Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana 1^{ere} **Année, ST+SM :2022/2023**
Faculté : des Sciences et de la Technologie

Série d'exercices N° 3
Fonction réelles - Limites - Continuité - Dérivation

Exercice 1 :(domaine de définition)

Calculer le domaine de définition des fonctions f définies de la façon suivante :

1) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-5x}$, 2) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2e^x-3}{e^x+1}\right)$, 3) $f(x)=\sqrt{x^2-3+\dfrac{2}{x}}$,

4) $\ln(\ln(\ln x))$, 5) $f(x)=\dfrac{\ln(4-\mid x-1\mid)}{\sqrt[3]{2-x}}$, 6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\mid x\mid}{2-\mid x\mid}}$

Exercice 2 : (parité)

Après avoir donné leur domaine de définition, dire si les fonctions définies de la façon suivante sont **paires, impaires** ou **ni lune ni lautre**.

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-\mid x\mid}{2-\mid x\mid}}\qquad g(x)=\sin(x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\qquad h(x)=\frac{\ln(1+x)}{\mid x\mid}\qquad I(x)\ =x^3+\tan(x)$$

Exercice 3 : (limites)

Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x-\sin x}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}x^3\ln x$ 7) $\lim\limits_{x\to0^+}(x)^{\frac{1}{3\ln x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+3x\right)^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos^2x}{\sin x}$ 10) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin(\dfrac{1}{x})$ 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2x}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{-7}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}}$ 15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 16) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$ 18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$ 19) $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$ 20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{e^{2x}-1}$ 22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^x$ 23) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 24) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2^{x-3}-1}{x-3}$

Exercice 4 : (dérivabilité)

1) Donner et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x)=\left(\sin x+\ln(4+x^2)\right)^{\frac{3}{7}}\qquad g(x)=(\cosh)^{\cos^2x}\qquad h(x)=(1+x^2)\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$k(x)=\arcsin\left(\frac{2e^x-3}{e^x+1}\right)\qquad j(x)=\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\qquad l(x)=\ln\left(\cos(\frac{1}{x})\right)$$

2) Étudie la dérivabilité sur le domaine de définition :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & x<0,\\ 1 & x=0,\\ x^2+1 & x>0.\end{cases}$$

Exercice 5 (continuité)

1) Déterminer toutes les valeurs des constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ telles que la fonction g suivante soit continue :

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma x(e^{x} - e^{-x}) & 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & x \geq 1 \end{cases} ;\ g_2(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0, \\ \alpha x + \beta & 0 < x \leq 1, \\ \sqrt{x+3} & x > 1. \end{cases} g_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x} & x < 0, \\ 1 & x = 0, \\ e^{\beta x} - x & x > 0. \end{cases}$$

2) Étudier la continuité sur le domaine de définition , puis le prolongement par continuité des fonctions suivantes s'il existe :

$$1) f(x) = \frac{\sin x}{\mid x \mid} \qquad 2) f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{\frac{1}{x}} \qquad 3) f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \arctan x$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{x} & ,\ x = 0 \\ 1 & ,\ x \neq 0 \end{cases} \quad 5) f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x} & ,\ x \in]0, \pi[\\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$$