الفصل الرابع : الدوال الأصلية وحساب التكاملات

تعريف: التابع الأصلي للتابع f (أو تكامل f) هو التابع F بحيث : $f(x) = F'(x)$

من التعريف نستنتج أن الدالة $F(x) + c$ حيث c عدد ثابت، هي دوال أصلية (تكامل) للدالة f لكون مشتق الثابت يساوي الصفر ونكتب : $\int f(x)dx = F(x) + c$

ويسمى التكامل غير المحدود. يعني التكامل العملية العكسية للاشتقاق (التفاضل) و c يسمى ثابت التكامل.

مثال: لدينا: $\frac{d}{dx}(x^5) = (x^5)' = 5x^4$ ومنه $\int 5x^4dx = x^5 + c$

خواص التكامل غير المحدود

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ \ a \in \mathbb{R}$
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int f'(x)f^n(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c,\ \ n \neq -1$
4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$
5. $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$
6. $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)} + c$
7. $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x) + c$

التكاملات الشهيرة:

الدالة f	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ \ n \neq -1$
$(ax+b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c,\ a \neq 0,\ \ n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln|x| + c = \log|x| + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\log a} + c,\ \ a > 0$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$

$\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b}+c$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\log\left\|\dfrac{1+x}{1-X}\right\|+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+c$
$coshx$	$\sinh x+c$
$\sinh x$	$\cosh x+c$
$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x+c$
$\dfrac{1}{x-a}$	$\log\|x+a\|+c$
$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$-\log\|\cos x\|+c$
$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$	$-\log\|\sin x\|+c$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\log\|\tan\dfrac{x}{2}\|+c$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\log\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|+c$
a	$a\,x+c$

طرق التكامل: لمكاملة تابع علينا في البداية أن ننظر لصيغته فإذا كان يمثل مشتقا لتابع معلوم نستنتج تابعه الأصلي وإلا فإننا نعتمد على بعض الطرق وأهم هذه الطرق:

1) طريقة تبديل المتغير (التكامل بالتعويض)

لحساب التكامل $I=\int f(x)dx$ نضع $x=\phi(t)$ حيث ϕ تابع مستمر وقابل للاشتقاق نجد $dx=\phi'(t)dt$

نعوض في I نجد $I=\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ بعد إيجاد التكامل نعوض $\phi(t)$ ب x

مثال:1) أحسب التكامل $I=\int \frac{2}{3x-1}dx$

الحل: نضع

$$t=3x-1 \implies dt=3dx \implies dx=\frac{dt}{3}$$

ومنه : $I=\int \frac{2}{3t}dt=\frac{2}{3}\ln|t|+c=\frac{2}{3}\ln|3x-1|+c$

2) أحسب التكامل $I=\int\sqrt{1-x^2}\,dx$

الحل: بما أن $|x|\le 1$ نضع $t=\arcsin x \implies x=\sin x$ ومنه $dx=\cos t\ dt$ إذن :

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\ dt=\int\sqrt{\cos^2 t}\ \cos t\ dt=\int\cos^2 t\ dt$$
$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\ dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sin 2t}{2}+c$$
$$=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+c$$

3) طريقة التكامل بالتجزئة.

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

تستعمل في كثير من الحالات منها :

مثال1 : أحسب التكامل $I=\int x\ e^x\ dx$

الحل: نضع $g'(x)=e^x\ \ ,\ \ f(x)=x$ نجد $g(x)=e^x\ \ ,\ \ f'(x)=1$

ومنه : $I=xe^x-\int e^x\ dx=xe^x-e^x+c=(x-1)e^x+c$

مثال2 : حساب التكامل $\int x\sin x dx$

نضع : $g'(x)=\sin x\ \ ,f(x)=x$ نجد : $g(x)=\int\sin xdx=-\cos x\ \ ,2f'(x)=1$

ومنه :

$$\int x\sin xdx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$
$$=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+c$$

مثال3 : أحسب التكامل $\int\ln x\ dx$

نضع : $g'(x)=1\ \ ,f(x)=\ln x$ نجد $g(x)=\int 1dx=x\ \ ,\ \ f'(x)=\frac{1}{x}$

ومنه :

$$\int\ln xdx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}\ dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+c$$

مثال4 : أحسب التكامل $\int x\ln x\ dx$ نضع : $g'(x)=x\ \ ,f(x)=\ln x$ نجد

$$f'(x)=\frac{1}{x}\ \ ,\ \ g(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$

مثال5 : أحسب التكامل $I=\int e^x\ \cos(2x)\ dx$

نضع : $g_1'(x)=\cos(2x)\ \ ,\ \ f_1(x)=e^x$ ومنه : $g_1(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\ \ ,\ \ f_1'(x)=e^x$

$I=\frac{1}{2}e^x\sin(2x)-\frac{1}{2}\int e^x\ \sin(2x)\ dx$ نضع : $J=\int e^x\ \sin(2x)\ dx$

نكامل بالتجزئة ثانية . نضع : $g_2'(x)=\sin(2x)\ \ ,\ \ f_2(x)=e^x$ ومنه :

$$f_2'(x)=e^x\ \ ,\ \ g_2(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

إذن : $I = \frac{1}{2}e^x \sin(2x) - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}e^x \cos(2x) + \frac{1}{2}\int e^x \ \cos(2x)\ dx\Big) + c$

ومنه : $\Big(1 + \frac{1}{4}\Big)I = \frac{1}{2}e^x \sin(2x) + \frac{1}{4}e^x \cos(2x) + c$

إذن : $I = \frac{2}{5}e^x \sin(2x) + \frac{1}{5}e^x \cos(2x) + c$

تكامل الكسور الناطقة :

تعريف: نسمي دالة كسرية ناطقة كل دالة من الشكل $\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث f و g كثيرات حدود بدلالة x

- إذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ فإن الكسر يسمى كسرا عاديا و إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من درجة $g(x)$ فإن الكسر يسمى كسر غير عادي. يمكن تفكيك كل كسر عادي إلى مجموع كسور بسيطة من الشكل:

$\frac{A}{(x-r)^k}$ أو $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$ و ax^2+bx+c لا يقبل جذورا حقيقية.

مثال: الدوال $\frac{x-1}{x^2+1}$, $\frac{x(x+1)}{x^3+1}$, $\frac{1}{x(x^2+1)}$ هي دوال كسرية ناطقة.

الحالة الأولى: ليكن $\frac{f(x)}{g(x)}$ كسرا عاديا. إذا كان: $g(x) = (x+r_1)(x+r_2)(x+r_3)\cdots(x+r_n)$ حيث $r_1 \neq r_2 \neq \cdots \neq r_n$ فإن: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x+r_1} + \frac{A_2}{x+r_2} + \frac{A_3}{x+r_3} + \cdots + \frac{A_n}{x+r_n}$ حيث $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ ثوابت.

مثال: أوجد التكامل $\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx$

الحل : $\frac{2x+1}{x^2-4}$ كسر عادي ومنه:

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} = \frac{(A_1+A_2)x + 2(A_1-A_2)}{(x-2)(x+2)} \qquad (1)$$

بالمطابقة نجد: $A_1 + A_2 = 2$ و $2(A_1 - A_2) = 1$ أي $A_1 - A_2 = \frac{1}{2}$ ومنه $2A_1 = \frac{5}{2}$

إذن: $A_1 = \frac{5}{4}$ و $A_2 = A_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

نعوض A_1 , A_2 في (1) نجد: $\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{5}{4(x-2)} + \frac{3}{4(x+2)}$

إذن:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx = \int \frac{5}{4(x-2)} + \frac{3}{4(x+2)}$$
$$= \frac{5}{4}\int \frac{1}{x-2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{4}\ln|x+2| + c$$

الحالة الثانية: ليكن $\frac{f(x)}{g(x)}$ كسرا عاديا . إذا كان $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = (x+r)^n$ فإن:

$\frac{f(x)}{g(x} = \frac{A_1}{x+r} + \frac{A_2}{(x+r)^2} + \frac{A_3}{(x+r)^3} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(x+r)^{n-1}} + \frac{A_n}{(x+r)^n}$ حيث $A_1, A_2, A_3, \cdots A_{n-1}, A_n$ ثوابت.

مثال: أحسب $I = \int \frac{x-2}{(x+1)^3}dx$

الحل : لدينا

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{(x+1)^3} &= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} \\ &= \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3}{(x+1)^3} \\ &= \frac{A_1x^2 + (2A_1 + A_2)x + A_1 + A_2 + A_3}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد :

$$A_1 = 0 \quad , \quad 2A_1 + A_2 = 1 \quad , \quad A_2 + A_3 = -2$$

ومنه : $A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 1 \quad , \quad A_3 = -3$

إذن : $I = \int \frac{x-2}{(x+1)^3}dx = \int \Big(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3}\Big)dx = \frac{-1}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)^2} + c$

ملاحظة : يمكن استعمال الحالتين في آن واحد.

مثال : أحسب التكامل $I = \int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}\ dx$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} &= \frac{3x-1}{(x-1)^2(x+1)} \\ &= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 + A_3)x + A_1 - A_2 + A_3}{(x+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد : $A_1 + A_2 = 0 \ , \ -2A_1 + A_3 = 3 \ , \ A_1 - A_2 + A_3 = -1$

ومنه : $A_1 = -1 \ , \ A_2 = 1 \ , \ A_3 = 1$

إذن :

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}\ dx = \int \Big(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}\Big)\ dx \\ &= -\ln|x+1| + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c\end{aligned}$$

التكامل المحدود :

تعريف : لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ ولتكن F تكامل f فإن التكامل المحدود يعطى بـ :

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال : 1) أحسب التكامل $\int_1^2 x\ dx$

لدينا : $\int_1^2 x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

2)أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$

لدينا : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

خواص :

1) $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

3) إذا كان : $a \le c \le b$ فإن : $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

مثال : أحسب التكامل $\int_{-1}^2 |x|\ dx$

لدينا : $\int_{-1}^2 |x|\ dx = \int_{-1}^0 -x\ dx + \int_0^2 x\ dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{5}{2}$