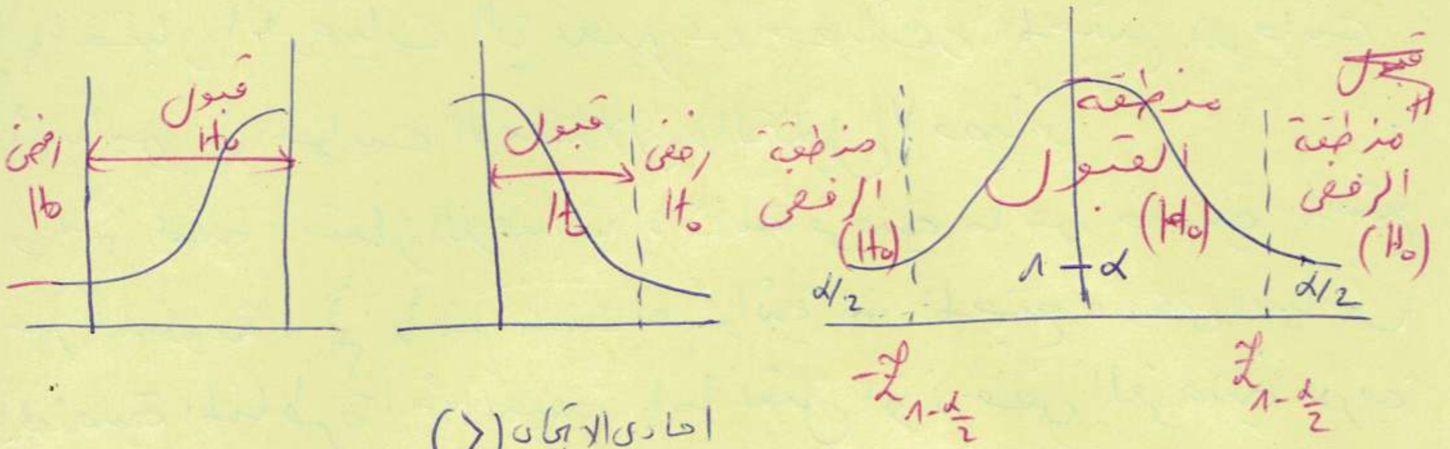
نقوم هنا بتحديد الفرضية المراد اختبارها وتسمى الفرضية ~~العدمية~~ الصفرية ويرمز لها بالرمز H_0
(أو ~~البديلة~~ فرضية العدم)

واذا لم تتحقق هذه الفرضية نستبدل بالفرضية البديلة ويرمز لها بالرمز H_1 .

تحديد الفرضيات الصفرية والبديلة :

$$\begin{cases} H_0 : \text{فرضية صفرية} \\ H_1 : \text{فرضية بديلة} \end{cases}$$

- تحديد قاعدة القرار: وهو عبارة عن الأساس (الاتجاه) الذي من خلاله يمكن اختبار الفرضيات (اختبار ثنائي الاتجاه أو اختبار أحادي الاتجاه).



احادي الاتجاه (<)

ثنائي الاتجاه

- حساب القيم الجدولية: وهنا نقوم بحساب القيم الحرجة من الجدول التوزيع الموافق (Z ، t ، X^2 ... الخ) عند مستوى معنوية معين.

مثلاً: عند مستوى معنوية 5% فإن القيمة الجدولية لـ Z هي 1,96.

- حساب القيمة الفعلية (المحسوبة): في هذه المرحلة نقوم بحساب قيم تعرف بالقيم الفعلية أو المحسوبة والتي نقوم بمقارنتها مع القيم الجدولية.

- القرار: هنا نقرر قبول أو رفض الفرضية الصفرية H_0 حسب قاعدة القرار وذلك بمقارنة القيمتين الجدولية والفعلية حيث اذا كانت القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية يكون القرار قبول الفرضية الصفرية H_0 والعكس.

مثال: امتثل رجل أمام قاضي فوجد هذا الأخير نفسه أمام 4 قرارات حيث أن هذا الرجل قد يكون بريئ H_0 أو مذنب H_1.

اذا اختار القاضي الفرضية H_0 فانه

H_0
- قد يرتكب خطأ (α)
  (يدين المتهم وهو بريء)
- قد يصيب $(1-\alpha)$
  يبرأ المتهم وهو بريء

واذا اختار الفرضية H_1 فانه:

H_1
- يرتكب خطأ β
  يبرأ المتهم وهو مذنب
- يصيب $1-\beta$
  يدين المتهم وهو مذنب

القرار / الفرضية	H_0	H_1
H_0 بريء	$1-\alpha$	α
H_1 متهم	β	$1-\beta$

٤) اختبارات متوسط المجتمع :

أ) استخدام S كمقدر لـ σ في اختبار المتوسط :

غالبا ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وبالتالي نستخدم الانحراف المعياري للعينة (S) عند حساب σ_m .

حيث نعوض الصيغة $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بالصيغة: $\sigma_m = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$ أو

$$\sigma_m = \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

وفي هذه الحالة نستخدم توزيع Student الا اذا كانت العينة كبيرة حيث نستخدم التوزيع الطبيعي .

مثال: أخذت عينة من 64 طالبا من احدى الجامعات فوجد أن متوسط الطول هو 155 سم فاذا كان الانحراف المعياري ($\hat{S}$) ~~للمجتمع~~ 5 سم اختبر بمستوى معنوية 5% صحة أن يكون متوسط الطول للمجتمع يساوي 160 سم ؟

الحل:

$n = 64 > 30$ ومنه نستخدم التوزيع الطبيعي .

- $$\begin{cases} H_0 : \mu = 160 \\ H_1 : \mu \neq 160 \end{cases}$$ ثنائية الاتجاه

- ايجاد القيمة الجدولية :

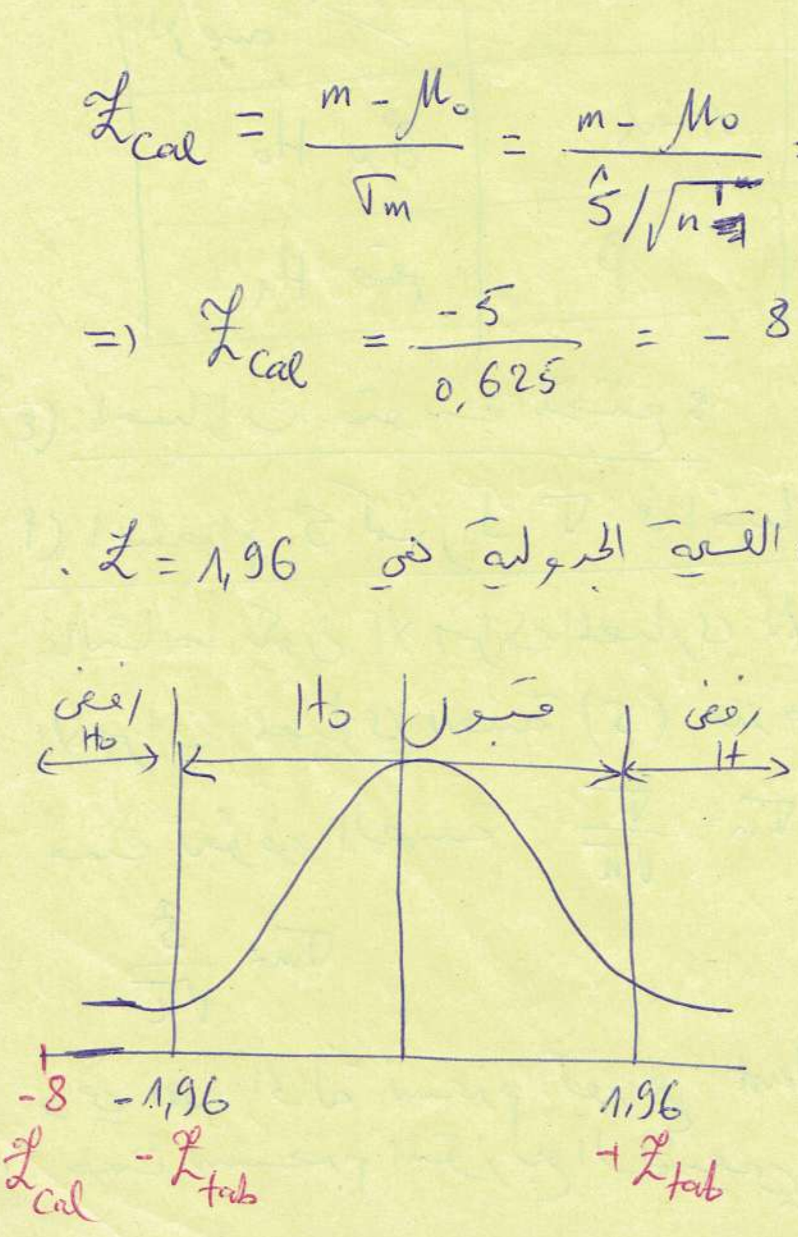
$$Z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} = \frac{m - \mu_0}{\hat{S}/\sqrt{n}} = \frac{155 - 160}{5/\sqrt{64}} = \frac{-5}{5/8}$$

$$\Rightarrow Z_{cal} = \frac{-5}{0,625} = -8 \qquad \boxed{Z_{cal} = -8}$$

- عند مستوى معنوية 5% فان القيمة الجدولية هي $Z = 1,96$.

و $-Z = -1,96$

ويتمثل ذلك بيانيا بـ .



نلاحظ أن القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية أو بطريقة أخرى فإن القيمة المحسوبة ~~تحل~~ تقع في منطقة الرفض ومنه نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 ونقول أن متوسط الطول في المجتمع لا يساوي 160 سم

ب) استخدام توزيع Student في اختبار المتوسط

في حالة ~~العدد~~ $n < 30$ و σ مجهول فإنه لا يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي في هذه الحالة نعتمد كل توزيع Student في اختبار المتوسط.

مثال: ادعى مسؤول أن الاستهلاك الشهري لمادة غذائية ~~أكثر~~ لا تزيد ~~عن~~ 16 كغ. لاختبار صحة هذا الادعاء أخذنا عشوائيا متوسط استهلاك 10 أسر فكانت كما يلي: 13 كغ، 10 كغ، 15 كغ، 18 كغ، 16 كغ، 19 كغ، 10 كغ، 8 كغ، 13 كغ، 13 كغ

اختبر صحة الادعاء عند مستوى معنوية 5% بانحراف معياري

$$\hat{S} = 3,6 .$$

الحل: $n = 10$ $(n < 30)$ نستخدم توزيع Student (t).

- صياغة الفرضية:

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq 16 \\ H_1 : \mu > 16 \end{array}\right.$$

- حساب القيمة الفعلية t_{cal}

$$t_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}$$

حساب m:

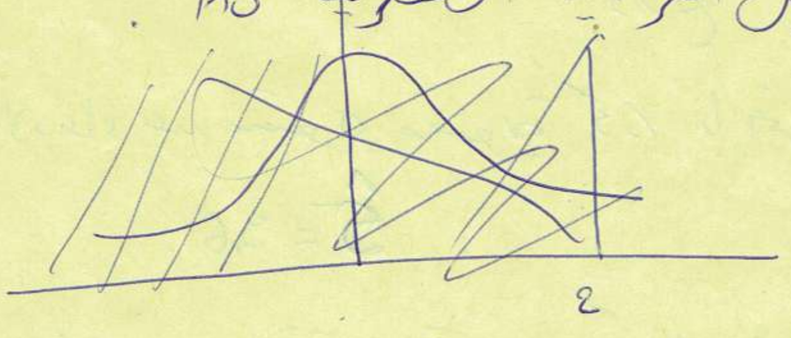
$$m = \frac{\sum x}{n} = \frac{13 + 10 + \dots + 13}{10} = 13,5 .$$

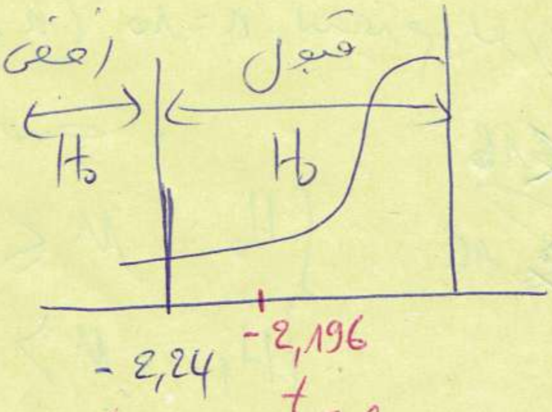
$$t_{cal} = \frac{m - \mu}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = \frac{13,5 - 16}{\frac{3,6}{\sqrt{10}}} = -2,196 .$$

من جدول توزيع Student فان القيمة الجدولية عند مستوى 5%
ودرجة حرية $(n-1 = 10-1 = 9)$ هي:

$$t_{0,05,9} = t_{tab} = 2,24 .$$

نلاحظ ان القيمة المحسوبة t_{cal} تقع في منطقة القبول
وبالتالي نقبل الفرضية الصفرية H_0.





اتجاه واحد

3) اختبار نسبة المجتمع:

نرمز للقيمة الافتراضية بـ: p_0 ونكتب الفرضية
$H_0: p = p_0$
$H_1: p \neq p_0$

مثال: ادعى باحث في قياس الرأي العام أن نسبة الذين يوافقون عن سياسة معينة تساوي 80%، فإذا اختار هذا الباحث عينة عشوائية من المعنيين بهذه السياسة حجمها $n = 1000$ ووجد أن 750 منهم يوافقون على هذه السياسة. اختبر بمستوى معنوية 5% صحة ادعاء الباحث.

الحل:

$$\begin{cases} H_0: p = 0{,}8 \\ H_1: p \neq 0{,}8 \end{cases}$$

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{750}{1000} = 0{,}75 = 75\%.$$

- حساب القيمة الإحصائية الفعلية:

$$Z_{cal} = \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0{,}75 - 0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8(0{,}2)}{1000}}} = -3{,}953$$

- حساب القيمة الجدولية: عند مستوى معنوية 5% فإن القيمة الجدولية تساوي 1,96

$$Z_{tab} = 1{,}96$$

- نقارن القيمتين ونلاحظ أن القيمة الجدولية تقع في منطقة الرفض وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية ونقول أن ادعاء الباحث غير صحيح وأن نسبة الذين يوافقون على السياسة لا يساوي 80%.

4) اختبار التباين :

اذا كان لمتغير X له توزيع طبيعي بتوقع μ وتباين σ^2 ولاختبار الفرضية بأن σ^2 تساوي σ_0^2 نعتمد على تباين العينة S ونستعمل الاحصائية $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ والتي تتبع توزيع مربع كاي χ^2

مثال 3: عينة تتكون من 10 مصابيح ، متوسط عمرها 4000 سا وانحرافها المعياري ($S = 20$سا) ، نفرض أن متوسط عمر هذه المصابيح يتبع القانون الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 150$ فهل هذا صحيح عند مستوى معنوية 1% ؟

الحل :

$$H_0 : \sigma^2 = (150)^2 = 22500$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 22500$$

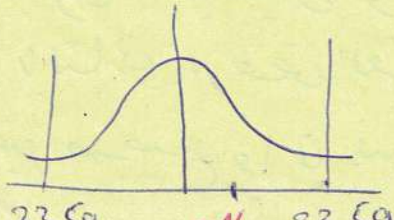
- حساب الاحصائية الفعلية :

$$\chi_{cal} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(10-1)(20)^2}{22500} = 0,16$$

- حساب القيمة الجدولية : من جدول توزيع χ^2 فان القيمة الجدولية عند مستوى 1% ودرجة حرية $(n-1=9)$ هي :

$$\chi_{tab} = 23,59$$

- نلاحظ أن القيمة الجدولية أكبر من القيمة المحسوبة (تقع داخل منطقة القبول) ومنه نقبل الفرضية الصفرية H_0 أي أن هذا صحيح .



$-23,59$ $0,16$ $23,59$