إن البرامج التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية يطلق عليها النماذج الأولية، حيث لكل نموذج أولي نموذج مقابل أو ثنائي مصاحب له يمثل جانب آخر للمسألة.

يتم اللجوء إلى النموذج المقابل أو الثنائي عندما يصعب حل النموذج الأولي و الحل الأمثل لكليهما واحد .

❖ **خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل :**

1. **إذا كان البرنامج الأولي مكتوب في شكله القانوني** :(أي في حالة الدالة من نوع $\boldsymbol{Max\ Z}$ كل القيود أقل أو تساوي الصفر، في حالة الدالة من نوع $\boldsymbol{Min\ Z}$ كل القيود أكبر أو تساوي الصفر) : نتبع الخطوات التالية:

- نعكس صيغة دالة الهدف، إذا كانت في النموذج الأولي من نوع $\boldsymbol{Max\ Z}$ تصبح $\boldsymbol{Min\ Z}$ في النموذج الثنائي

و العكس إذا كانت في النموذج الأولي من نوع $\boldsymbol{Min\ Z}$ تصبح $\boldsymbol{Max\ Z}$ في النموذج الثنائي.

- تعكس المتراجحات ، بحيث المتراجحات من نوع أقل أو تساوي الصفر($\leq$) في حالة $\boldsymbol{Max\ Z}$ تصبح متراجحات من نوع أكبر أو تساوي الصفر ($\geq$)في حالة $\boldsymbol{Min\ Z}$ ، و العكس صحيح
- إذا كانت المتغيرات في البرنامج الأولي هي $\boldsymbol{x_j}$ فإن متغيرات البرنامج الثنائي هي $\boldsymbol{y_i}$
- عدد المتغيرات في البرنامج الأولي يساوي عدد القيود البرنامج الثنائي و عدد القيود في البرنامج الأولي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي فمثلا : إذا كان عدد المتغيرات في النموذج الأولي= n و عدد القيود = m، فإن عدد المتغيرات في النموذج الثنائي تصبح =m و عدد القيود = n
- معاملات دالة الهدف (cj) في البرنامج الأولي تصبح ثوابت للقيو ($\boldsymbol{b_i}$) في البرنامج الثنائي بنفس الترتيب
- عمود الثوابت ($\boldsymbol{b_i}$) في البرنامج الأولي يصبح معاملات دالة الهدف (cj) في البرنامج الثنائي بنفس الترتيب.
- تحويل معاملات المتغيرات في قيود البرنامج الأولي بحيث تصبح الأسطر أعمدة و الأعمدة أسطر .

(لأن البرنامج الأولي مكتوب في شكل ($\boldsymbol{x_j \geq 0, y_j \geq 0}$) :توفر شرط عدم السالبية في كلا البرنامجين أي قانوني). **مثال توضيحي: إليك البرنامج الأولي التالي أكتب البرنامج الثنائي له:**

$$Max\ Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$S/C\begin{cases} 20\,x_1 + 30x_3 \ \leq\ 400 \\ 12\,x_1 + 10x_2 \ \leq\ 200 \\ 5\ \ x_1 + 15x_2 \ \leq\ 150 \\ x_1\ \geq 0\,,\ \ x_2\ \geq 0 \end{cases}$$

كتابة البرنامج الثنائي :

$$Min\ W = 400y_1 + 200y_2 + 150y_3$$
$$S/C \begin{cases} 20y_1 + 12y_2 + 5y_3 \ \geq \ 40 \\ 30y_1 + 10y_2 + 15y_3 \ \geq \ 50 \\ \\ y_1 \ \geq 0\,,\ \ y_2 \ \geq 0 \ \ \ y_3 \ \geq 0 \end{cases}$$

- نلاحظ أن عدد القيود في البرنامج الأولي(3) يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي(3) و عدد المتغيرات في البرنامج الأولي (2) يساوي عدد القيود في البرنامج الثنائي (2).

2. **إذا كان البرنامج الأولي مكتوب في شكل مختلط** أي يحوي إشارات مختلفة :

- ❖ إذا كانت الدالة من نوع تعظيم $\boldsymbol{Max\ Z}$ و تضمنت قيد من نوع أكبر أو تساوي($\geq$) يتم تحويله إلى قيد من نوع أقل أو تساوي($\leq$) و ذلك بضرب القيد في (-1) .
- ❖ أما إذا كانت الدالة من نوع تعظيم $\boldsymbol{Max\ Z}$ و تضمنت قيد من نوع مساواة (=) يتم تحويله إلى قيدين واحد من نوع أقل أو تساوي($\leq$) و الثاني من نوع أكبر أو تساوي ($\geq$) فيتم ترك القيد الأول على حاله أما الثاني فيتم تحويله إلى قيد من نوع أقل أو تساوي و ذلك بضرب القيد في (-1) .
- ❖ العكس في حالة الدالة من نوع تدنئة $\boldsymbol{Min\ Z}$ فإذا تضمنت قيد من نوع أقل أو تساوي ($\leq$) يتم تحويله إلى قيد من نوع أكبر أو تساوي ($\geq$) و ذلك بضرب القيد في (-1) .
- ❖ أما إذا كانت الدالة من نوع تدنئة $\boldsymbol{Min\ Z}$ و تضمنت قيد من نوع مساواة (=) يتم تحويله إلى قيدين واحد من نوع أقل أو تساوي ($\leq$) و الثاني من نوع أكبر أو تساوي ($\geq$) فيتم ترك القيد الثاني على حاله أما القيد الأول فيتم تحويله إلى قيد من نوع أكبر أو تساوي و ذلك بضرب القيد في (-1) .

أمثلة توضيحية :

مثال 1: إليك البرنامج الأولي التالي أكتب البرنامج الثنائي له

$$Max\ Z = 30x_1 + 40x_2$$
$$S/C \begin{cases} 2\,x_1 + 3x_2 \ \leq \ 20 \\ x_1 + 3x_2 \ \geq 15 \\ \\ x_1 \ \geq 0\,,\ \ x_2 \ \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة من نوع تعظيم $Max\ Z$ و تضمنت قيد من نوع أكبر أو تساوي في القيد الثاني يتم تحويله إلى قيد من نوع أقل أو تساوي و ذلك بضربه في (-1) فيصبح البرنامج كالآتي :

$$Max\ Z = 30x_1 + 40x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2\,x_1 + 3x_2 \ \le\ 20 \\ -x_1 - 3x_2 \ \le -15 \\ \\ x_1 \ \ge 0\,,\ \ x_2 \ \ge 0 \end{cases}$$

و بالتالي يكون البرنامج المرافق له على الشكل :

$$Min\ W = 20y_1 - 15y_2$$

$$S/C\begin{cases} 2y_1 - y_2 \ \ge\ 30 \\ 3y_1 - 3y_2 \ \ge\ 40 \\ \\ y_1 \ \ge 0\,,\ \ y_2 \ \ge 0 \end{cases}$$

مثال 2: إليك البرنامج الأولي التالي أكتب البرنامج الثنائي له

$$Max\ Z = 10x_1 + 8x_2 + 24x_3$$

$$S/C\begin{cases} 4\,x_1 + 6x_2 \ + 2x_3 = 12 \\ 2\,x_1 + 3x_2 \ + 4x_3 \le 20 \\ \\ x_1 \ \ge 0\,,\ \ x_2 \ \ge 0\,,\ x_3 \ \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة من نوع تعظيم $Max\ Z$ و تضمنت قيد من نوع مساواة في القيد الأول و الذي يتم تحويله إلى قيدين الأول من نوع أقل أو تساوي والثاني من نوع أكبر أو تساوي ولجعل كل القيود من نوع أقل أو تساوي نقوم بضرب القيد الثاني الذي يحوي متراجحة أكبر في (-1) فيصبح البرنامج كالآتي :

$$Max\ Z = 10x_1 + 8x_2 + 24x_3$$

$$S/C\begin{cases} 4\,x_1 + 6x_2 \ + 2x_3 \le 12 \\ -4\,x_1 - 6x_2 \ - 2x_3 \le -12 \\ 2\,x_1 + 3x_2 \ + 4x_3 \le 20 \\ \\ x_1 \ \ge 0\,,\ \ x_2 \ \ge 0\,,\ x_3 \ \ge 0 \end{cases}$$

و بالتالي يكون البرنامج المرافق له على الشكل :

$$Min\ W = 12y_1 - 12y_2 + 20y_3$$
$$S/C\begin{cases} 4y_1 - 4y_2 + 2y_3 \geq 10 \\ 6y_1 - 6y_2 + 3y_3 \geq 8 \\ 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \geq 24 \\ y_1 \geq 0\,,\ y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

و يمكن إعادة كتابة البرنامج الثنائي بالصيغة التالية :

$$Min\ W = 12(y_1 - y_2) + 20y_3$$
$$S/C\begin{cases} 4(y_1 - y_2) + 2y_3 \geq 10 \\ 6(y_1 - y_2) + 3y_3 \geq 8 \\ 2(y_1 - y_2) + 4y_3 \geq 24 \\ y_1 \geq 0\,,\ y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

و هذه الصيغة مساوية لما يلي :

$$Min\ W = 12y' + 20y_3$$
$$S/C\begin{cases} 4y' + 2y_3 \geq 10 \\ 6y' + 3y_3 \geq 8 \\ 2y' + 4y_3 \geq 24 \\ y'qq \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

حيث $' = y_1 - y_2$ و هو متغير كيفي أو حر .

هناك طريقة أخرى لتحويل البرنامج الأولي المكتوب في صيغة مختلطة إلى البرنامج الثنائي عن طريق إتباع القواعد التالية:

الدالة الأولية من نوع تعظيم	يتم التحويل في هذا الإتجاه(1)	**الدالة الثنائية من نوع تدنئة**
الدالة الثنائية من نوع تعظيم	يتم التحويل في هذا الإتجاه (2)	**الدالة الأولية من نوع تدنئة**
شكل القيود	**يحدد**	**شكل المتغيرات**
قيد أكبر أو يساوي	ينتج عنه	متغيرة أقل أو تساوي
قيد أقل أو يساوي	ينتج عنه	متغيرة أكبر أو يساوي
قيد مساواة	ينتج عنه	متغيرة كيفية أو حرة
شكل المتغيرات	**يحدد**	**شكل القيود**
متغيرة أقل أو تساوي	ينتج عنها	قيد أقل أو يساوي

متغيرة أكبر أو يساوي	ينتج عنها	قيد أكبر أو يساوي
متغيرة كيفية أو حرة	ينتج عنها	قيد مساواة

مثال 3: لو أخذنا نفس المثال (1) و حاولنا إيجاد البرنامج المرافق له مباشرة بإتباع القواعد المبينة في الجدول نجد :

$$Max\ Z = 30x_1 + 40x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2\,x_1 + 3x_2 \ \le\ 20 \\ x_1 + 3x_2 \ \ge 15 \\ \\ x_1 \ \ge 0\,,\ \ x_2 \ \ge 0 \end{cases}$$

سوف نقوم بالتحويل في الإتجاه رقم (1) حيث أن الدالة الأولية من نوع تعظيم $Max\ Z$ إذن الدالة الثنائية من نوع تدنئة $Min\ Z$

- شكل القيد الأول للبرنامج الأولي من نوع أقل أو يساوي و بالتالي تكون المتغيرة الأولى للبرنامج الثنائي نوع أكبر أو تساوي
- شكل القيد الثاني للبرنامج الأولي من نوع أكبر أو يساوي و بالتالي تكون المتغيرة الثانية للبرنامج الثنائي نوع أقل أو تساوي

إشارة المتغيرتين الأولى والثانية للبرنامج الأولي أكبر أو يساوي و بالتالي يكون القيدين الأول و الثاني للبرنامج الثنائي من نوع أكبر أو تساوي و منه نحصل على البرنامج التالي :

$$Min\ W = 20y_1 + 15y_2$$

$$S/C\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ \ge\ 30 \\ 3y_1 + 3y_2 \ \ge\ 40 \\ \\ y_1 \ \ge 0\,,\ \ y_2 \ \le 0 \end{cases}$$

و هو نفس البرنامج المحصل عليه سابقا بحيث: $y_2 \ \le 0 \qquad y_2 = -\,y'_2$

يمكن إستنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من الحل الأمثل للبرنامج الأولي و العكس يمكن إستنتاج الحل الأمثل للبرنامج الأولي من الحل الأمثل للبرنامج الثنائي

إليك البرنامج الأولي التالي :

$$Max\ Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C\begin{cases} 3\,x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 6\,x_1 + 1x_2 \le 14 \\ \\ x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- **المطلوب** : أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج .
- أكتب البرنامج الثنائي لهذا البرنامج ثم إستنتج الحل الأمثل له.

1. **إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي** : (بما أن شكل القيود من نوع أقل أو تساوي إذن نستعمل الطريقة المبسطة العادية لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج و نتحصل على الحل التالي :

VB \ VHB	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
x_2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	3
e_2	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	1	11
Z–cj	35	0	15	0	90

إذن تحقق شرط الأمثلية بالتالي الحل الأمثل هو :

x_1**=0**	e_1**=0**	
x_2**= 3**	e_2**=11**	$Z = 90$

1. **كتابة البرنامج الثنائي و إستنتاج الحل الأمثل له** :

$$2.\ Min\ Z = 6y_1 + 14\,y_2$$

$$S/C\begin{cases} 3\,y_1 + 6y_2 \ge 10 \\ 2\,y_1 + y_2 \ge 30 \\ y_1 \ge 0\,,\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

الإستنتاج و المقارنة :

من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وجدنا:

- قيمة متغير القرار 3= x_2 و هي تقابل قيمة متغير الفجوة $\overline{e_2}$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي .
- قيمة متغير الفجوة 11= e_2 و هي تقابل قيمة متغير القرار $\boldsymbol{y_2}$بالقيمة المطلقة في السطر الأخير في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي .

إذا لاحظنا السطر الأخير في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي أو ما يسمى أسعار الظل نجد :

- قيمة متغير القرار x_1 في السطر الأخير تساوي (35) و هي قيمة متغير الفجوة $\overline{e_1}$ في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي (عمود الكميات).
- قيمة متغير الفجوة e_1 في السطر الأخير تساوي (15)و هي تقابل قيمة متغير القرار $\boldsymbol{y_1}$في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي .
- قيمة دالة الهدف متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين .

أما بقية القيم الأخرى فإنها تحدد وفق العلاقة بين المتغيرات: متغيرات القرار في البرنامج الأولي تصبح متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي ، متغيرات الفجوة للبرنامج الأولي تصبح متغيرات القرار للبرنامج الثنائي.

و هكذا حتى يتم الحصول على الجدول النهائي الذي يمثل الحل الأمثل للبرنامج الثنائي و المبين أسفله:.

VHB / VB	y_1	y_2	$\overline{e_1}$	$\overline{e_2}$	b_i
y_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	15
$\overline{e_1}$	0	$\frac{-9}{2}$	1	$\frac{-3}{2}$	35
Z−cj	0	11−	0	3−	90

$Z\text{−}cj \leq 0$ إذن تحقق شرط الأمثلية بالتالي الحل الأمثل هو :

$\boldsymbol{y_1 = 15}$ $\boldsymbol{\overline{e_1} = 35}$

$\boldsymbol{y_2 = 0}$ $\boldsymbol{\overline{e_2} = 0}$

$\boldsymbol{Z = 90}$