Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées — Année Universitaire 2015-2016

Département des Sciences et de Technologie — Semestre 1

Promotion : 1ère année LMD ST

Matière : $Maths1$

Fiche de TD N° 03

Exercice 1

Soit $\mathrm{E} = [0,\ 1]$. On définit une loi $(*)$ sur E par :

$$\forall\ (x,y)\ \in \mathrm{E}^2;\ \ x * y = (x-1)(1-y)+1$$

1. Montrer que $(*)$ est une loi interne dans E, commutative et associative
2. Montrer que $(*)$ possède un élément neutre
3. Quels sont les éléments symétrisables de E

Exercice 2

i) Dans un espace vectoriel E, soit $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3)$ une famille libre, démontrer l'indépendance linéaire des vecteurs : $\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_3$ et $\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_3$

ii) Montrer que les vecteurs $a_1(1,\ 1,\ 1)$, $a_2(1,\ 2,\ 3)$ et $a_3(2,\ \text{-}1,\ 1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$ et calculer les composantes du vecteur $\mathrm{U}(1,\ 1,\ 1)$ suivant cette base

iii) Pour quelle valeur de m le vecteur X(1 ,-2 ,m) est-il une combinaison linéaire des deux vecteurs : $b_1(1,\ 1,\ 1)$, $b_2(1,\ 2,\ 3)$

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les sous-ensembles suivants :

$$F = \{(x, 0,\ z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x \le 0,\ z \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ y = 2z\}$$

1. Montrer que F n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
3. Trouver une partie génératrice de G
4. Déterminer une base de G et préciser sa dimension
5. Soit H un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$, donner la dimension H
6. Le vecteur $\mathrm{V}(1,\ 2,\ 1)$ appartient-il à G ?

Exercice 4

I) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x = z\}$;

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, trouver une base de F et déduire sa dimension
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x + 2y + z = 0\}$, montrer que G est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$
3. Déterminer $F \cap G$

II) Soit $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x = z = 0\}$;

1. Montrer que K est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Soit L le sous espace vectoriel engendré par $v_1(1,\ 2,\ 1)$ et $v_2(0,\ 1,\ 2)$

   Déterminer L, $L \cap K$ et déduire $L \oplus K$; le vecteur $w\ (1,\ 1,\ \text{-}1)$ appartient t-il à L ?
3. Soit H le sous espace vectoriel engendré par $v_1(1,\ 2,\ 1)$, $v_2(0,\ 1,\ 2)$ et $v_3(2,\ 5,\ 4)$

   Déduire le supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^3$; le supplémentaire est-il unique ?