Université de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

Niveau : $1^{\text{ère}}$ année Licence.
Spécialité : ST +SM.
Module : Mathématiques 01.

Serie d'exercices N° 1 : Méthodes de raisonnement-Ensembles

---

1 Raisonnement

Exercice 1 : Raisonnement directe

1. La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
2. Soient x, y deux réels positifs donnés. Montrer que si $x \leq y$ alors $x \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$ et $x \leq \sqrt{xy} \leq y$.
3. Soient x, y deux réels positifs non nuls. Montrer que $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1 = \dfrac{x+y}{2} \Longrightarrow x = y = 1\right)$.
4. Montrer que ($x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow -3x^2 + 5y \in \mathbb{Q}$).
5. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.

Exercice 2 : Raisonnement cas par cas

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 1$ est un nombre impair.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est un multiple de 3.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (i) $x^2 - 2|x| = 0$,
   (ii) $x^2 - 3|x - 2| - 4 = 0$.

Exercice 3 : Raisonnement par contre exemple
Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

1. La somme de deux nombres impairs est impair.
2. Tout entier n divisible par 2 et par 6 est divisible par 12.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 + \sqrt{x} > 2$.

Exercice 4 : Raisonnement par l'absurde

1. Soit n un entier non nul. Montrer que $\sqrt{n^2 + 14} \notin \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout entier non nul n on a (n^2 est pair $\Longrightarrow n$ est pair).
3. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

4. Soient m, n deux entiers. Montrer que $(m + n\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow m = n = 0)$.
5. Montrer que $\sqrt{x^2+1} \neq 1 + \frac{x^2}{2}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 5 : Raisonnement par contraposé

1. Soit n un entier non nul. Montrer que si $(n^4 + n^2 \ \text{ est impair} \Longrightarrow n \text{ est pair})$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Montrer que $x \neq -4 \Longrightarrow \dfrac{2x-1}{x+1} \neq 3$.
3. Soient x, y deux réels. Montrer que si $x + y > 1$ alors $x > \frac{1}{2}$ ou $y > \frac{1}{2}$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $y \neq 0$ alors $x + y\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6 : Raisonnement par recurrence

1. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a
$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, on a $2^n > n^2$.
4. Montrer que pour tout entier $n, 7^n - 1$ est divisible par 6.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ n^3 - n$ est un multiple de 3.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} (k! \times k) = (n+1)! - 1.$$

2 Ensembles

Exercice 7 :

1. Donner les ensembles suivants :
   — $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 4 < 0\}$
   — $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 < 0\}$
   — Que peut on dire de l'ensemble $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 4 < 0\}$
2. Soient E, F deux ensembles tels-que :
   $E = \{x \in \mathbb{R} / \ \ |x+2| \geq 1\}, F = \{x \in \mathbb{R} / \ \ |x-1| \leq 1\}$,
   Donner $E, F, E \cap F, \complement E, \complement F, \overline{E \cap F}, \overline{E} \cup \overline{F}$.

Exercice 8 :

1. Donner les ensembles suivants
   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 1\}$
   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 0\}$
   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ et } y > 0\}$
   $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$
2. Représenter dans un repère orthonormé les ensembles : $A \cap B, A \cap B \cap C, D \cup F$