حل السلسلة الأولى

التمرين الأول:

1- **حساب المنفعة الحدية Um_x:**

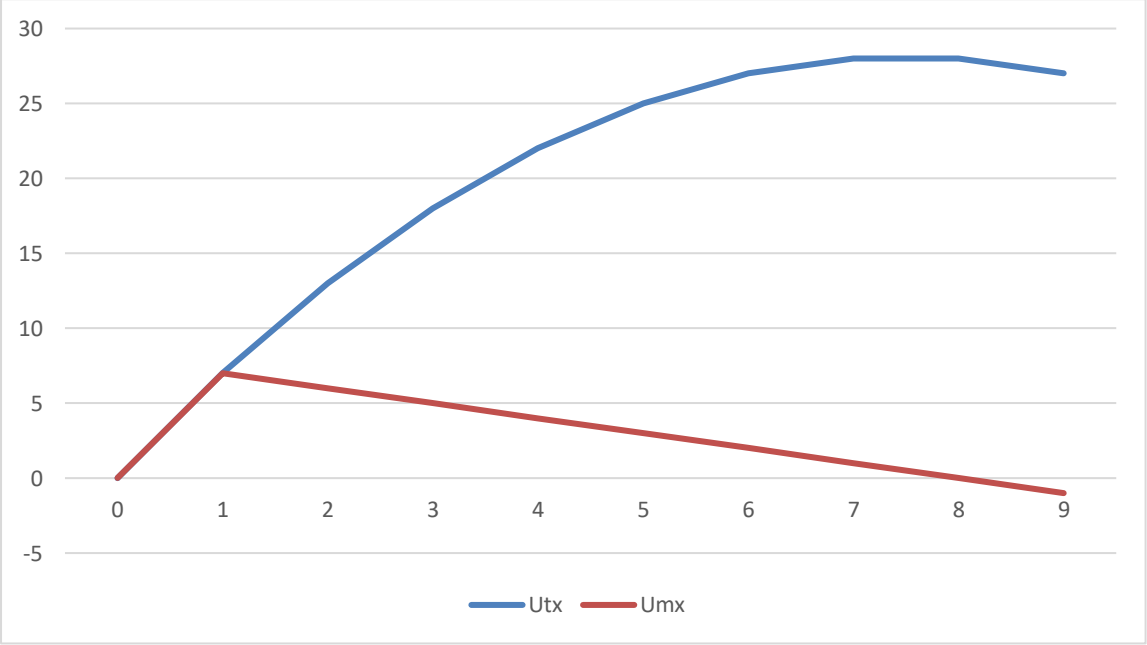
$$Umx = \frac{\Delta UTx}{\Delta Qx} = \frac{UT_n - UT_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}$$

Q_x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UT_x	0	7	13	18	22	25	27	28	28	27
Um_x	-	7	6	5	4	3	2	1	0	-1

$$Um_x = 1 = \frac{\Delta UT_x}{\Delta Q_x} = \frac{UT_1 - UT_0}{Q_1 - Q_0} = \frac{7-0}{1-0} = 7$$

$$Umx = 2 = \frac{\Delta UTx}{\Delta Qx} = \frac{UT_2 - UT_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{13-7}{2-1} = 6$$

2- **رسم منحنى المنفعة الكلية UT_x والحدية Um_x**



نلاحظ من خلال الرسم البياني ما يلي:

- إن منحنى المنفعة الكلية UT_x ينطلق من المبدأ (0،0) ثم يتزايد بمعدل متناقص أي أن المنفعة الكلية تتزايد بكميات متناقصة من جراء استهلاك وحدات متتالية، فعند استهلاك الوحدة الأولى زادت المنفعة الكلية من 0 إلى 7 وحدات، وعند استهلاك الوحدة الثانية زادت المنفعة الكلية بـ 6 وحدات أي انتقلت من 7 إلى 13 وحدة، وهكذا إلى غاية استهلاك الوحدة الأخيرة.
- أن منحنى النفقة الحدية Um_x متناقص وهذا يدل على أن منفعة الوحدات المستهلكة المتتالية تتناقص باستمرار، فالوحدة الأولى حققت للمستهلك منفعة قدرها 7 وحدات، والثانية حققت منفعة إضافية قدرها 6 وحدات أما الثالثة فقد

حققت 5 وحدات إلى غاية الوحدة التاسعة التي حققت له منفعة قدرها (1-)، وهذا ما يسمى بتناقص المنفعة الحدية، وهو يفسر على أساس أن المستهلك يكون متشوقا لاستهلاك الوحدات الأولى وبالتالي تعطيه إشباعا أكبر، وكلما زاد الاستهلاك كلما اقترب إلى حد التشبع وكلما قل تشوقه لاستهلاك المزيد، وبالتالي الوحدات الأخيرة تعطيه إشباعا أقل. يكون المستهلك في حالة تشبع عندما تكون المنفعة الحدية تساوي الصفر$(Um_x = 0)$.

حل التمرين الثالث:

1- قيد الميزانية:

$$R = xP_x + yP_y$$

2- **تحديد شرط التوازن**: يتحقق توازن المستهلك إذا تحقق شرط التوازن المكون من شرطين:

$\frac{\boldsymbol{Um_x}}{P_x} = \frac{\boldsymbol{Um_y}}{\boldsymbol{P_y}}$ الشرط

$\boldsymbol{R = xPx + yPy}$ الشرط المتمم

من خلال معطيات التمرين نكتب شرط التوازن كالتالي:

$$\frac{\boldsymbol{Um_x}}{\boldsymbol{12}} = \frac{\boldsymbol{Um_y}}{\boldsymbol{8}}$$

$$\boldsymbol{124 = 12x + 8y}$$

3- إيجاد الكميات المثالية من السلعتين x وy التي تحقق توازن المستهلك:

يمكننا تحديد مختلف التوليفات التوازنية لهذا المستهلك من خلال الجدول التالي:

Q_{xy}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Um_x	120	108	96	90	84	78	72	60	30	24
Um_y	140	130	120	90	48	32	28	24	14	12
$\frac{\boldsymbol{Um_x}}{\boldsymbol{Px}} = \frac{\boldsymbol{Um_x}}{\boldsymbol{12}}$	10	9	8	7.5	7	6.5	6	5	2.5	2
$\frac{\boldsymbol{Um_y}}{\boldsymbol{P_y}} = \frac{\boldsymbol{Um_y}}{\boldsymbol{8}}$	17.5	16.25	15	11.25	6	4	3.5	3	1.75	1.5

من خلال الشرط الضروري الأول تنتج التوليفة التوازنية التالية (x,y)=(7,5) وللتأكد من تحقيق التوليفة للشرط الثاني نقوم بالتعويض في قيد الميزانية:

$R= 12x + 8y \longrightarrow 12\times7 + 8\times5 = 124$

ومنه الشرط محقق والتوليفة المثلى لهذا المستهلك والتي تعظم له منفعته في حدود دخله المتاح 124 ون هي 7 وحدات من السلعة x و5 وحدات من السلعةy.

4- حساب المنفعة الكلية عند نقطة التوازن:

$$UT = \sum_{n=1}^{7} Um_x + \sum_{y=1}^{5} Um_y$$

$$= (120 + 108 + 96 + 90 + 84 + 78 + 72) + (140 + 130 + 120 + 90 + 48)$$
$$= 648 + 528 = 1176$$

حل التمرين الرابع:

لدينا:

$P_y = 2$, $P_x = 4$, $R=200$, $UT_X = xy$

1- إيجاد توازن المستهلك بطريقتين مختلفتين:

أ. **طريقة التعويض**: لدينا $UT_X = xy$ دالة المنفعة

قيد الدخل $R=4x + 2y$

- نقوم باستخراج y بدلالة x من قيد الدخل ثم نقوم بتعويضها في دالة المنفعة.
- نقوم بتطبيق الشرطين: الشرط اللازم: المشتق الأول يساوي الصفر
  الشرط الكافي: المشتق الثاني يجب أن يكون أقل من الصفر

استخراج y بدلالة x من قيد الدخل:

لدينا: $R=4x+2y \longrightarrow 200=4x+2y$

$2y= 200-4x \longrightarrow y= \frac{200-4x}{2}$

$$\mathbf{y= 100-2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

نعوض (1) في UT

$UT= x[100 - 2x] \longrightarrow$ $\mathbf{100x-2x^2=UT}$

$UT '=0 \longrightarrow 100-4x = 0 \longrightarrow 100 = 4x$ الشرط اللازم

$x=\frac{100}{4}= \mathbf{25}$

نعلم أن: $y=100-2x$ $y=100-2(25) \longrightarrow y=\mathbf{50}$

الشرط الكافي $UT "< 0 \longrightarrow (100x-2x^2)"< 0 \longrightarrow$

$(100-4x)' <0 \longrightarrow -4<0$

بما أن $UT"< 0$ فإن $x=25$ و $y=50$ هي الكمية التي تحقق التوازن لهذا المستهلك.

ب. **طريقة لاغرانج**: صيغة لاغرانج هي:

$L= f(x,y) + \lambda(R-xPx-yPy)$

الشرط اللازم المشتقات الجزئية:

$\frac{dl}{dx,y,\lambda} = 0$ أي $0= (\lambda, x, y)$

الشرط الكافي: المحدد أكبر من الصفر $det>0$

$L= f(x,y) + \lambda (R-xPx-ypy)$

$L= xy + \lambda(200-4x-2y)$

$\frac{dl}{dx} = 0 \longrightarrow y-4\lambda = 0$ …….(1) $y=4\lambda$

$\frac{dl}{dy} = 0 \longrightarrow x-2\lambda = 0$ ……..……(2) $x=2\lambda$

$\frac{dl}{d\lambda} = 0 \longrightarrow 200-4x-2y = 0$ ……...(3)

بقسمة المعادلة $\frac{(1)}{(2)}$ **نجد:**

$\frac{y}{x} = \frac{4\lambda}{2\lambda}= 2 \longrightarrow \frac{y}{x} = 2 \longrightarrow y= 2x$ ……(4)

بتعويض (4) في (3) نجد:

$200-4x-2(2x)=0$

$200-4x-4x=0 \longrightarrow 200-8x=0$

$200=8x \longrightarrow x=\frac{200}{8} = \mathbf{25} = x$

نعلم أن $y=2x$ $y=2(25)= \mathbf{50}$

الشرط الكافي المحدد أكبر من الصفر $det>0$ هناك طريقتين لحساب المحدد:

$$Det = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

طريقة المحددات الجزئية:

$$det = (0)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

طريقة إضافة الأعمدة:

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix} = [(000) + (1(-2)(-4)) + (-4(1)(-2)] - [(1)(1)(0) + (0)(-2)(-2) + (-4)(0)(-4)] = 16$$

بما ان المحدد أكبر من الصفر فإن x=25 وy=50 هي الكمية التي تحقق التوازن لهذا المستهلك.

2- حساب المنفعة الكلية UTx:

بما أن x=25 و y=50 فإن:

$$UT = 25 \times 50 = 1250$$