الفصل II: نظرية التقدير

- تلعب نظرية التقدير دورا رئيسيا هاما في الاقتصاد وفي الإحصاء الاستدلالي، حيث تتم على ضوئها تقدير معالم المجتمع الإحصائي والمعلوم توزيعه الاحتمالي، وذلك عن طريق سحب عينة عشوائية من المجتمع، وتستخدم إحصاءاتها في تقدير معالم المجتمع.

I- معالم إحصائية:

أ- تعريف المقدر وخصائصه: لتقدير معلمة من معالم المجتمع نحتاج إلى اختيار الإحصائية المناسبة في العينة، وغالبا ما تكون المعلمة المناظرة في العينة هي أحسن مقدر، لأن فمثلا متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة $E(m) = \mu$ ونسمي دوما الإحصائية بالمقدر ومن أهم خصائصه:

- المقدر غير المتحاز (Estimateur non biaisé):

نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحاز لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع أي: نقول عن متوسط العينة $\bar{x}$ أنه مقدر غير متحاز لمتوسط المجتمع μ لأن:

$$E(\bar{x}) = \mu.$$

- نسمي إحصائية S^2 في معاينة باحاج أنها مقدر متحيز لتباين المجتمع σ^2 لأن $E(S^2) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) \neq \sigma^2$

- بينما تعتبر الإحصائية $\hat{S}^2 = S^2\left(\frac{n}{n-1}\right)$ في معاينة باحاج أنها مقدر غير متحيز لأن: $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$

- الفعالية (الكفاءة): المقدر الأكثر فعالية هو المقدر الأقل تباين.

- التقاربي: نقول عن مقدر أنه متقاربي إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة عندما يؤول $n \to \infty$.

ب- أنواع التقديرات النقطية:

1- التقدير النقطي: تستخدم بيانات العينة لتقدير معلمة المجتمع المجهولة بنقطة واحدة فقط، أي قيمة واحدة فقط.

2- التقدير بمجال: (فترة الثقة): التقدير بفترة نتحصل من خلاله على مجال أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة.

ج- فترة الثقة لمتوسط المجتمع M: في هذه الحالة لا نكتفي بتقدير معلمة المجتمع بنقطة، فنلجأ باستخدام عينة من المجتمع لحساب مجال نأمل أن تقع فيه معلمة المجتمع بمستوى ثقة محدد مسبقا يرمز له بالرمز $(1-\alpha)$ ويسمى أيضا درجة التأكد، حيث تسمى (α) مستوى المعنوية أو مستوى الخطر، ويطلق على هذه الفترة فترة الثقة لمعلمة بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$.

وفيما يلي سنوضح كيفية إيجاد فترة الثقة لمتوسط المجتمع M في الحالات التالية:

1- الحالة الأولى: تباين المجتمع: σ^2 معلوم:

نعلم أنه إذا كان $X \sim N(M, \sigma^2)$ فإن $\bar{X} \sim N(M, \frac{\sigma^2}{n})$ وكذلك $\frac{\bar{X}-M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

فنعرف فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ أو نقول فترة ثقة عند مستوى خطر α بأنها الفترة التي تحقق مايلي:

$$P\left(-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} < \frac{\bar{X}-M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

وبتبسيط فترة الاحتمال نحصل على العلاقة التالية:

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_M = \left[\bar{X} - z_{1-\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + z_{1-\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

مثال: أخذت عينة حجمها 49 ومتوسطها 45 من مجتمع إحصائي يتبع توزيعا طبيعيا تباينه 12,25.

- أوجد فترة الثقة بنسبة 95٪ لمتوسط المجتمع.

الحل: $n=49$ ، $1-\alpha=0,95$ ، $\alpha=0,05$ ، $\sigma^2=12,25$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{1-0,025} = z_{0,975} = 1,96$$

$$I_{C_\mu} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[45 - 1,96 \cdot \frac{3,5}{\sqrt{49}} ; 45 + 1,96 \cdot \frac{3,5}{\sqrt{49}}\right]$$

$$= [44,02 ; 45,98].$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع μ للمجتمع بين القيمتين 44,02 و 45,98 هو 0,95 وتعني كذلك أن هناك 5 حالات من كل 100 حالة ستكون فيها μ خارج فترة الثقة المذكورة.

2- الحالة الثانية: تباين المجتمع σ^2 مجهول وعينات كبيرة ($n \geq 30$)

في هذه الحالة نعبر مجال الثقة لمتوسط المجتمع بالعلاقة التالية:

$$I_{C_\mu} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

حيث نستخدم الانحراف المعياري للعينة S بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع σ لأنه مجهول.

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مجهول التباين بحجم 36 مشاهدة، حيث بلغ متوسطها الحسابي 12 وتباين 16، أوجد فترة الثقة بنسبة 99٪ لتقدير متوسط المجتمع μ.

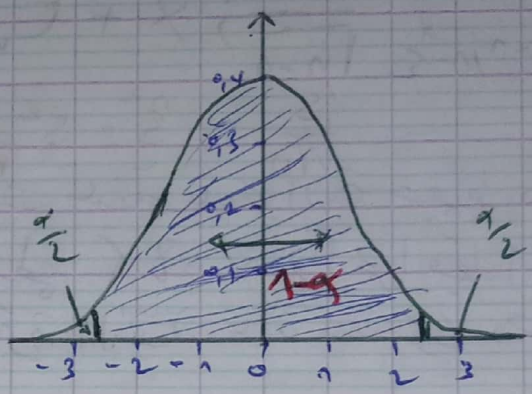
الحل :

$\alpha = 0,01$ ، $1-\alpha = 0,99$ ، $\bar{x} = 12$ ، $S^2 = 16$ ، $n = 36$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد :

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0,01}{2}} = z_{1-0,005}$$

$$z_{0,995} = 2,58$$



فتكون فترة الثقة المطلوبة كما يلي :

$$IC_\mu = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$IC_\mu = \left[12 - 2,58 \cdot \frac{4}{6} ; 12 + 2,58 \cdot \frac{4}{6}\right]$$

$$IC_\mu = [12 - 1,72 ; 12 + 1,72]$$

$$= [10,28 ; 13,72].$$

3- الحالة الثالثة : تباين المجتمع σ^2 مجهول وعينات صغيرة ($n<30$) حيث ما يكون التوزيع طبيعيا ولكن σ غير معلومة ، فإننا لا نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي لتقدير فترات الثقة لمتوسط المجتمع غير المعلوم ، لكن يمكننا استخدام توزيع t هذا التوزيع متماثل حول متوسط الصفر ولكنه منبسط عن التوزيع الطبيعي القياسي ، ولهذا فإن حدود t أكثر مسافة تقع عند الأطراف وبينما توجد توزيع طبيعي قياسي واحد ، فإن هناك توزيعا t مختلفا

لكل حجم للعينة n، ولكن مع تزايد n فإن توزيع t تقترب من توزيع التوزيع الطبيعي المعياري إلى أن تكون $n \geq 30$ وعندئذ يتساوى التوزيعان.

ويعطى مجال الثقة لتقدير متوسط المجتمع في هذه الحالة وفق الصيغة التالية:

$$IC_\mu = \left[\bar{x} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} ; \bar{x} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] = 1-\alpha$$

$\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$ / $\hat{S}^2 = S^2 \frac{n}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

مثال: سحبت عينة عشوائية حجمها $n=10$ من مجتمع إحصائي فكان متوسطها $\bar{x}=8,5$ وانحرافها المعياري $S=1,58$.

- أوجد فترة الثقة عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$.

الحل:

من توزيع ستودنت نجد أن

$$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{(9,1-0,025)} = t_{9;0,975} = 2,262$$

$$IC_\mu = \left[8,5 - 2,262 \cdot \frac{1,58}{\sqrt{10-1}} ; 8,5 - 2,262 \cdot \frac{1,58}{\sqrt{9}}\right]$$

$$= [8,5 - 1,19 ; 8,5 + 1,19]$$

$$= [7,31 ; 9,69]$$

ج- مجال الثقة لنسبة المجتمع P:

- إن تقدير النسبة فترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع P ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معين تحصر نسبة النجاح P بداخلها والنظرية التالية توضح ذلك.

إذا كان $p = \frac{n_g}{n}$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n كبير فإن فترة الثقة التقديرية لنسبة النجاح P هي:

$$IC_p = \left[p' - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'.q'}{n}} \; ; \; p' + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \right]$$

هذا إذا كانت المعاينة تتم مع مجتمع غير منته (غير محدود) أي في حالة السحب بالإرجاع، أما إذا كانت المعاينة تتم في مجتمع منته (محدود) أي أن السحب بدون إرجاع فإن مجال الثقة لنسبة المجتمع تعطى وفق الحالة التالية:

$$IC_p = \left[p' - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \; ; \; p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]$$

مثال: لإيجاد فترة ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب، وجد أن من لديهم ضعف في البصر كانوا 15 طالب.

- أوجد فترة الثقة المطلوبة؟

الحل: إيجاد p' المقدر النقطي لنسبة النجاح.

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{1-0,025} = z_{0,975} = 1,96$$

$$IC_p = \left[0,15 - 1,96 \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{100}} \; ; \; 0,15 + 1,96 \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{100}} \right]$$

$$= [0,08 \; ; \; 0,22].$$

نقول بأننا واثقون بنسبة 95% بأن نسبة الطلبة الذين لديهم ضعف البصر في المدرسة تقع بين القيمتين 0,08 و 0,22.

مثال: مؤسسة متكونة من 1200 عامل، أخذنا عينة عشوائية متكونة من 100 عامل، أراد 70 عامل تسيير تمويل تقاعدهم بأنفسهم بدلا من تسييلهم ضمن محفظ التقاعد المضمون من طرف شركة التأمينات.

- حدد مجال الثقة عند مستوى معنوية 5% بالنسبة لنسبة العمال الذين إختاروا تسيير أموال تقاعدهم بأنفسهم.

الحل: $N=1200, n=100, n_a=70, \alpha=5\%$

- نسبة العمال الذين إختاروا تسيير أموالهم تقاعدهم بأنفسهم في العينة المسحوبة هو:

$$p' = \frac{n_a}{n} = \frac{70}{100} = 0,70$$

لدينا: $n=100 \geq 30$، إذن التوزيع المتبع هو التوزيع الطبيعي:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{1-0,025} = z_{0,975} = 1,96$$

كذلك لدينا: $\frac{n}{N} = \frac{100}{1200} = 0,08 > 0,05$ والمجتمع محدود (السحب تم بدون إرجاع).

$$IC_p = \left[p' - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} ; p' + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

$$= \left[0,7 - 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100}}\sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}} ; 0,7 + 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100}}\sqrt{\frac{1200-100}{1200-1}}\right]$$

$$= [0,696 ; 0,704]$$

أي أننا واثقون بنسبة 95% بأن نسبة العمال الذين إختاروا تسيير أموال تقاعدهم بأنفسهم تقع بين القيمتين 0,696 و 0,704.

α	0,10	0,05	0,01
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$z_{1-\frac{0,1}{2}} = z_{0,95} = 1,645$	$z_{1-\frac{0,05}{2}} = z_{0,975} = 1,96$	$z_{1-\frac{0,01}{2}} = z_{0,995} = 2,58$

2-فترة الثقة للفرق بين وسطين

ا-فترة الثقة للفرق بين وسطين مع معلومية تباين المجتمعين

اذا كان المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وفق العلاقة التالية[13] :

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \longrightarrow N(\mu_1 - \mu_2 ; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0; 1)$$

فتكون فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ كالتالي :

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

و بعد تبسيط المتباينة الى $(\mu 1 - \mu 2)$ نجد أن :

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1 - \mu_2 = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

مثال09:

عينة عشوائية حجمهاn_1=80 و متوسطها $\bar{X}_1 = 1680$ و *عينة عشوائية ثانية* حجمها $n_2 = 75$ و متوسطها $\bar{X}_2 = 1200$ *وكان الانحراف المعياري للمجتمعين* $\sigma_1^2 = 500$ و $\sigma_2^2 = 600$ على التوالي .

-ماهي فترة الثقة عند 99% للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

---

[13] *Sheldon M. Ross , **introduction to probability and statistics fourth edition** , Department of Industrial Engineering and Operations Research University of California , Elsevier Academic Press 2009, pp255-256.*

الحل:

لدينا:

$$\bar{X}_2 = 1200 \qquad \bar{X}_1 = 1680$$

$$\sigma_2^2 = 600 \qquad \sigma_1^2 = 500$$

ومنه فإن فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بعد التعويض يعطى بالعلاقة التالية:

$$(1680 - 1200) - Z_{1-\frac{0.01}{2}}\sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}} < (\mu 1 - \mu 2) < (1680 - 1200) + Z_{1-\frac{0.01}{2}}\sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}}$$

$$250 < \mu_1 - \mu_2 < 710$$

أي عند مستوى ثقة 99% ستكون قيمة الفرق بين متوسط المجتمعين ضمن المجال:

$$[710 - 250]$$

ب-فترة الثقة للفرق بين وسطين مع مجهولية تباين المجتمعين

-اذا كان $(n_1, n_2 \geq 30)$

اذا كان تباينن مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و كان حجم العينتين المأخوذين من هذا المجتمعين كبيرا بقدر كاف أي $(n_1, n_2 \geq 30)$ عندئذ *يبقى التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي المعياري مع تبديل* σ_1^2 و σ_2^2 بتبايني العينة وتصبح العلاقة:

$$(\bar{X}1 - \bar{X}2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}1 - \bar{X}2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1 - \mu_2 = \left[(\bar{X}1 - \bar{X}2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\bar{x}2}^2}{n_2}}\right]$$

اذا كان $(n_1, n_2 < 30)$ **أو أحدهما :**

عندما يكون لدينا مجتمعين احصائيين غير معلومي التباين ولكن توزيعها التكراري من النوع الطبيعي و عندما يكون حجم العينتين المأخوذتين من هذين المجتمعين صغيرا $(n_1, n_2 < 30)$ فإننا نستخدم عادة متباينة الثقة الخاصة بتوزيع t التالية :[14]

---

[14] علاء الدين القبانجي، حسام حمامة كرمجي ، **مرجع سابق** ، ص 229.

$$(\bar{X}1 - \bar{X}2) - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{n_1}+\frac{\sigma^2_{\bar{x}2}}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2)$$

$$< (\bar{X}1 - \bar{X}2) + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{n_1}+\frac{\sigma^2_{\bar{x}2}}{n_2}}$$

و يتم حساب درجة الحرية وفق هذه للتوزيع ستودنت كالتالي: $v=n_1+n_2-2$ و يقع ضمن متباينة الثقة التالية و ذلك بدرجة ثقة $P=(1-\alpha)\%$.

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1 - \mu_2 = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{n_1}+\frac{\sigma^2_{\bar{x}2}}{n_2}}\right]$$

مثال 10:

أعد حل المثال السابق (10) في حالة مجهولية تباين المجتمعين وبافتراض تباين العينتين هما كالتالي:

$$\sigma^2_{\bar{x}1} = 500 \quad , \quad \sigma_{\bar{x}2} = 600$$

$$n_2=12 \qquad n_1=8$$

الحل:

بتطبيق العلاقة التالية:

$$(\bar{X}1 - \bar{X}2) - t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{n_1}+\frac{\sigma^2_{\bar{x}2}}{n_2}} < (\mu1 - \mu2)$$

$$< (\bar{X}1 - \bar{X}2) + t_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{x}1}}{n_1}+\frac{\sigma^2_{\bar{x}2}}{n_2}}$$

وبالتعويض نجد:

$$(1680 - 1200) - t_{\left(1-\frac{0.01}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{500^2}{8}+\frac{600^2}{12}} < (\mu1 - \mu2)$$

$$< (1680 - 1200) + t_{\left(1-\frac{0.01}{2},\ n_1+n_2-2\right)}\sqrt{\frac{500^2}{8}+\frac{600^2}{12}}$$

مع:

$$t_{\left(1-\frac{0.01}{2},\ 8+12-2\right)} = t_{(0.995,\ 18)} = 2.878$$

$$IC = \left[-232,3 \ ; \ 1192,3\right]$$