وزارة التعليـــم العـــالي والبحـــث العلمـــي
جامعـــة الجيلالي بونعامة خميـــس مليانـــة
كليــة العلوم الاقتصادية، التجاريــة وعلــوم التسيير
قسم العلــوم التجاريــة

سنـة ثانيـة شعبة العلوم التجاريـــة محاضــــرة مقياس: إحصـــاء 3

# محاضـــرة 2

# حول نظريــة

# توزيعــات المعاينــة

# *Sampling Distributions Theory*

## الفهــــرس

# محاضـــرة حول نظريــة توزيعــات المعاينــة

# نظريــة توزيعــات المعاينـــــة

# Sampling Distributions Theory

تهتم نظرية المعاينة بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى بالاستدلال الإحصائي، **statistical inference**، وهي علاقات تعتبر ذات أهمية أساسية في تقويم القيم التي تميز المجتمع أي مؤشرات المجتمع مثل المتوسط الحسابي والوسيط والتباين إلخ...، انطلاقا من مؤشرات العينة

نفرض أننا أخذنا عينه حجمها $n$ من مجتمع ما، ثم سحبنا منها بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسط الحسابي، التباين، ...إلخ، فإن كل مقياس من هذه المقاييس يعتبر متغير عشوائي في ذاته يختلف من عينه إلى أخرى، هذا المتغير العشوائي يخضع لتوزيع معين يسمى بتوزيع العينة.

فمثلاً نقول أن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي هو عبارة عن توزيع جميع المتوسطات الحسابية للعينات المأخوذة من نفس هذا المجتمع ذات الحجم $n$.

إن توزيع المعاينة للتباين كذلك هو توزيع جميع التباينات المحسوبة من عينات لها نفس الحجم $n$ ومأخوذة من نفس المجتمع، وهكذا....

## 1- توزيعــات المعاينــة للأوســاط: Sampling Distributions of Means

### 1-1- متوســط الوســط الحسـابي للعينــة $\mu_{\bar{X}}$ :

**نظريــة 1:**

إذا كانت $X$ متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من هذا المجتمع بالإرجاع أو بدون إرجاع فإن: $E\left(\bar{X}\right)=\mu_{\bar{X}}=\mu_X$

حيث: $$E\left(\bar{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_x=\frac{1}{n}n\mu_X=\mu_X$$

**ملاحظـة:**

إذا سحبنا جميع العينات من الحجم $n$ من مجتمع ما حجمه $N$ فإنه وبالضرورة سنجد أن متوسط المجتمع يكون مساويا لمتوسط متوسطات العينات المسحوبة منه بإرجاع أو بدون إرجاع.

إذا سحبنا عينة من مجتمع ما فإننا نتوقع أن يكون متوسط العينة مساوي لمتوسط المجتمع، لذلك يستخدم متوسط العينة لتقدير متوسط المجتمع إذا كان هذا الأخير مجهولا، ونكتب: $\hat{\mu}_X=\bar{X}$ ونقول إن الإحصائية $\bar{X}$ هي مقدرة لمعلمة متوسط المجتمع $\mu_x$.

### 2-1- تبايــن الوســط الحســابي للعينــة $\sigma_{\bar{X}}^2$

**نظريــة 2:**

إذا كانت $X$ متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما حجمه $N$ و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة حجمها $n$ مسحوبة من هذا المجتمع فإن

تباين $\bar{X}$ أي $\sigma_{\bar{X}}^2$ يكتب كما يلي:

في حالة السحب مع الإرجاع فإن: $$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

في حالة السحب بدون إرجاع فإن: $$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

**ملاحظــة:**

في حالة السحب مع الارجاع فإن $\sigma_{\bar{X}}^2$ يتأثر طرديا بتباين المجتمع وعكسيا بحجم العينة أي كلما كان حجم العينة كبيرا والمجتمع أكثر تجانسا كان التقدير أدق.

في حالة السحب بدون إرجاع فإن المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ والذي يسمى بمعامل الإرجاع يصبح مهملا إذا كان يقترب من الواحد أي إذا كان حجم العينة صغير جدا بالمقارنة مع حجم المجتمع

$$\left(\frac{n}{N} \prec 0.05\right) \Rightarrow \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \approx 1$$

تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma_{\bar{X}}^2$ في حالة المعاينة بدون إرجاع أقل منه في حالة السحب مع الإرجاع أي أنه المعاينة بدون إرجاع تعطي تقديرا أكثر دقة لمعلمة المجتمع $\mu_X$ أي:

$$n \succ 1 \Rightarrow \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \prec 1$$
$$\Rightarrow \left(\left(\frac{\sigma_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right) \leq \left(\frac{\sigma_X^2}{n}\right)\right)$$

## 1-3- طبيعــة توزيــع الوســط الحســابي للعينــة $\bar{X}$

### نظريــة 3:

إذا كان المجتمع موزع طبيعيا بمتوسط $\mu_x$ وتباين $\sigma_X^2$ فإن متوسط العينة المسحوبة من هذا المجتمع عشوائيا يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2$

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right) \Rightarrow Z = \left(\bar{X} - \mu_{\bar{X}} / \sigma_{\bar{X}}\right) \sim N(0,1)$$

هذا إذا كانت $\sigma_X^2$ معلومة، ولكن في حالة ما إذا كانت قيمة $\sigma_X^2$ غير معلومة فإننا نستخدم بدلا منها الانحراف المعياري للعينة $S_x^2$ ولكن في هذه الحالة يصبح المتغير $T$ يخضع لتوزيع يعرف بتوزيع $t$ ستيودنت بدرجات حريه $(n-1)$، حيث:

$$T = \left(\bar{X} - \mu_{\bar{X}} / S_x / \sqrt{n-1}\right) \sim t_{(1-(\alpha/2), n-1)}$$

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right) \quad and \quad \sigma_X^2 = ?$$

$$T = \left(\bar{X} - \mu_{\bar{X}} / S_x / \sqrt{n-1}\right) \sim t_{(1-(\alpha/2), n-1)}$$

حسب نظرية النهاية المركزية فإنه إذا كان المجتمع غير طبيعي أو مجهول التوزيع بمتوسط $\mu_x$ وتباين $\sigma_X^2$ فإن متوسط العينة المسحوبة من هذا المجتمع عشوائيا $\bar{X}$ لا تخضع للتوزيع الطبيعي ولكنها تتوزع توزيع يكون قريباً من التوزيع الطبيعي أي يؤول إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2$ إذا كان حجم العينة كبيرا $(30 \leq n)$

$$X \sim ?\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \quad and \quad (n \geq 30) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right)$$
$$\Rightarrow Z = \left(\bar{X} - \mu_{\bar{X}} / \sigma_{\bar{X}}\right) \sim N(0,1)$$

**ملاحظــة:**

وتعتبر النتيجة السابقة هامة جداً في الإحصاء وخاصة في التطبيقات العلمية وتسمى نظرية النهاية المركزية *Central Limit Theorem*

في حالة السحب مع الإرجاع فإن: $$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

في حالة السحب بدون إرجاع فإن: $$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

في حالة السحب بدون إرجاع و $\left(\frac{n}{N} \prec 0.05\right)$ فإن: $$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

## 2- توزيعـــات المعاينــة لتبايـــن العينـــات: Sampling Distributions of Variance

### 2-1- متوســط تباينـــات العينـــات $E\left(S_{\bar{X}}^{2}\right)$:

**نظريــة 4:**

إذا كانت $X$ متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما حجمه $N$ و $S^{2}$ متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة حجمها $n$ مسحوبة من هذا المجتمع فإن

القيمة المتوقعة لتباين العينة $E\left(S^{2}\right)$ تكتب كما يلي:

في حالة السحب مع الإرجاع فإن: $$E\left(S^{2}\right)=\sigma_{X}^{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

في حالة السحب بدون إرجاع فإن: $$E\left(S^{2}\right)=\sigma_{X}^{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

### 2-2- تبايـــن تباينـــات العينـــات $V\left(S_{\bar{X}}^{2}\right)$

**نظريــة 5:**

إذا كانت $X$ متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما حجمه $N$ و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة حجمها $n$ مسحوبة من هذا المجتمع فإن

تباين $S_{\bar{X}}^{2}$ أي $V\left(S_{\bar{X}}^{2}\right)$ يكتب كما يلي:

تباين $\hat{S}^{2}$ هو كالتالي: $$V\left(\hat{S}^{2}\right)=\frac{\mu_{4}}{n}+\frac{3-n}{n(n-1)}\sigma^{4}$$

حيث: $$\mu_{4}=E\left(\left[(X-\mu)^{4}\right]\right)$$

### 2-3- طبيعـــة توزيـــع المعاينـــة للتبايـــن $S_{\bar{X}}^{2}$: Sampling Distribution of The Variance

**نظريــة 6:**

إذا كانت $x_{n}$ .....$x_{1},x_{2}$ تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي $N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$، وكان $S_{x}^{2}$ تباين هذه العينة وكانت $\sigma_{X}^{2}$ معلومة فإن:

$\dfrac{n.S_{X}^{2}}{\sigma_{X}^{2}}$ يتبع توزيع كاي تربيع درجة حريته $(n-1)$ .

### 4-2- توزيـع النسبـة بيـن تبايـني عينتيـن: Distribution of $\frac{S_1^2}{S_2^2}$

**نظريـــة 7:**

إذا كانت $S_x^2$ تباين عينة عشوائية $x_1, x_2 \ldots\ldots \quad x_{n1}$ تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي $N\left(\mu_1, \sigma^2{}_1\right)$، وكانت $S_y^2$ تباين عينة عشوائية $y_1, y_2 \ldots\ldots \quad y_{n2}$ تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي $N\left(\mu_2, \sigma^2{}_2\right)$، وكانت هاتين العينتين مستقلتين عن بعضهما البعض، فإن:

$$F = \frac{\left[S_x^2 \frac{n_1}{n_1 - 1}\right] \frac{1}{\sigma_X^2}}{\left[S_y^2 \frac{n_2}{n_2 - 1}\right] \frac{1}{\sigma_Y^2}} = \frac{\frac{\hat{S}_x^2}{\sigma_X^2}}{\frac{\hat{S}_y^2}{\sigma_Y^2}} \sim F_{(n_1 - 1, n_2 - 1)}$$

يتبع توزيع فيشر درجة حريته $\left[(n_1 - 1).(n_2 - 1)\right]$.

## 3- توزيعـــات المعاينـــة للفـــروق والمجاميع

### 1-3- توزيعـــات المعاينـــة للفـــروق والمجاميـع للمتوسـط:

**نظريـــة 8:**

ليكن لدينا مجتمعان $X$ و $Y$، متوسطهما الحسابي $\mu_X$ و $\mu_Y$، تباينهما $\sigma_X^2$ و $\sigma_Y^2$، نسحب من كل مجتمع عينة عشوائية بحيث نسحب عينة عشوائية $x$ حجمها $n_1$ من المجتمع $X$ و عينة ثانية $y$ حجمها $n_2$ من المجتمع $Y$ والعينتان مستقلتان فإن:

$$\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y \quad \text{و} \quad \mu_{x-y} = \mu_x - \mu_y$$

### 2-3- توزيعـــات المعاينـــة للفـــروق والمجاميع للتبايـــن:

**نظريـــة 9:**

ليكن لدينا مجتمعان $X$ و $Y$، متوسطهما الحسابي $\mu_X$ و $\mu_Y$، تباينهما $\sigma_X^2$ و $\sigma_Y^2$، نسحب من كل مجتمع عينة عشوائية بحيث نسحب عينة عشوائية $x$ حجمها $n_1$ من المجتمع $X$ و عينة ثانية $y$ حجمها $n_2$ من المجتمع $Y$ والعينتان مستقلتان فإن:

$$\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad \text{و} \quad \sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

### 3-3- توزيـع الفـرق بين وسطيـن

#### أ– توزيـع المجتمـعيـن طبيعـي

**نظريـة 10:**

إذا كانت $x_1, x_2 \ldots\ldots \quad x_{n1}$ تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي $N\left(\mu_1, \sigma^2{}_1\right)$، وكانت $y_1, y_2 \ldots\ldots \quad y_{n2}$ تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي $N\left(\mu_2, \sigma^2{}_2\right)$، وكانت هاتين العينتين مستقلتين عن بعضهما البعض، نرمز لوسط العينة الأولى ب $\bar{x}$ و لوسط العينة الثانية ب $\bar{y}$ فإن المتغير $\bar{x} - \bar{y}$ يخضع لتوزيع طبيعي وسطه $\mu_X - \mu_Y$ :و تباينه $\left(\sigma_1^2/n_1\right)+\left(\sigma_2^2/n_2\right)$ أي أن:

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\left(\sigma_1^2/n_1\right)+\left(\sigma_2^2/n_2\right)}} \sim N\ (0;1)$$

#### ب– توزيـع المجتمـعيـن غير طبيعـي

**نظريـة 11:**

إذا كانت $x_1, x_2 \ldots\ldots \quad x_{n1}$ تمثل قياسات عينة عشوائية وسطها هو $\bar{x}$ مسحوبة من مجتمع وسطه $\mu_1$ وتباينه $\sigma^2{}_1$، وكانت $y_1, y_2 \ldots\ldots \quad y_{n2}$ تمثل قياسات عينة عشوائية حجمها $n_2$ وسطها هو $\bar{y}$ مسحوبة من مجتمع وسطه $\mu_2$ وتباينه $\sigma_2^2$، وكانت هاتين العينتين مستقلتين عن بعضهما البعض وكان حجم العينتين كبير $\left(30 \leq n_1, n_2\right)$ فإن:

$\sigma_1^2$، $\sigma_2^2$ معلومتين

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\left(\sigma_1^2/n_1\right)+\left(\sigma_2^2/n_2\right)}} \sim N\ (0;1)$$

$\sigma_2^2 = \sigma_1^2$ مجهولتين

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_X-\mu_Y)}{S\sqrt{\left(1/n_1\right)+\left(1/n_2\right)}} \sim t_{(1-(\alpha/2), n_1+n_2-2)}$$

حيث التباين المجمع للعينتين معا $S^2$ يسمى بالتباين المشترك للعينتين ***The Pooled Variance*** معرف بالعلاقة:

$$S^2 = \frac{n_1 S_1{}^2 + n_2 S_2{}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

**ملاحظـــة**

إذا كان أحد المجتمعين أوكليهما لا يتوزع توزيعاً طبيعياً فإن $\left(\overline{x}-\overline{y}\right)$ لا يتوزع توزيعاً طبيعياً كذلك، ولكن لقيم $\left(30 \leq n_1, n_2\right)$ الكبيرة فإنه طبقاً لنظرية النهاية المركزية السابقة فإن $\left(\overline{x}-\overline{y}\right)$ يتوزع توزيعاً قريباً من التوزيع الطبيعي وبذلك يمكننا استخدام نفس العلاقة في حالة العينات الكبيرة.

## 4- توزيعـــات المعاينـــة للنسبـــة وللفـــرق بيـــن نسبتيـــن

### 4-1- توزيع المعاينـــة للنسبـــة

عند دراسة مجتمع إحصائي يتكون من وحدات إحصائية تحمل صفة معينة ما $a$ ووحدات إحصائية لا تحمل هذه الصفة $\cancel{a}$ ومجموعهما يمثل المجتمع أي $N = N_a + N_{\cancel{a}}$

نرمز ب $P$ للنسبة في المجتمع التي تحمل صفة معينة ما $a$ حيث: $P = N_a / N$

نرمز ب $q$ للنسبة في المجتمع التي لا تحمل هذه الصفة حيث: $q = N_{\cancel{a}} / N = \left(N - N_a\right)/N$

$$p + q = 1 \qquad \text{أي} \qquad \frac{N_a}{N} + \frac{N_{\cancel{a}}}{N} = \frac{N_a + N_{\cancel{a}}}{N} = 1$$

عند سحب عينة عشوائية مؤلفة من $n$ وحدة من هذا المجتمع فنلاحظ أن عدد الوحدات الإحصائية التي تحمل الصفة $a$ هي $n_a$

نرمز ب $P'$ للنسبة في العينة التي تحمل صفة معينة ما $a$ حيث: $P' = n_a / n$

نرمز ب $q'$ للنسبة في العينة التي لا تحمل هذه الصفة حيث: $q = n_{\cancel{a}} / n = \left(n - n_a\right)/n$

$$p' + q' = 1 \qquad \text{أي} \qquad \frac{n_a}{n} + \frac{n_{\cancel{a}}}{n} = \frac{n_a + n_{\cancel{a}}}{n} = 1$$

إن النسبة $P'$ في العينة قد تختلف عن النسبة $P$ في المجتمع

نعلم أنه وفي حالة العينات الكبيرة يمكن تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي، فإذا كان المتغير العشوائي هو $P'$ و كانت العينة كبيرة و حجمها $n$ فإن:

$$E\left(X\right) = \mu_X = n.p \quad \text{ومنه} \quad E\left(\frac{n_a}{n}\right) = E\left(P'\right) = \frac{1}{n} E\left(n_a\right) = \frac{1}{n} .n.p = p$$

$$\text{كذلك} \quad V\left(X\right) = n.p.q \quad \text{ومنه} \quad V\left(\frac{n_a}{n}\right) = V\left(P'\right) = \frac{1}{n^2} V\left(n_a\right) = \frac{1}{n^2} .n.p.q = \frac{p.q}{n}$$

و إذا كانت $n$ كبيرة ووفقا لنظرية النهاية المركزية فإن التوزيع التقريبي ل $P'$ هو:

$$n_a \sim N\left(nP, nPq\right) \Rightarrow Z = \frac{\left(n_a - nP\right)}{\sqrt{nPq}} \sim N\left(0,1\right)$$

$$\frac{n_a}{n} \sim N\left(P, \frac{Pq}{n}\right) \Rightarrow Z = \frac{\left(n_a/n - P\right)}{\sqrt{Pq/n}} \sim N\left(0,1\right)$$

$$P' \sim N\left(P, \frac{Pq}{n}\right) \Rightarrow Z = \frac{\left(P' - P\right)}{\sqrt{Pq/n}} \sim N\left(0,1\right)$$

**نظريــة 12:**

لتكن $X_1, X_2 \ldots\ldots X_N$ تمثل قياسات مجتمع ما موزع طبيعيا حيث $P$ نسبة المفردات في المجتمع ذات صفة معينة، ولتكن $P'$ متغيرة عشوائية تمثل نسبة المفردات ذات الصفة المذكورة في العينة المسحوبة من ذات المجتمع و كانت $n$ كبيرة ، فإننا نحصل على توزيع للإحصائية $P'$

حيث:

$$E\left(P'\right) = \mu_{P'} = P$$

$$V\left(P'\right) = \sigma^2_{P'} = \frac{P\left(1-P\right)}{n} = \frac{Pq}{n}$$

فإن:

$$P' \sim N\left(P, \frac{Pq}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\left(P' - E\left(P'\right)\right)}{\sqrt{V\left(P'\right)}} \sim N\left(0,1\right) \Rightarrow Z = \frac{\left(P' - P\right)}{\sqrt{Pq/n}} \sim N\left(0,1\right)$$

## 4-2- توزيع المعاينـــة للفـرق بيــن نسبتيــن

**نظريــة 13:**

إذا أخذنا عينتان مستقلتان حجماها $n_1, n_2$ من مجتمعين الأول يتبع توزيع ذي الحدين $b\left(1, P_1\right)$، والثاني يتبع توزيع ذات الحدين $b\left(1, P_2\right)$ ، وكانت $n_1, n_2$ كبيرتين، فإن الفرق بين النسبتين من العينتين يخضع تقريبا لتوزيع طبيعي

وسطه : $E\left(P_1' - P_2'\right) = \mu_{P_1' - P_2'} = P_1 - P_2$

وتباينه :

$$V\left(P_1'-P_2'\right)=\sigma^2_{(P_1'-P_2')}=\frac{P_1\left(1-P_1\right)}{n_1}+\frac{P_2\left(1-P_2\right)}{n_2}=\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}$$

فإن:

$$P_1'-P_2' \sim N\left(P_1-P_2\ ,\ \frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}\right)$$

$$Z=\frac{\left(P_1'-P_2'-E\left(P_1'-P_2'\right)\right)}{\sqrt{V\left(P_1'-P_2'\right)}}\sim N(0,1)$$

$$Z=\frac{\left(\left(P_1'-P_2'\right)-\left(P_1-P_2\right)\right)}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}=\frac{\left(\left(P_1'-P_2'\right)-\left(P_1-P_2\right)\right)}{\sqrt{\left(P_1\left(1-P_1\right)/n_1\right)+\left(P_2\left(1-P_2\right)/n_2\right)}}\sim N(0,1)$$