Université de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière

Niveau : 1ère année Licence.
Spécialité : ST +SM.
module : Mathématiques 01.
Année : 2022-2023, Semestre1

Serie d'éxercices N4 : Espaces vectoriels-Applications linéaires

---

Exercice 1 : Lois de composition internes-Structures algébriques

Soit $\star$ une loi de composition définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \star y = x + y + \frac{1}{6}$$

1. Vérifier que $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.
2. $\star$ est elle commutative ? associative ?
3. Trouver l'élément neutre pour la loi $\star$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que a est inversible dans $\mathbb{R}$ par rapport à la loi $\star$
5. $(\mathbb{R}, \star)$ est il un groupe ? justifier.

Exercice 2 : Sous espaces vectoriels

Parmi les ensembles suivants quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

1. $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$
2. $A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 2\}$
3. $A_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = 2z = 4t\}$
4. $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$
5. $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$
6. $A_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - 5z = 0\} \bigcap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$
7. $A_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - 5z = 0\} \bigcup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$

Exercice 3 : Combinaisons linéaires

1. Montrer que le vecteur $w = (18, 30)$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (4, 2)$ et $u_2(2, 3)$
2. Même question $w = (1, -2, 3)$, $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ et $u_3 = (1, -1, 1)$.

Exercice 4 : Vecteurs linéairement indépendants-Familles libres-Familles génératrices

1. Les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (4, 1, 4)$ et $u_3 = (2, -1, 4)$ sont ils linéairement indépendants ?

2. Les familles (u_1, u_2), (u_1, u_3) sont elles libres.
3. Étudier la dépendance linéaires des familles suivantes :
   — $(\sin(x), \cos(x))$
   — $(\sin(2x), \cos(x), \sin(x))$
   — $(x, e^x, \sin(x))$
4. Déterminer les familles génératrices des espaces suivants :
   — $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$
   — $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$

Exercice 5 : Bases

1. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   — Trouver dans cette base les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$.
2. Soit $P_5[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à 5. On définit E_1, E_2 par
$$E_1 = \{p \in P_5[X]/p(0) = 0\}; \qquad E_2 = \{p \in P_5[X]/(x^2 + 1) \text{ divise } p\}$$
   — Montrer que E_1, E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $P_5[X]$
   — Déterminer les bases de E_1, E_2 et $E_1 \bigcap E_2$.

Exercice 6 : Bases

Soients f_1, f_2, f_3, f_4 des fonctions définies de $]-1\,1[$ dans $\mathbb{R}$ par
$$f_1(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}},\ f_2(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

— Déterminer une base de l'espace $\mathbb{F}$ engendré par les vecteurs f_1, f_2, f_3, f_4

Exercice 7

Soient $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -2, -1), u_3 = (1, 1, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On considère les deux ensembles E, F tel que
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}, \quad F = Vect(u_1, u_2)$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille u_1, u_2, u_3 est elle libre.
3. Est ce que $u_3 \in F$.
4. Donner une base de $E \bigcap F$.
5. Soit $u_4 = (-1, 7, 5)$. Est ce que $u_4 \in E$? Est ce que $u_4 \in F$.

Exercice 8

les applications suivantes sont elles linéaires ?

1. $f_1 : \ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_1(x, y, z, t) = (x - y + 2t, 2z - x + 2t, y + z - 2t + 3)$
2. $f_2 : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_2(x, y, z) = (2x + 3xy, x - 2y, z - x)$
3. $f_3 : \ P(\mathbb{R}) \longrightarrow P(\mathbb{R}), \quad f_3(p) = p'$, où p' est la dérivée de p.

Exercice 9

Soit $f : \ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, t) = (-3y + 2z + t, x + 3t, x - y + z + 3t, y - z)$

1. Trouver $Imf, Kerf$
2. Vérifier le théorème de dimension.