محاضرات مقياس الإحصاء 3

المحاضرة رقم 01: توزيع المعاينة:

مقدمة: تعد دراسة أسلوب العينات من المحاور الرئيسية في دراسة موضوع الاستدلال الإحصائي، الذي يستند في جوهره على حقيقة الوصول إلى استنتاجات دقيقة عن المجتمع المدروس، بناءا على البيانات التي تم الحصول عليها من العينة المأخوذة منه، وفق الطرق الإحصائية المحكمة.

أساليب جمع البيانات:

هناك أسلوبان لجمع البيانات ميدانيا، هما أسلوب الحصر الشامل وأسلوب المعاينة.

* أسلوب الحصر الشامل: وهو أسلوب يتم بموجبه جمع البيانات الإحصائية عن كافة المفردات التي تؤلف المجتمع الأصلي للظاهرة قيد الدراسة، كحصر جميع تلاميذ المرحلة الابتدائية في البلد، أو حصر جميع المؤسسات التعليمية في البلد يغلب عليه أنه يحتاج إلى الوقت والجهد وتكاليفه عالية.

* أسلوب المعاينة: يعتمد على معاينة جزء من المجتمع محل الدراسة، ويسمى هذا الجزء من المفردات بالعينة، ويتم اختيار المفردات بموجب هذا الأسلوب وفق طريقة علمية تسمى طريقة المعاينة. ويتميز هذا الأسلوب بالاقتصاد في الوقت والجهد والتكلفة، والحصول على بيانات أكثر تفصيلا، ولكن يغلب عليه أنه أقل دقة من أسلوب الحصر الشامل، خاصة إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا، أو تم اختيارها بشكل متحيز.

~~- المجتمع والعينة:~~

~~- المعاينة:~~

توزيع المعاينة: يعرف توزيع المعاينة بأنه عبارة عن توزيع كافة القيم المحتملة التي يمكن افتراضها بإحصاءة ما محسوبة على أساس عينات مختلفة بنفس الحجم اختيرت عشوائيا من نفس المجتمع.

أو هي الكيفية أو العمليات التي تسمح بانتقاء مجموعة معينة

من المجتمع. ولبناء توزيع المعاينة نتبع الخطوات الآتية:

- سحب كافة العينات بحجم (n) مع الإرجاع أو بدون إرجاع من مجتمع حجمه (N).
- حساب متوسط المجتمع (μ) وتباينه (σ^2).
- حساب الإحصاء ($\bar{x}$) لكل عينة.
- تكوين جدول توزيع تكراري للقيم المختلفة للإحصاء المحسوبة.
- حساب متوسط المتوسطات ($\mu_{\bar{x}}$) وتباين الوسط الحسابي ($\sigma^2_{\bar{x}}$).

المجتمع: يعرف المجتمع بأنه مجموعة عناصر تشترك في خاصية أو أكثر، وقد يكون محدود أو غير محدود ويرمز له (N).

مثال: ترغب في إستخلاص نتائج حول أطوال ١٠٠٠٠ طالب من خلال فحص ١٠٠ طالب فقط في هذه الحالة يتكون المجتمع من ١٠٠٠٠ طالب، بينما تتكون العينة من ١٠٠ طالب مسحوبة من هذا المجتمع (المجتمع محدود).

مثال: ترغب في إستخلاص نتائج فحص قطع غيار من قطعة نقدية معينة من خلال رمي القطعة النقدية المعنية. أما العينة فيمكن الحصول عليها بفحص أول ٥٠ رمية مثلا (المجتمع غير محدود).

العينة: هي جزء من المجتمع، تتكون من مفردات يتم إختيارها بطريقة مناسبة، بحيث تمثل المجتمع تمثيلا جيدا ودلك لدراسة صفات المجتمع. ويطلق على مفردات العينة التي تم إختيارها من المجتمع عادة بحجم العينة ويرمز له بالرمز (n) حيث: $(n < N)$.

أنواع العينات الإحصائية: هناك عينات إحتمالية وغير إحتمالية.

- العينات الإحتمالية: هي العينات التي يتم إختيار مفرداتها وفقا لقانون الإحتمالات، بمعنى آخر هي التي يتم إختيار مفرداتها من مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية

- العينة العشوائية البسيطة: هي عينة يتم إختيارها بإعطاء فرص متكافئة لكل عناصر المجتمع للظهور في العينة،
- العينة الفاذية: سحب بدون إرجاع.
- العينة غير الفاذية: سحب بإرجاع.

- العينة العشوائية المنتظمة: يطلق عليها اسم العينة ذات الفترات (المسافات) المتساوية، تعرفها بأنها العينة التي يتم إختيار مفرداتها حيث تكون المسافة أو الفترة بين كل مفردة وسابقتها ثابتة لجميع مفردات العينة، ويحدد طول الفترة أو المسافة المنتظمة بين المفردات بقسمة حجم المجتمع على حجم العينة، وتستخدم هذه العينة في حالة توفر قائمة بأفراد المجتمع.

المعلمة والإحصاءة:

- المعلمة: هي المؤشرات الناتجة عن المجتمع الإحصائي مثل: المتوسط الحسابي للمجتمع (μ)، التباين (σ^2)، النسبة P.

- الإحصاءة: هي المؤشرات الناتجة عن العينة مثل متوسط العينة $\bar{X}$ (m)، الإنحراف المعياري للعينة S.

توزيع المعاينة للوسط الحسابي:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات:

مثال: مجتمع إحصائي يتكون من ثلاث مشاهدات ($N=3$) هي (4، 6، 8). تم إختيار عينة عشوائية بحجم مشاهدتين من هذا المجتمع ($n=2$)

- حساب القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(m)$ في حالة الإرجاع وبدون إرجاع.

بإرجاع: تحديد جميع الحالات الممكنة: N^n

بدون إرجاع: $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

السحب بإرجاع: (عينة غير تفاذية).

① - تحديد العينات الممكنة.

② - تحديد m_i (المتوسط الحسابي للعينة).

③ - إيجاد جدول التوزيع الإحتمالي

				m_i
				p_i

④ - إستخراج القيمة المتوقعة لـ m: $E(m)$.

$$E(m) = \sum m_i \cdot p_i$$

⑤ - حساب متوسط المجتمع (M).

$$M = \frac{\sum x_i}{N} = M$$

السحب بدون إرجاع: (عينة تفاذية).

$$E(m) = \frac{\sum m_i}{\text{عدد العينات}} = M$$

نظرية ام: إذا كانت X م ع تمثل مجتمع ما و m متغيره عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(m)$ تكتب كما يلي:

$$E(m) = M_m = M.$$

- تباين توزيع المعاينة للمتوسطات: σ_m^2

- السحب بإرجاع:

① - حساب تباين المجتمع: σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - M)^2}{N}$$

② - حساب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum (m_i - m)^2}{\text{عدد العينات } n}$$

نلاحظ أن: $\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{2}$

نظرية 2: السحب بإرجاع: $\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

السحب بدون إرجاع:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

نظرية 3: بدون إرجاع.

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\underbrace{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}_{\text{معامل الإرجاع}}$$

* يمكن إهمال معامل الإرجاع إذا كانت العينة صغيرة جدًا بالمقارنة مع حجم المجتمع (أي أنه يقترب من 1).
ويكون قيمة معامل الإرجاع أقل من 1 كلما كان $n > 1$، هذا يعني أن خطأ المعاينة في حالة المعاينة بدون إرجاع أقل منه في حالة المعاينة بإرجاع، هذا يعني أن المعاينة بدون إرجاع تعطي تقديرًا أكثر دقة لمعلمة المجتمع M.

- خطأ المعاينة: هو الفرق بين القيمة المحسوبة الإحصائية العينة وقيمة معلمة المجتمع المتحرية لها.

ملاحظات:
في حالة المجتمعات الكبيرة، فإن صيغة الانحراف المعياري سواء كانت المعاينة تقادية أو غير تقادية تكون كما يلي:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- يطلق على النسبة $\frac{n}{N}$ معدل الاستقصاء.
- عندما تكون قيمة معدل الاستقصاء أقل من 0,05 أي: $\left(\frac{n}{N} < 0,05\right)$ فإنه يتم إهمال قيمة معامل الإرجاع $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في علاقة التباين.

حل المثال:

$X_i = \{2, 6, 4\}$ $n = 2$

$N = 3^2 = 9$

① - حساب $E(m)$.

- إيجاد كل العينات الممكنة.

مع الشرح بالإرجاع:

العينات	2	6	4
2	(2,2)	(6,2)	(4,2)
6	(2,6)	(6,6)	(4,6)
4	(2,4)	(6,4)	(4,4)

حساب الوسط الحسابي $(\bar{X})$ أو (m) لكل عينة على التوالي:

العينات	(2,2)	(2,6)	(2,4)	(6,2)	(6,6)	(6,4)	(4,2)	(4,6)	(4,4)
$\bar{X}$ أو m_i	2	4	3	4	6	5	3	5	4

- إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي:

m_i	2	3	4	5	6
$P(m_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$E(m) = \sum m_i \cdot P_i = \left(2 \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(3 \cdot \frac{2}{9}\right) + \left(4 \cdot \frac{3}{9}\right) + \left(5 \cdot \frac{2}{9}\right) + \left(6 \cdot \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{36}{9} = 4 = M_{\bar{X}}$$

حساب متوسط المجتمع: μ

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+6+4}{3} = 4$$

$$\mu = \mu_{\bar{x}}$$

حساب $\mu_{\bar{x}}$ في حالة السحب بدون إرجاع:

عدد العينات الممكنة:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} =$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

العينات	(6,2)	(4,2)	(4,6)
$\bar{x}_i$	4	3	5

m_i	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

$$\mu_{\bar{x}} = (3 \cdot \tfrac{1}{3}) + (4 \cdot \tfrac{1}{3}) + (5 \cdot \tfrac{1}{3})$$

$$= \frac{12}{3} = 4$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_{\bar{x}} = 4$$

حساب تباين المجتمع، σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$= \frac{(2-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2}{3} = \frac{8}{3}$$

حساب تباين العينة: $\sigma_{\bar{x}}^2$

في حالة السحب بإرجاع:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2}{9}$$

$$= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

حساب تباين العينة في حالة السحب بدون إرجاع S_n^2:

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{\text{عدد العينات}} = \frac{(4-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{S^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{8/3}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = \frac{8/3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{3}$$

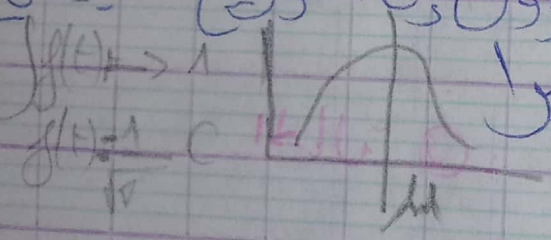
طبيعة توزيع m : من أهم دراسة توزيع المعاينة
طبيعة
المتوسطات وذلك من خلال نظريات التالية:

نظرية 4 : إذا كان المجتمع موزع طبيعيا متوسط M و تباين σ^2 فإن متوسط العينة المسحوبة منه يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط M وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$

ونكتب $m \sim N(M, \frac{\sigma^2}{n})$

نظرية 5 : (نظرية النهاية المركزية) : إذا كان المجتمع الذي تسحب منه العينة ذو متوسط M وتباين σ^2 لكن ليس بصورة طبيعية فإن المتغيرة المعيارية m تؤول إلى التوزيع الطبيعي

$z = \frac{m - M}{\sigma/\sqrt{n}}$



المعياري حتما يكون n كبيرا $(n \geq 30)$ ونكتب :

$z \sim N(0,1)$

في حالة مجتمع محدود والعينة تغذية نستبدل $\sigma/\sqrt{n}$ بـ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ هذه النظرية تحقق في حالتين

1) إرجاع أو بدون إرجاع متى كان حجم العينة n كبيرا

عمليا: يستخدم الإحصائيون هذه الصيغة المعدلة لقيل الإرجاع إذا كان $n/N \leq 0,05$ حيث الانحراف المعياري عندما تكون n/N وتسمى النسبة بمعدل الاستقصاء ونرمز له بالرمز f

صيغة المعادلة تتغير إذا كان السحب بدون إرجاع

مثال: مجتمع حجم $N=1000$ بمتوسط $M=25$ وانحراف معياري $\sigma=14$ بعد استخراج كل العينات الممكنة احسب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات في حالة حجم العينة $n=40$ و $n=68$

الحالة ①: $n=40$

$$\frac{n}{N}=\frac{40}{1000}=0,04$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{14}{\sqrt{40}}=\frac{14}{6,324}$$

$$\sigma_{\bar{x}}=2,245$$

متوسط توزيع المعاينة = متوسط المجتمع

$$m_i=M=25$$

الحالة ②: $n=68$

$$\frac{n}{N}=\frac{68}{1000}=0,068 \rightarrow 0,05$$

$$\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)=\frac{14}{\sqrt{68}}\left(\sqrt{\frac{1000-68}{1000-1}}\right)$$

$$\sigma_m=1,63$$

باعتماد على معطيات المثال السابق وفي حالة $n=40$ احسب أن يكون m محصور بين 22 و 28 ذغسلس بالنسبة لـ $n=68$

$$Z_1=\frac{m_1-M}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{22-25}{14/\sqrt{40}}=\frac{-3}{2,2075} \Leftarrow n=40$$

$$z_2 = -1,35$$

$$z_2 = \frac{m_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{28-25}{14/\sqrt{40}} \Rightarrow z_2 = 1,35$$

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = (z_1 \leq z \leq z_2)$$

$$P(z_1 \leq z \leq z_2) = P(-1,35 \leq m \leq 1,35)$$

$$= P(1,35) - P(-1,35) = 0,9115 - 0,08851 = 0,822$$

من جدول التوزيع الطبيعي z المقابلة القيمة 1,35

$$0,9115 = \alpha$$

$$0,08851 = \alpha - 1,35$$

$$z_1 = \frac{m_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad <= n = 68$$

$$= \frac{22-25}{14/\sqrt{68}} \left(\frac{1000-68}{1000-1}\right) = -1,64$$

$$z_2 = 1,64$$

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) = P(z_1 \leq z \leq z_2)$$

$$P(-1,64 \leq z \leq 1,64) = P(1,64) - P(-1,64)$$

$$= 0,9495 - 0,0505$$

$$P = 0,899$$

توزيع المعاينة النسبية : تتطلب دراسة المعاينة النسبية توضيح الكيفية التي يكون فيها التوزيع من حيث المتوسط التشتت وشكل التوزيع

- نقصد بالنسبة في المجتمع بالكسر $P = \frac{Na}{N}$ حيث N حجم المجتمع و Na عدد المفردات التي تحقق فيها خاصية ما.

- نقصد بالنسبة في العينة بالكسر $P' = \frac{na}{n}$ حيث n حجم العينة و na عدد مفردات العينة التي تحقق نفس الصفة

سنقوم بدراسة الخصائص P' وتوزيعها الاحتمالي لأنها إحصائية تستخدم لتقدير النسبة في المجتمع P

مثال:

مجتمع حجم $N=5$ يتكون من العناصر التالية: 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 0 (1: العنصر له صفة ، 0: ليس له صفة). نسحب عنصرين عشوائيا بدون إرجاع احسب P'

الحل: متوسط المجتمع:

$$\mu = \frac{1+0+0+1+0}{5}$$

$$\mu = \frac{2}{5} = 0.4$$

تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{n} = \frac{(1-0.4)^2+(0-0.4)^2+(0-0.4)^2+(1-0.4)^2+(0-0.4)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = 2.4$$

نسبة المجتمع:

$$P' = \frac{Na}{N} = \frac{2}{5} = 0.4$$

عدد الحالة الممكنة = 10 في حالة بدون إرجاع

0	1	0	0	1	/
0.1	1.1	0.1	0.1	-	1
0.0	1.0	0.0	-	-	0
0.0	1.0	-	-	-	0
0.1	-	-	-	-	1
-	-	-	-	-	0

حالة الارجاع :

	0	1	0	0	1	/
عدد الحالات الممكنة : 2^5	(0,1)	(1,1)	(0,1)	(0,1)	(1,1)	1
	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	0
	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	0
	(0,1)	(1,1)	(0,1)	(0,1)	(1,1)	1
	(0,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	0

نظرية : لتكن n متغير عشوائية تمثل مجتمع ما غير محدود وموزع طبيعيا حيث P نسبة المفردات في المجتمع ذات الصفة معينة ولتكن P' متغيرة عشوائية نسبة المفردات ذات الصفة المذكورة في العينة المسحوبة من نفس المجتمع فإن التوقع الرياضي لـ P' يساوي متوسط المجتمع النسبة P أي $E(P') = M_{P'} = P$ بينما تباين المجتمع $\sigma^2_{P'} = \frac{PQ}{n}$ في حالة المجتمع محدود (العينة تفاوية) نضرب في معامل

الإرجاع عند حساب الانحراف المعياري.

نفس المثال السابق:

عدد الحالات الممكنة مع الإرجاع N.

0,5	1	0,5	0,5	1
0	0,5	0	0	0,5
0	0,5	0	0	0,5
0,5	1	0,5	0,5	1
0	0,5	0	0	0,5

$p'f$	f	p'
0	9	0
6	12	0,5
4	4	1
10	25	3

$$E(p') = \frac{10}{25} = 0.4$$

$$p = \frac{Nq}{N} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{n} \qquad \sigma^2 p' = \frac{pq}{n}$$

$$(p' - E(p'))^2 f = (0-0.4)^2 \cdot 9 = 1.44$$

$$= (0.5-0.4)^2 12 = 0.12$$

$$= (1-0.4) \cdot 4 = 1.44$$

$$\frac{\sum (p' - E(p'))^2 f}{n} = \frac{3}{25} = 0.12$$

$$\sigma^2 p' = \frac{pq}{n} = \frac{0.4(1-0.4)}{2} = 0.12$$

0,5	1	0,5	0,5
0	0,5	0	–
0	0,5	–	–
0,5	–	–	–

عدد الحالة الممكنة بإرجاع.

$(p'-E(p))^2 \cdot f$	$p' \cdot f$	f	p'
$3 \cdot (0-0.4)^2 =$	0	3	0
0,06	3	6	0,5
0,36	1	1	1
0,9	4	10	3

$$E(p') = \frac{\sum pf}{n} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$p = \frac{Na}{N} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{pq}{n} = \frac{0,4(1-0,4)}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 0,09$$

$$\frac{\sum (p'-E(p))^2 \cdot f}{10} = \frac{0,9}{10} = 0,09$$

نظرية: إذا كانت N متغير عشوائية تمثل مجتمع حجمه N و p نسبة الوحدات ذات صفة معينة و p' متغير عشوائية تمثل نسبة ذات نفس الصفة في عينة عشوائية مسحوبة من نفس المجتمع فإن هذه النسبة p' تتبع قانون التوزيع الطبيعي $p' \sim N(p, \pi^2 p)$

توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

1- المتوسط والتباين:

ليكن لدينا مجتمعين نسحب من كل مجتمع عينة عشوائية نحسب في كل عينة مسحوبة من المجتمع الأول الإحصائية $\bar{x}_1$ وبالنسبة للمجتمع الثاني الإحصائية $\bar{x}_2$.

2- بالنسبة للفروق:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}$$

إذا كانت الإحصائية هي المتوسط فإن:

$$\mu_{m_1 - m_2} = \mu_{m_1} - \mu_{m_2} = \mu_1 - \mu_2$$

إذا كانت الإحصائية هي التباين فإن:

$$\sigma^2_{m_1 - m_2} = \sigma^2_{m_1} - \sigma^2_{m_2} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

أما إذا كانت الإحصائية هي النسبة فإن:

$$\mu_{p_1 - p_2} = \mu_{p_1} - \mu_{p_2} = p_1 - p_2$$

$$\sigma^2_{p_1 - p_2} = \sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_1} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

ب. بالنسبة للمجموع:

$$\mu_{V_1+V_2} = \mu_{V_1} + \mu_{V_2}$$

$$\sigma^2_{V_1+V_2} = \sigma^2_{V_1} + \sigma^2_{V_2}$$

مثال:

ليكن المجتمع $U_1 = 3, 5, 7$ $\quad U_2 = 2.5$ نحقق:

$\sigma^2_{U_1-U_2} = \sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2}$ ، $\mu_{U_1-U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2}$ أي:

$\mu_1 - \mu_2$		U_1		
		3	5	7
μ_2	2	1	3	5
	5	-2	0	2

μ_1: متوسط المجتمع.

$$\mu_{U_1} = \frac{3+5+7}{3} = 5$$

μ_2: متوسط المجتمع.

$$\mu_{U_2} = \frac{2+5}{2} = 3.5$$

$$\mu_{U_1-U_2} = \frac{1+3+5+(-2)+0+2}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$$

$$\mu_{U_1} - \mu_{U_2} = 5 - 3.5 = 1.5$$

$$\mu_{U_1-U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \frac{\sum (x)^2}{n} \quad / (E(x))^2 = (\bar{x})^2$$

حساب تباين المجتمع U_1 :

$$\sigma^2_{U_1} = \frac{3^2+5^2+7^2}{3} - (5)^2 = 2.66$$

حساب تباين المجتمع U_2 :

$$\sigma^2_{U_2} = \frac{2^2+5^2}{2} - (3.5)^2 = 2.25$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = \frac{1^2+3^2+5^2+(-2)^2+0^2+2^2}{6} - (1.5)^2$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = 4.91$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = 2.66 + 2.25 = 4.91$$

$$\sigma^2_{U_1-U_2} = \sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2}$$

نظرية :

في حالة $n_1, n_2 \geq 30$ يقترب توزيع المتغيرة المعيارية للفرق بين متوسطين من التوزيع الطبيعي المعياري

$$M_{m_1-m_2} \sim N(0,1)$$

توزيع المعاينة للتباين :

1- في حالة المعاينة بالإرجاع :

نظرية : إذا كانت x متغيرة عشوائية تمثل مجتمعا ما و s^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة مسحوبة بالإرجاع وحجمها n فإن :

$$E(s^2) = M_{s^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

ملاحظة : من النظرية السابقة نجد أن التوقع الرياضي

$S^2 \frac{n}{n-1}$ ونقول عنه $E\left(S^2 \frac{n}{n-1}\right) = \sigma^2$

أنه مقدر غير متحاز لـ σ^2 ويرمز له $\hat{S}^2$

حيث $\hat{S}^2 = \frac{S^2 n}{n-1}$

ب- في حالة المعاينة بدون إرجاع:

نظرية 8: إذا كانت n متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و S^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة نفاذية مسوية من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة تكتب على الشكل التالي: $E(S^2) = \sigma^2 \frac{n-1}{n}\left(\frac{N}{N-1}\right)$

تؤول إلى $\frac{N}{N-1}$ وإذا كان N عدد كبير فإن القيمة تؤول إلى 1

مثال:

من المثال الأول احسب القيمة المتوقعة لتباين العينة المسحوبة بإرجاع و بدون إرجاع من خلال التباينات العينات الممكنة.

- قارن بين تباين المجتمع والقيمة المتوقعة.

نذكر: العينات الممكنة بإرجاع: $\alpha^4 = 16$

حساب القيمة المتوقعة للتباين:

التباينات الممكنة:

12.3	6,25	4	1	0
6,25	2.25	1	0	1
2,25	0,25	0	1	4
1	0	0,25	2.25	6.25
0	1	2,25	6.25	12,3

$$\sigma_1^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{1^2+1^2}{2} - 1^2 = \frac{2}{2} - 1 = 0$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1^2+3^2}{2} - (2)^2 = \frac{10}{2} - 4 = 1$$

تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = \frac{1^2+3^2+5^2+6^2+8^2}{5} - (4.6)^2$$

$$\sigma^2 = 5.84$$

القيمة المتوقعة للتباينات الممكنة:

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{n} = \frac{(0+1+4+\dots+1+0)}{25}$$

$$= 2.92$$

$$E(S^2) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = 5.84\left(\frac{2-1}{2}\right)$$

$$= 2.92$$

في حالة N وذ ارجاع.

تذكير بعينات الممكنة ص 5.

التباينات الممكنة:

12.3	6,25	4	1
6,25	2,25	1	-
2.25	0,25	-	-
1	-	-	-

تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = 5.84$$

القيمة المتوقعة للتباينات الممكنة:

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{10} = \frac{(1+4+\dots+1)}{10}$$

$$= 3,65$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{N}{N-1} = 5.84 \cdot \frac{2-1}{2} \cdot \frac{5}{5-1}$$

$$E(S^2) = 3.65.$$