Université de Khemis – Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

Niveau : L1

Spécialité : SM & ST

Module : Mathématiques I

Série d'exercices n°2 : Relations et Applications

I. Relations

Exercice n°1 : Soit R une relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ xRy \Leftrightarrow x(3+y^2) = y(3+x^2).$$

1. Démontrer que R est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $\overline{2}$ la classe d'équivalence de l'entier 2.

Exercice n°2 : Soit R une relation définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \ xRy \Leftrightarrow \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer si $7R5$, $6R9$, $4R4$.
2. Démontrer que R est une relation d'équivalence.
3. Déterminer la classe $\bar{a}$ de l'élément $a \in \mathbb{N}$ et montrer qu'il y a uniquement trois classes d'équivalence différentes.

Exercice n°3 : Soient E, F deux ensembles et $f: E \longrightarrow F$ une application. On définit une relation R sur E par : $\forall x, x' \in E, \ xRx' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur E.
2. Décrire la classe $\bar{a}$ de l'élément $a \in E$.
3. Décrire la classe $\bar{a}$ de l'élément a si l'application f est injective.

Exercice n°4 :

Déterminer si les relations R ci-dessous sont- elles des relations d'ordre :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ xRy \Leftrightarrow e^x \leq e^y$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xRy \Leftrightarrow |x+1| \leq |y+1|$.
3. $\forall x, y \in]1, +\infty[, \quad xRy \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

II. Applications

<u>Exercice n°5 :</u>

1. Par un contre-exemple montrer que les applications suivantes ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$:

$a)\ f(x) = \sin(2x) + 3 \qquad b)\ g(x) = |x^2 - 5x + 6| \qquad c)\ h(x) = \frac{x^4}{4+x^2}$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations :

$$f(x) = 5, \quad g(x) = -7 \quad \text{et} \quad h(x) = -1.$$

Que peut-on déduire de la surjectivité de ces applications.

<u>Exercice n°6:</u> Considérons la fonction $f: \mathbb{R} - \{1/2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}.$$

1. Montrer que f est injective et déterminer si f est surjective.
2. Trouver l'ensemble F tel que f est bijective de $\mathbb{R} - \{1/2\}$ vers F, puis calculer la fonction réciproque f^{-1}.
3. Déterminer la fonction composée $f \circ f$ et déterminer par une deuxième méthode la fonction réciproque $f^{-1}: F \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

<u>Exercice n°7:</u> Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1. Déterminer l'image directe $f(A_1)$ et $f(A_2)$ avec $A_1 = \{\ 0, \frac{1}{4}, \sqrt{8}, 4\}$ et $A_2 = [2, 3]$.
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$ avec $B_1 = \{-1\}, \quad B_2 = \{0, 1/2\}$.

3. La fonction f est-elle injective ? surjective ? justifier.
4. Montrer que $f\ :]1, +\infty[\longrightarrow]0, 1/2[$ est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.