مقاييس الشكل:

مقدمة: تطرقنا في الفصول السابقة الى مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت من أجل رؤية أو ضبح للبيانات، والظواهر المدروسة و نصادف في بعض الأحيان عند مقارنة ظاهرتين تساويتين من المتوسطين والانحرافين المعياريين الى أن شكل الظاهرتين مختلف من حيث التواء (درجة التناظر) والتفرطح (ذيل مدبب أو متفرطح) لذا كان من الضروري التطرق الى مقاييس الشكل والتي تعتمد أساسا على العزوم.

العزوم Les moments

هذا المفهوم أصله فيزيائي وتنقسم الى عزوم مركزية وعزوم لامركزية.

① العزم البسيط: يرمز له بالرمز m_k والعزم البسيط من الدرجة k.

في حالة بيانات غير مبوبة $m_k = \frac{\sum x_i^k}{n}$

في حالة بيانات مبوبة $m_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}$

وعلى هذا الأساس

من أجل $k=0$:

$$m_0 = \frac{\sum n_i x_i^0}{n} = \frac{\sum n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Scanné avec CamScanner

من أجل $K=1$

$$m_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}$$

$$m_1 = \bar{x}$$

من أجل $K=2$

$$m_2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}$$

يمكن استنتاج علاقة التباين:

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \bar{x}$$

$$= m_2^2 - m_1^2$$

② العزم المركزي: يعتبر العزم المركزي من العزوم المركبة (لن نتطرق في هذا المثال ونكتفي بالعزوم المركزية فقط) ويرمز له بـ U_K ويعرف العزم المركزي من الدرجة k بـ:

في حالة بيانات غير مبوبة

$$U_k = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^k}{n}$$

في حالة بيانات مبوبة:

$$U_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^k}{n}$$

في حالة $K=0$

$$U_0 = 1$$

في حالة $K=1$

$$U_1 = 0$$

في حالة $K=2$

$$U_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \sigma^2$$

Scanné avec CamScanner

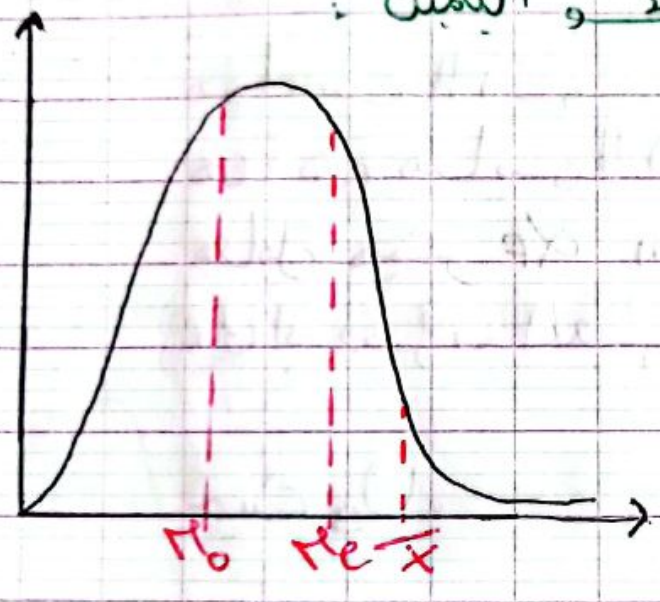
سنستغل فكرة العزوم المعرفة لشكل التوزيع.

أشكال التوزيعات التكرارية:

1. الالتواء: هو درجة عدم التماثل أو درجة الانحراف عن التماثل، فيمكن أن يكون التوزيع ملتوي نحو اليسار أو ملتوي نحو جهة اليمين موجب الالتواء (اليمين) وسالب الالتواء (اليسار) أو متماثل الالتواء معدوم.

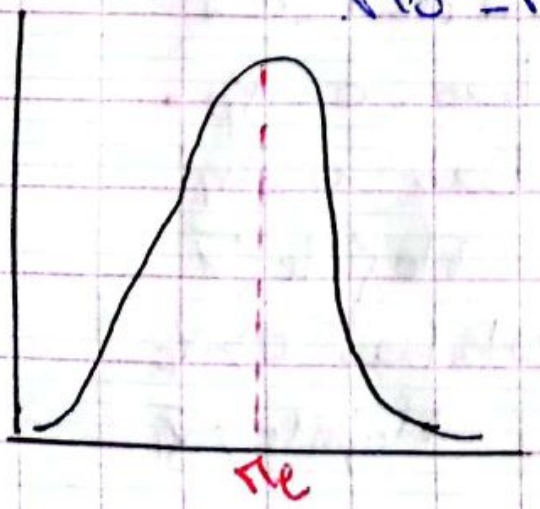
أ. توزيع ملتوي نحو اليمين:

$M_o < M_e < \bar{x}$



ب. توزيع متماثل:

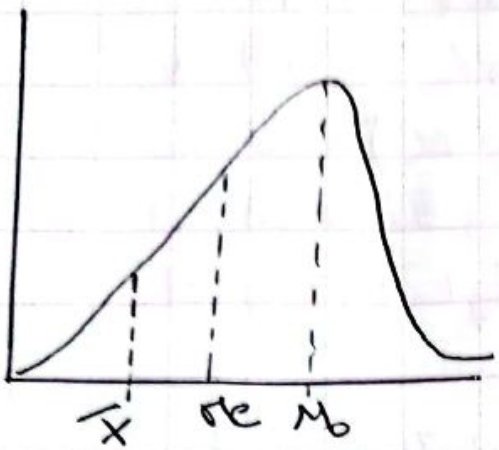
$M_o = M_e = \bar{x}$



Scanné avec CamScanner

③ توزيع ملتوي نحو اليسار

$M_o < M_e < \bar{x}$



مقاييس التواء:

من أهم مقاييس التواء

معامل فيشر α_F يعتمد على العزم من الدرجة 3 مقسوم على إنحراف المعياري من الدرجة نفسها أي قوة 3.

$$\alpha_F = \frac{U_3}{\sigma^3}$$

حيث U_3:

$$U_3 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^3}{n}$$

و σ تمثل انحراف المعياري.

بناء على قيمة هذا المعامل:

- $\alpha_F = 0$: معناه التوزيع متماثل $M_o = M_e = \bar{x}$
- $\alpha_F > 0$: معناه التوزيع ملتوي نحو اليمين (موجب التواء) $M_o < M_e < \bar{x}$
- $\alpha_F < 0$ معناه التوزيع ملتوي نحو اليسار (سالب التواء) $\bar{x} < M_e < M_o$

Scanné avec CamScanner

2. معامل بيرسون P:

$$P = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x}$$

3. معامل Kendall و Yule: يسمح بتحديد التواء التوزيع في حالة البيانات المفتوحة

$$C_{yk} = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)}$$

هذا المعامل أيضا يأخذ 3 حالات.

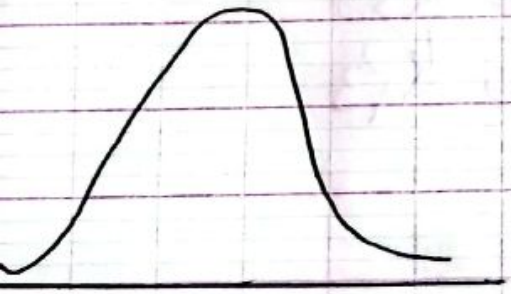
$C_{yk}=0$: متماثل

$C_{yk}>0$ ملتوي نحو اليمين

$C_{yk}<0$ ملتوي نحو اليسار.

التفرطح:

هو مدى العلو أو الإنخفاض عن منحنى التوزيع الطبيعي



توزيع مدبب

توزيع طبيعي.

توزيع متفرطح.

Scanné avec CamScanner

فإذا كانت قيمة مدببة نقول عنه توزيع مدبب أو متطاول
وإذا كانت القمة منخفضة نقول عنه توزيع متفرطح
لقياس مدى التفرطح نلجأ الى مقاييس أهمها:

4- معامل فيشر β_2 (Kurtosis)

حيث معدل العزم المركزي من الدرجة 4 مقسوما على
الانحراف المعياري مرفوع قوة 4.

$$\beta_2 = k = \frac{M_4}{\sigma^4}$$

حيث

$$M_4 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^4}{n}$$

و σ^4 هو الانحراف المعياري.

التفسير:

في حالة $k = 3$ التوزيع طبيعي.

$k > 3$ التوزيع متطاول (قمة مدببة).

$k < 3$ توزيع متفرطح (قمة منبسطة).

Scanné avec CamScanner

التمرين 1: ليكن لدينا البيانات التالية:
30 - 27 - 19 - 20 - 29 - 35 - 33 - 29 - 23 - 25

1. أحسب المتوسط الحسابي.
2. أحسب التباين والانحراف المعياري.
3. أعط درجة تماثل هذه البيانات.
4. أعط درجة تفرطح هذه البيانات.
5. استنادا إلى درجة التواء و التفرطح، هل يقترب التوزيع إلى التوزيع الطبيعي.

الحل:

1. المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{270}{10} = 27$$

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^3$	$(x_i - \overline{x})^4$
30	3	9	27	81
27	0	0	0	0
19	-8	64	-512	4096
20	-7	49	-343	2401
29	2	4	8	16
35	8	64	512	4096
33	6	36	216	1296
29	2	4	8	16
23	-4	16	-64	256
25	-2	4	-8	16
270	0	250	-156	12274

Scanné avec CamScanner

حساب التباين

$$V(x) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{250}{27} \approx 25$$

$$V^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$$

لقياس درجة التماثل نستعين بمعامل فيشر أو بيرسون للالتواء نأخذ فيشر

$$\alpha_F = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

$$M_3 = \frac{\sum n (x_i - \bar{x})^3}{n}$$

$$= \sum f_i (x - \bar{x})^3$$

$$= \frac{-156}{10} = -15,6$$

إذن $\alpha_F = \frac{M_3}{\sigma^3}$

$$= \frac{-15,6}{5^3} = -0,1248$$

هذا المنحنى ملتوي نحو اليسار $\alpha_F \neq 0$ جابة كافية إلى هذا الحد ولكن يمكن إضافة وحساب معامل بيرسون

$$P = \frac{\bar{X} - M_0}{\sigma x} \qquad M_0 = 29$$

Scanné avec CamScanner

$P_2 = \frac{2}{5} = .94$ ، $P = \frac{27 \cdot 29}{5}$

$P > 0$ ملتوي نحو اليسار.

قياس درجة التفرطح:

حساب K معامل فيشر Kurtosis

$$K = \frac{M_4}{\sigma^4} =$$

$$M_4 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^4}{n}$$

$$= \frac{12274}{10} = 1227,4.$$

اذن معامل التفرطح K:

$$K = \frac{12274}{625} = 1,96.$$

نلاحظ $K < 3$ وبالتالي التوزيع مسطح (متفرطح) نعلم أن التوزيع الطبيعي درجة التواء $A_s = 0$ درجة التفرطح $K = 3$ وبالتالي نستنتج أن التوزيع مختلف نوعا ما عن التوزيع الطبيعي حيث أنه غير متماثل ومسطح مقارنة بالتوزيع الطبيعي.

Scanné avec CamScanner

التمرين 02:

أوجد معامل الالتواء و معامل فيشر للتفرطح للسلسلة الثنائية:

x_i	n_i	$n_i x_i$	$(x_i - \bar{x})$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^3$
7	10	70	-6	360	-2160
10	12	120	-3	108	-324
13	14	182	0	0	0
16	8	128	3	72	216
19	6	114	6	216	1296
22	4	88	9	324	2916
Σ	54	702		1080	1944

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{702}{54} = 13$$

حساب التباين:

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1080}{54} = 20$$

$$\sigma = 4.47$$

معامل الالتواء:

$$A/F = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

$$M_3 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^3}{n} = 36$$

Scanné avec CamScanner

$$\alpha_F = \frac{36}{(4.4)^3}$$

$\alpha > 0$ ملتوى في البعيد

حساب معامل K التدرج:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

Scanné avec CamScanner