الفصل الثاني:

مقاييس النزعة المركزية

1. الوسط الحسابي
2. الوسط الهندسي
3. الوسط التوافقي
4. الوسط التربيعي
5. المنوال
6. الوسيط
7. الربيعيات

مقاييس النزعة المركزية:

تسمى مقاييس النزعة المركزية بمقاييس الموضع أو المتوسطات، وهي تلك المقاييس التي تبحث في تقدير قيمة تتمركز حولها أغلبية القيم وهذه القيمة المتوسطة أو المتمركزة هي رقم واحد يعبر عن أو يمثل جميع بيانات تلك المجموعة.

1. الوسط الحسابي $\bar{X}$:

يعد الوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما في النواحي التطبيقية، ويمثل القيمة التي تتمركز حولها جميع القيم المختلفة للمتغير الكمي، يسمى أحيانا بالمتوسط أو بالمعدل ويرمز له بالرمز $\bar{X}$.

وفيما يأتي طرق إيجاد الوسط الحسابي:

1.1. الوسط الحسابي للبيانات الأولية (البيانات غير مبوبة):

❖ **الطريقة المباشرة:**

البيانات الأولية أو البيانات غير مبوبة هي بيانات في شكل سلسلة إحصائية، فإذا كانت x_1، x_2،...، x_n تمثل قيم الظاهرة المدروسة، فإن الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو مجموع هذه القيم مقسوما على عددها ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

حيث: $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$ (مجموع التكرارات)

❖ **الطريقة غير مباشرة (طريقة الانحرافات البسيطة أي طريقة الوسط الفرضي):**

يحسب الوسط الحسابي بالطريقة غير المباشرة (الطريقة المختصرة) عندما تكون قيم المشاهدات كبيرة لاختصار الحسابات من خلال الصيغة التالية:

$$\bar{X} = X_0 + \bar{D} = X_0 + \frac{\sum d_i}{n}$$

حيث: $d_i = \mathrm{x_i} - X_0$

X_0: قيمة الوسط الفرضي.

$\mathrm{x_i} - X_0$: انحراف قيم المتغير الاحصائي عن قيمة الوسط الفرضي.

ملاحظة: عند حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة أو غير مباشرة نجد نفس النتيجة.

مثال تطبيقي:

لدينا السلسلة الإحصائية التالية: 45، 34، 66، 45، 47، 87، 90.

نفرض أن قيمة الوسط الفرضي $x_0 = 34$.

- أحسب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة وغير مباشرة.

الحل:

- من خلال الطريقة المباشرة يكون حساب الوسط الحسابي كما يلي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{45 + 34 + 66 + 45 + 47 + 87 + 90}{7} = 59.14$$

- يحسب المتوسط الحسابي وفق الطريقة غير مباشرة كالآتي:

$$\bar{X} = X_0 + \bar{D} = X_0 + \frac{\sum d_i}{n}$$

لدينا: $d_i = \mathrm{x_i} - X_0$

نقوم بطرح قيمة الوسط الفرضي X_0 من بيانات المتغير X والجدول التالي يلخص ذلك:

$\mathbf{X}_i$	90	87	47	45	66	34	45	$\sum$
$d_i = \mathrm{x_i} - X_0$	56	53	13	11	32	0	11	176

بالتعويض في الصيغة أعلاه نجد:

$$\bar{X} = 34 + \frac{176}{7} = 59.14$$

2.1. الوسط الحسابي للبيانات المبوبة (مصنفة في جدول تكراري):

- **حالة متغير كمي منفصل:**

❖ **الطريقة المباشرة:**

الوسط الحسابي في حالة متغير كمي منفصل هو مجموع حاصل ضرب قيم المتغير الإحصائي في تكرارها مقسوما على مجموع هذه التكرارات ونكتب:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{n}$$

ملاحظة: يمكن حساب الوسط الحسابي بدلالة التكرارات النسبية fi فيصبح: $\bar{X} = f_i \times x_i$

❖ **الطريقة غير مباشرة:**

يمكننا استخدام الطريقة غير مباشرة بعد اختيار وسط فرضي من قيم المتغير X وليكن X_0 عندها تصبح الفروقات للمشاهدة i بالصيغة التالية $d_i = x_\mathrm{i} - X_0$ ، وتكون صيغة الحساب كالاتي:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{\sum n_i d_i}{n}$$

مثال تطبيقي:

إليك جدول التوزيع التكراري التالي:

عدد الأفراد X_i	3	4	5	6	7	8
عدد الأسر n_i	15	20	25	30	20	10

- أحسب $\bar{X}$ بالطريقتين المباشرة وغير مباشرة وذلك بأخذ $X_0 = 6$.

الحل:

نكون جدول للحسابات لكلا الطريقتين:

عدد الأفراد X_i	3	4	5	6	7	8	$\sum$
عدد الأسر n_i	15	20	25	30	20	10	120
$n_i \times x_i$	45	80	125	180	140	80	650
$\mathbf{x_i - X_0}$	-3	-2	-1	0	1	2	/
$\boldsymbol{n_i(x_i - X_0)}$	-45	-40	-25	0	20	20	-70

حساب $\bar{X}$ بالطريقة المباشرة: $$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{n} = \frac{650}{120} = 5.42$$

حساب $\bar{X}$ بالطريقة غير المباشرة:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{\sum n_i d_i}{n}$$

حيث: $d_i = x_i - X_0$

بالاعتماد على نتائج الجدول أعلاه نجد:

$$\bar{X} = 6 + \frac{(-70)}{120}$$

ومنه: $\bar{X} = 6 + (-0.58) \Rightarrow \bar{X} = 5.42$

التعليق: متوسط عدد الأفراد في الأسرة هو 5 أفراد (لم نأخذ القيمة بالفاصلة لأن المتغير كمي منفصل)

- **حالة متغير كمي متصل:**

❖ **الطريقة المباشرة:**

لحساب الوسط الحسابي في حالة المتغير الإحصائي المتصل (المستمر) والمعبر عنه بواسطة فئات، فإننا نحسب مراكز هذه الفئات C_i لتمثل الفئة بأكملها وبذلك فإن المتوسط الحسابي هو مجموع حاصل ضرب مراكز الفئات في تكراراتها مقسوماً على المجموع الكلي للتكرارات ونعبر عن ذلك رياضياً بالمعادلة التالية:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times c_i}{n}$$

❖ **الطريقة غير مباشرة:**

$$\bar{X} = X_0 + \frac{\sum n_i d_i}{n}$$

حيث ان $(d_i = c_i - X_0)$ تمثل انحراف مركز الفئة c_i عن الوسط الفرضي X_0 .

مثال تطبيقي:_

يمثل الجدول التالي الإنتاج الفلاحي حسب المناطق (قنطار في الهكتار):

المردودية	8–4	12–8	16–12	20–16	24–20	28–24	32–28
عدد المناطق n_i	2	5	11	27	18	8	3

- أحسب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة وغير مباشرة وذلك بأخذ $X_0 = 18$.

الحل:

نكون جدول للحسابات لكلا الطريقتين:

الفئات	8–4	12–8	16–12	20–16	24–20	28–24	32–28	$\sum$
n_i	2	5	11	27	18	8	3	74
$\boldsymbol{c_i}$	6	10	14	18	22	26	30	/
$\boldsymbol{n_i \times c_i}$	12	50	154	486	396	208	90	1396
$\boldsymbol{c_i - X_0}$	−12	−8	−4	0	4	8	12	/
$\boldsymbol{n_i(c_i - X_0)}$	−24	−40	−44	0	72	64	36	64

النتيجة بالطريقة المباشرة:

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i c_i}{n} = \frac{1396}{74} = 18.8648$$

النتيجة بالطريقة غير مباشرة:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{\sum n_i d_i}{n} = 18 + \frac{64}{74} = 18.8648$$

2. الوسط الهندسي (Moyenne Géométrique) MG:

المتوسط الهندسي واسع الاستعمال في الحياة الاقتصادية، لأن التركيز يكون غالبا منصبا على إيجاد متوسط نسب التغير لبعض الظواهر، مثل: معدل نمو الناتج، معدل زيادة الأجور والنمو السكاني، الأرقام القياسية...إلخ.

حالة بيانات غير مبوبة: $MG = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times ....\times x_n} = \left(x_1 \times x_2 \times ....\times x_n\right)^{\frac{1}{n}}$

حالة بيانات مبوبة: $MG = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \times x_2^{n_2} \times ....\times x_k^{n_k}} = \left(x_1^{n_1} \times x_2^{n_2} \times ....\times x_k^{n_k}\right)^{\frac{1}{n}}$

إذا كانت البيانات في السلسلة أو الجدول تحمل قيما كبيرة تصبح الحسابات ضخمة أو حتى مستحيلة وعليه لا نستعمل الصيغتين أعلاه، وإنما نلجأ إلى تبسيط البيانات بإدخال الحساب اللوغاريتمي.

- **حالة بيانات غير مبوبة:**

$$MG = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . \dots . x_n} \Rightarrow \bar{X}_G = (x_1 . x_2 . \dots . x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow log(MG) = \log(x_1 . x_2 . \dots . x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow log(MG) = \frac{1}{n}\log(x_1 . x_2 . \dots . x_n)$$

$$\Rightarrow log(MG) = \frac{1}{n}(\log(x_1) + \log(x_2) + \dots + log(x_n))$$

$$\Rightarrow log(MG) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

بعد إجراء الحسابات في الصيغة اللوغاريتمية نحسب MG كما يلي: $log(MG) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$

من هذه الصيغة نستنتج:

$$MG = 10^{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i\right)}$$

- **حالة بيانات مبوبة:**

$$MG = 10^{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \log x_i\right)}$$

3. الوسط التوافقي (Moyenne Harmonique) MH:

هو من المقاييس الخاصة التي تستخدم لتحديد معدلات السرعة ومتوسط الأسعار ومتوسط الكثافة السكانية.

- **حالة بيانات غير مبوبة:** $MH = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$

- **حالة بيانات مبوبة:** $MH = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{x_i}}$

4. الوسط التربيعي (Moyenne Quadratique) MQ:

- **حالة بيانات غير مبوبة:** $MQ = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$

- **حالة بيانات مبوبة:** $MQ = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{n}}$

ملاحظة:

- لحساب المتوسطات لبيانات مبوبة (حالة متغير كمي متصل) نعوض x_i بـ c_i.
- عند حساب المتوسطات السابقة يجب التحقق من العلاقة التالية: $MH \langle MG \langle \bar{X} \langle MQ$

مثال تطبيقي (حالة بيانات غير مبوبة):

لدينا السلسلة الإحصائية التالية: 5، 7، 18،11، 6، 9.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{5+7+18+11+6+9}{6} = 9.33$$

$$MG = \sqrt[6]{5\times7\times18\times11\times6\times9} = \left(5\times7\times18\times11\times6\times9\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$MG = 8.86$$

$$MH = \frac{6}{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{18}+\frac{1}{11}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{6}{0.2+0.14+0.05+0.09+0.17+0.11}$$

$$MH = 7.89$$

$$MQ = \sqrt{\frac{5^2+7^2+18^2+11^2+6^2+9^2}{6}}$$

$$MQ = 10.29$$

نلاحظ أن العلاقة السابقة محققة أي: $MH \langle MG \langle \bar{X} \langle MQ$

مثال تطبيقي (حالة بيانات مبوبة):

حساب الوسط الحسابي:

الفئات X_i	**التكرار** n_i	**مراكز الفئات** c_i	$n_i \times c_i$	$\frac{n_i}{c_i}$	$n_i \times c_i^2$	$n_i \log c_i$
15−5	3	10	30	0.3	300	3
25−15	5	20	100	0.25	2000	6.5
35−25	12	30	360	0.4	10800	17.72
45−35	25	40	1000	0.625	40000	40.05
55−45	35	50	1750	0.7	87500	59.46
65−55	13	60	780	0.22	46800	23.11
75−65	7	70	490	0.1	34300	12.91
$\sum$	100	/	4510	2.595	221700	162.75

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times c_i}{n} = \frac{4510}{100} = 45.1$$

حساب الوسط التوافقي:

$$MH = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{c_i}} = \frac{100}{2.595} = 38.53$$

حساب الوسط التربيعي:

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i c_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{221700}{100}} = \sqrt{2217} = 47.08$$

حساب الوسط الهندسي:

$$MG = 10^{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \log x_i\right)} = 10^{1.6275} = 42.41$$

نلاحظ أن العلاقة السابقة محققة أي: $MH \langle MG \langle \bar{X} \langle MQ$

5. المنوال (Mode) :

يمثل المنوال القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا من بين القيم المختلفة للمتغير العشوائي محل الدراسة، يرمز له بالرمز **Mo** أو **Mod** ويتم تحديد قيمة المنوال من خلال تحديد تكرار جميع القيم المختلفة للمتغير العشوائي إذا كانت البيانات غير مبوبة (بيانات خام)، بينما يتم الاستعانة بقاعدة رياضية إذا كانت قيم المتغير العشوائي متوفرة في جدول تكراري (بيانات مبوبة).

1.5. المنوال للبيانات غير مبوبة:

بالنسبة للبيانات الخام، يتم تحديد قيمة وحيدة للمنوال إذا وجدت قيمة واحدة تكررت أكثر من باقي القيم المختلفة للمتغير العشوائي، فمثلاً للقيم: 6، 4، 8، 8، 6، 11، 10، 6، 7،2 منوالا واحدا وهو $Mo = 6$.

كذلك يمكن أن يكون للبيانات أكثر من منوال إذا كان هنالك أكثر من قيمة واحدة لها نفس التكرار الأكثر من بين جميع التكرارات المتوفرة كما هو الحال في القيم: 5 9 2 6 4 2 5 3 1، حيث لدينا منوالان هما:

المنوال الأول: $Mo_1=2$

المنوال الثاني: $Mo_2=5$

وفي حال عدم تكرر أي قيمة من قيم المتغير العشوائي المختلفة أو أن لها نفس التكرار فانه في هذه الحالة لا يوجد منوال بين قيم المتغير العشوائي كما هو الحال في القيم: 2 4 3 5 2 1 4 5 3 1

وإذا كانت البيانات كيفية (نوعية) كأن نسأل مثلا ستة أشخاص عن أي الألوان المحببة لهم، قد تكون إجاباتهم كالتالي:

أزرق، أصفر، أبيض، أزرق، أبيض، أزرق.

المنوال في هذه الحالة هو اللون "الأزرق" .

2.5. المنوال للبيانات المبوبة:

- **حالة متغير كمي منفصل:**

المنوال لتوزيع تكراري بدون فئات يكون بنفس الطريقة السابقة حيث نجد القيمة التي تقابل أكبر تكرار في التوزيع.

مثال تطبيقي:

احسب المنوال للبيانات التالية:

5	10	15	20	25	30	X_i
4	17	19	13	12	5	n_i

الحل:

إن أكبر تكرار في الجدول أعلاه هو (19) لذلك فان المنوال هو القيمة المقابلة لهذا التكرار أي:

$Mo = 15$.

- **حالة متغير كمي متصل:**

في حالة التوزيعات الإحصائية المعبر عنها بواسطة الفئات بأطوال متساوية (متغير كمي مستمر)، حساب المنوال يكون كالتالي:

$$MO = x_{\min} + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times K_{MO} \right)$$

$x_{\min}$: الحد الأدنى للفئة المنوالية.

Δ_1 : هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تسبقها.

Δ_2 : هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تأتي بعدها.

K_{MO} : طول الفئة المنوالية.

في حالة عدم تساوي الفئات في الطول، لابد قبل حساب المنوال من تعديل التكرارات قصد الحفاظ على تناسق أطوال الفئات، وبعد تعديل التكرارات تظهر لنا الفئة الأكثر تكرارا، وحينئذ نحسب المنوال بتطبيق القانون المذكور أعلاه.

مثال تطبيقي:

90-80	80-70	70-60	60-50	50-40	40-30	30-20	20-10	**الفئات** X_i
2	3	5	3	2	3	2	1	**التكرار** n_i

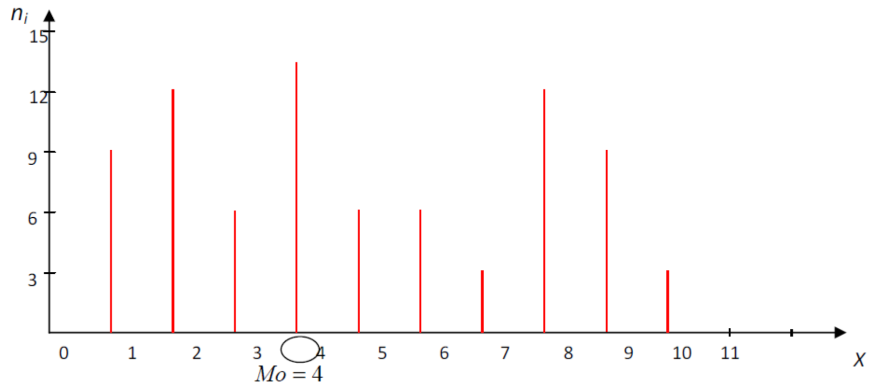
لحساب المنوال في هذه الحالة نقوم أولا بتعيين الفئة المنوالية وهي الفئة التي تقابل أكبر قيمة للتكرارات ثم نحسب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي قبلها Δ_1 ثم نحسب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي بعدها وليكن Δ_2، الحد الأدنى للفئة المنوالية وطول الفئة فنحصل على المنوال كما يلي:

$$Mo = 60 + \left(\frac{5-3}{(5-3)+(5-3)} \times 10 \right) = 65$$

3.5. إيجاد المنوال بيانيا:

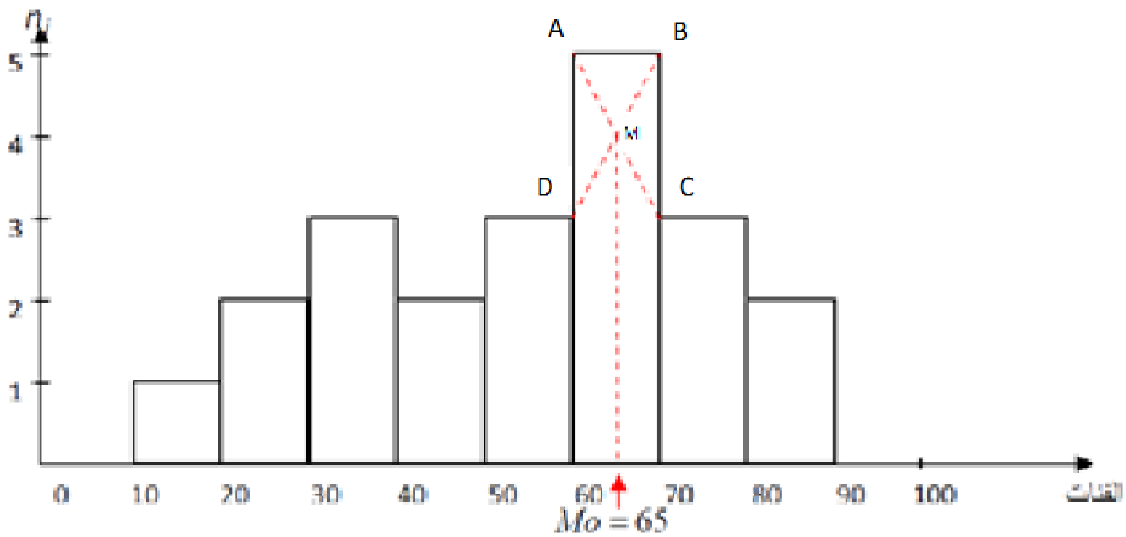
- **حالة متغير كمي منفصل:**

نستخرج المنوال من مخطط الأعمدة البيانية، وهو قيمة المتغير الإحصائي التي تناسب الخط العمودي الأكثر ارتفاعا في الرسم كما في المثال التالي:



- **حالة متغير كمي متصل:**

من المدرج التكراري يمكن استخراج المنوال مثلما يوضحه الرسم:



وذلك وفقاً لما يلي:

1− نرسم المدرج التكراري موضحاً الفئة المنوالية والفئة التي قبلها والفئة التي تليها.

2− نوصل بين رأس الفئة المنوالية والزاويتين المجاورتين للفئة المنوالية أي AC، BD.

3− نسقط من نقطة الالتقاء M عموداً على محور السينات وهنا يمكن تعيين النقطة Mo التي تمثل قيمة المنوال بشكل تقريبي وبصورة بيانية.

ملاحظة: لإيجاد المنوال بيانيا يكفي رسم الفئة المنوالية والفئة التي قبلها والفئة التي تليها.

6. الوسيط (Median):

الوسيط هو قيمة المتغير الإحصائي التي تقسم السلسلة الإحصائية إلى قسيمين متساويين بعد ترتيب القيم ترتيبا تصاعدياً بحيث تكون كل قيمة من القيم التي تسبقه أصغر منه وكل قيمة من القيم التي تليه أكبر منه، أما إذا كانت القيم مرتبة تنازلياً فتكون القيم التي تسبقه أكبر والتي تليه أصغر. يرمز للوسيط بالرمز ***Me*** أو **Med** ونقوم بحسابه كالتالي:

1.6. الوسيط للبيانات غير مبوبة:

إذا كان لدينا عدد معين من المعطيات (*n*) لحساب الوسيط نقوم أولا بترتيب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.

إذا كان عدد القيم (*n*) فرديا، فإن الوسيط هو قيمة المتغير الإحصائي الذي رتبته $\frac{n+1}{2}$.

أما إذا كان n عدداً زوجياً فالوسيط هو متوسط القيمتين من الرتبة $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ على التوالي.

أمثلة :

- أوجد الوسيط لهذه البيانات : 3، 2، 5، 6، 1، 2، 10.

نقوم بترتيب هذه القيم تصاعدياً 1، 2، 2، 3، 5، 6، 10.

بما أن $n = 7$ (عدد القيم) هو عدد فردي فإن الوسيط هو القيمة التي رتبتها وبالتالي : $4 = \frac{7+1}{2}$

أي أن القيمة المطلوبة هي الرابعة وبالتالي فإن $Me = 3$

- أوجد وسيط البيانات التالية: 4، 2، 6، 1، 3، 8، 10، 11.

نرتب هذه القيم ترتيبها تصاعدياً 1، 2، 3، 4، 6، 8، 10، 11.

بما أن $n = 8$ هو عدد زوجي فإن الوسيط هو متوسط القيمتين من الرتبة أي $4 = \frac{8}{2}$ و $5 = 1 + \frac{8}{2}$ بالتالي فهو الوسط الحسابي للقيمتين الرابعة والخامسة

$$Me = \frac{4+6}{2} = 5$$

2.6. الوسيط للبيانات المبوبة:

- **حالة متغير كمي منفصل:**

حساب الوسيط في حالة متغير كمي منفصل لا يختلف عن اسلوب الحساب للبيانات غير المبوبة ولكن يتم الاعتماد على التكرارات التجميعية ومجموعها.

نقوم بتحديد رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ إذا كانت موجودة ضمن التكرارات المتجمعة، فإن الوسيط يكون محصورا بين قيمتين ويساوي معدلهما.

وإذا كانت القيمة $\frac{n}{2}$ غير موجودة ضمن التكرارات المتجمعة، فإن الوسيط يكون قيمة واحدة منفردة.

مثال تطبيقي 01: إيجاد الوسيط للبيانات التالية:

المبيعات X_i	20	23	26	29	32	$\sum$
التكرار n_i	4	14	10	5	2	35
$n_i^{\nearrow}$	4	18	28	33	35	/

لحساب الوسيط في حالة متغير كمي منفصل نتبع الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- حساب رتبة الوسيط حيث ان n=35، ومنه الوسيط هو القيمة ذات الترتيب:

$$\frac{n}{2}=\frac{35}{2}=17.5$$

- قيمة الوسيط تقابل قيمة التكرار المتجمع الصاعد الأكبر أو تساوي رتبة الوسيط (18) والتي تقابل القيمة 23، ومنه فان الوسيط $\boldsymbol{Me}=23$.

مثال تطبيقي 02: إيجاد الوسيط للبيانات التالية:

عدد الأفراد X_i	3	4	5	6	7	8	$\sum$
عدد الأسر n_i	15	20	25	30	20	10	120
$n_i^{\nearrow}$	15	35	60	90	110	120	/

لإيجاد الوسيط نتبع نفس الخطوات السابقة حيث نقوم بحساب التكرار المتجمع الصاعد ثم رتبة الوسيط حيث ان n=60، ومنه رتبة الوسيط هي: $\frac{n}{2}=\frac{120}{2}=60$ قيمة التكرار المتجمع الصاعد الأكبر أو تساوي رتبة الوسيط هي القيمة 60 (ليس بالضرورة أن تتساوى القيمتين قلنا تساوي أو أكبر) ومنه الوسيط هو متوسط القيمتين 5 و6 أي:

$$Me=\frac{5+6}{2}=5.5$$.

- **حالة متغير كمي متصل:**

لحساب الوسيط في حالة متغير كمي متصل نتبع الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد.
- حساب رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$.
- إيجاد الفئة الوسيطية وهي الفئة التي تقابل قيمة التكرار المتجمع الصاعد الأكبر أو تساوي رتبة الوسيط.
- حساب الوسيط باستخدام العلاقة التالية:

$$Me=x_{min}+\left(\frac{\frac{n}{2}-n_{-1}^{\nearrow}}{n_{Me}}\times K_{Me}\right)$$

$x_{\min}$: الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$\boldsymbol{n_{-1}^{\nearrow}}$: التكرار المتجمع الصاعد ما قبل الفئة الوسيطية.

n_{Me} : التكرار المطلق للفئة الوسيطية.

K_{Me} : طول الفئة الوسيطية.

مثال تطبيقي: إيجاد الوسيط

الفئات X_i	التكرار n_i	التكرار التجميعي الصاعد $n_i^{\nearrow}$
15−5	3	3
25−15	5	8
35−25	12	20
45−35	25	45
55−45	35	80
65−55	13	93
75−65	7	100
$\sum$	100	/

- نقوم بحساب التكرار المتجمع الصاعد.
- حساب رتبة الوسيط: $\frac{n}{2}=\frac{100}{2}=50$.

لاحظ عمود التكرار التجميعي الصاعد تجد أن: 80 هي القيمة الأكبر من 50 مباشرة وهي تقابل الفئة الخامسة وعليه فإن الفئة 45−55 هي الفئة الوسيطية.

وبتطبيق العلاقة السابقة نجد أن وسيط البيانات هو:

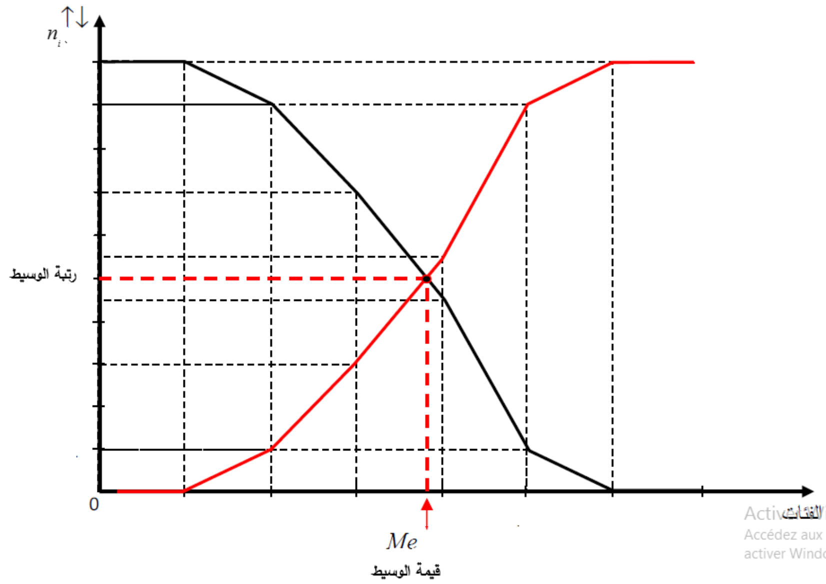
$$Me = 45 + \frac{50-45}{35} \times 10 = 46.43$$

3.6. الوسيط بيانيا:

الوسيط بيانيا هو نقطة تقاطع كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل، كما يمكن تحديده باستخدام أحد هذين المنحنيين ويكون ذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:

- رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل؛
- تحديد رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ على محور التراتيب ثم رسم مستقيم أفقي ينطلق من رتبة الوسيط حتى يلامس منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل؛

- رسم مستقيم عمودي ينطلق من نقطة التماس السابقة وينتهي مع ملامسة المحور الأفقي، حيث تعطي نقطة التماس مع محور الفواصل قيمة الوسيط.



7. الربيعيات (Quartiles):

الربيعيات من أشباه الوسيط وهي الناتجة من تقسيم البيانات إلى أربع أقسام متساوية، وبالتالي كل قسم يمثل 25 % من البيانات.

1.7. الربيع الأول :

تقسم البيانات إلى 25 % من القيم أقل من قيمة الربيع الأول و 75 % من القيم أكبر من قيمة الربيع الأول، نرمز له بالرمز Q_1 ، ويحسب كما يلي:

- **الربيع الأول للبيانات غير مبوبة:**

إذا كانت الرتبة $\frac{n+1}{4}$ عدد طبيعي(دون فواصل) نأخذ القيمة مباشرة.

مثال: لدينا السلسلة الإحصائية التالية:

3 5 4 1 8 7 8 نرتبها تصاعديا: 1 3 4 5 7 8 8

نحسب الرتبة $2 = \frac{7+1}{4}$ إذن Q_1 هو من الرتبة 2 ومنه: $Q_1 = 3$

إذا كانت الرتبة $\frac{n+1}{4}$ عدد غير طبيعي (وجود فواصل) نأخذ متوسط القيمتين، مثلا لدينا السلسلة الإحصائية التالية والمرتبة تصاعديا:

2، 3، 5، 9، 11، 13، 13، 15

نحسب الرتبة $2.25 = \frac{8+1}{4}$ إذن Q_1 هو متوسط القيمتين من الرتبة 2 و3:

$$Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

- **الربيع الأول للبيانات المبوبة:**

إذا كانت البيانات مبوبة نتبع نفس خطوات الوسيط مع تغيير الرتبة فقط، أي حساب الرتبة $\frac{n}{4}$.

- **حالة متغير كمي منفصل:**

المثال السابق: إيجاد الربيعي الأول

عدد الأفراد X_i	3	4	5	6	7	8	$\sum$
عدد الأسر n_i	15	20	25	30	20	10	120
$n_i^{\nearrow}$	15	35	60	90	110	120	/

بعد أن حسبنا التكرار المتجمع الصاعد نحسب رتبة الربيعي الأول: $\frac{n}{4} = \frac{120}{4} = 30$

قيمة التكرار المتجمع الصاعد الأكبر أو تساوي رتبة الربيعي الأول هي القيمة 35 وهي تقابل القيمة 4 ومنه: $Q_1 = 4$

- **حالة متغير كمي متصل:**

المثال السابق: إيجاد الربيعي الأول

الفئات X_i	التكرار n_i	التكرار التجميعي الصاعد $n_i^{\nearrow}$
15−5	3	3
25−15	5	8
35−25	12	20
45−35	25	45
55−45	35	80
65−55	13	93
75−65	7	100
$\sum$	100	/

بعد أن حسبنا التكرار المتجمع الصاعد نحسب رتبة الربيعي الأول: $\frac{n}{4} = \frac{100}{4} = 25$

- إيجاد الفئة الربيعية الأولى وهي الفئة التي تقابل قيمة التكرار المتجمع الصاعد الأكبر أو تساوي رتبة الربيعي الأول.

قيمة التكرار المتجمع الصاعد الأكبر أو تساوي رتبة الربيعي الأول هي القيمة 45 وهي تقابل الفئة 35−45 وهي الفئة الربيعية الأولى.

- حساب الربيعي الأول باستخدام العلاقة التالية:

$$Q_1 = x_{min} + \left(\frac{\frac{n}{4} - n^{\nearrow}_{-1}}{n_{Q_1}} \times K_{Q_1} \right)$$

- $x_{\min}$: الحد الأدنى للفئة الربيعية الأولى.
- $n^{\nearrow}_{-1}$: التكرار المتجمع الصاعد ما قبل الفئة الربيعية الأولى.
- n_{Q_1} : التكرار المطلق للفئة الربيعية الأولى.
- K_{Q_1} : طول الفئة الربيعية الأولى.

$$Q_1 = 35 + \left(\frac{25-20}{25} \times 10 \right) = 37$$

2.7. الربيع الثالث :

تقسم البيانات إلى 75 % من القيم أقل من قيمة الربيع الثالث و 25 % من القيم أكبر من قيمة الربيع الثالث، ونرمز له بالرمز Q_3 .

لحساب الربيعي الثالث نتبع نفس الخطوات السابقة مع تغيير الرتبة فقط.

في حالة سلسلة إحصائية نحسب الرتبة $\frac{3(n+1)}{4}$ ونتبع نفس طريقة الربيعي الأول.

في حالة بيانات مبوبة نحسب الرتبة $\frac{3n}{4}$ ونتبع نفس طريقة الربيعي الأول في حالة متغير كمي منفصل أو متصل.

ملاحظة:

يسمى الفرق بين الربيعي الثالث والربيعي الأول بالمدى الربيعي **(Interquartile range)**، يرمز له بالرمز I_Q ونكتب:

$$\mathbf{I_Q = Q_3 - Q_1}$$

❖ **تحديد شكل التوزيع باستخدام مقاييس النزعة المركزية:**