الفصل الثالث : النهايات والدوال المستمرة و مشتقات الدوال والدوال المألوفة.

1) النهايات والدوال المستمرة.

الدوال ذات متغير حقيقي.

عموميات على الدوال.

تعريف: الدالة بمتغير حقيقي هي عبارة عن تطبيق من مجال I $(I \subseteq \mathbb{R})$ نحو $\mathbb{R}$ ، نرمز للدالة عادة بـ f. ولمجموعة الدوال بـ $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

المجموعة $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \text{ معرفة}\}$ هي مجموعة تعريف الدالة f.

المجموعة $C_f = \{(x, f(x));\ \ x \in D_f\}$ هي بيان الدالة f.

الدوال الزوجية والفردية والدورية.

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجموعة متناظرة بالنسبة للصفر D_f.

- نقول عن f أنها زوجية إذا كان: $\forall x \in D_f,\ \ f(-x) = f(x)$

ومنه: بيان f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

- نقول عن f أنها فردية إذا كان: $\forall x \in D_f,\ \ f(-x) = -f(x)$

ومنه: بيان f متناظر بالنسبة للمبدأ.

مثال : لتكن

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 \qquad\qquad x \longmapsto g(x) = x$$

لدينا: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ، $g(-x) = -x = -g(x)$

ومنه: f دالة زوجية و g دالة فردية.

تعريف: نقول عن f أنها دورية و دورها $T > 0$ إذا كان: $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x+T) = f(x)$

مثال: الدوال $\sin x$ و $\cos x$ هي دوال دورية دورها $T = 2\pi$

لأن: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ، $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

النهايات والاستمرار.

النهايات.

تعريف: ليكن $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ و $\ell \in \mathbb{R}$ نقول عن f أنها تقبل نهاية عند $a \in \mathbb{R}$ إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in I;\ \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

في حالة وجود النهاية فهي وحيدة ونكتب: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

- إذا كانت f معرفة عند a وكانت النهاية موجودة فإن: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- نرمز لنهاية f من اليمين عند a بـ : $\lim\limits_{x \to > a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell_d$
- نرمز لنهاية f من اليسار عند a بـ : $\lim\limits_{x \to < a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell_g$

عمليات على النهايات.

لتكن $f,g\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

إذا كان: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell_1$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell_2$ فإن:

1) $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big)=\ell_1+\ell_2$

2) $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x).g(x)\Big)=\ell_1.\ell_2$

3) إذا كان: $\ell_2\neq 0$ و $\forall x;\ \ g(x)\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$$

حالات عدم التعيين.

نرمز عادة لحالات عدم التعيين بـ : ح.ع.ت. بعض حالات عدم التعيين هي:

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\times\infty,-\infty+\infty,1^{\infty},0^0,0^{\infty},\infty^0,\cdots$$

الاستمرار.

تعريف: لتكن f دالة حقيقية معرفة على I و $x_0\in I$.

- نقول عن f أنها مستمرة من اليمين عند x_0 إذا كان: $\lim\limits_{x\to^{>}a}f(x)=f(x_0)$
- نقول عن f أنها مستمرة من اليسار عند x_0 إذا كان: $\lim\limits_{x\to^{<}a}f(x)=f(x_0)$
- إذا كانت f مستمرة من يمين ومن يسار x_0 فهي مستمرة عند x_0
- نقول عن f أنها مستمرة على مجال $[a,b]$ إذا كانت مستمرة على المجال $]a,b[$ ومستمرة على يمين a ومستمرة على يسار b

خواص:

إذا كانت f و g دوال مستمرة عند x_0 فإن:

1) $f+g$ و $f.g$ دوال مستمرة عند x_0

2) إذا كان: $g(x_0)\neq 0$ فإن: $\frac{f}{g}$ مستمرة عند x_0

3) إذا كانت f مستمرة عند x_0 و g مستمرة عند $f(x_0)$ فإن: $g\circ f$ مستمرة عند x_0

التمديد بالاستمرار.

تعريف: إذا كانت دالة معرفة على مجال $I\backslash\{x_0\}$ و $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$ ، الدالة g المعرفة كمايلي :

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & , \quad x\neq x_0\\ \ell & , \quad x=x_0\end{cases}$$

هي تمديد بالاستمرار لـ f

مثال. ليكن: $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}\quad,\quad x\neq 0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ بتطبيق قاعدة لوبيطال ومنه g هو تمديد بالاستمرار ل f. حيث

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & , \quad x\neq 0\\ 1 \quad , \quad x=0\end{cases}$$

نظرية القيم المتوسطة:إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a).f(b)<0$ فإنه : توجد نقطة $c\in]a,b[$ بحيث $f(c)=0$

نظرية: إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a,b]$ فهي دالة تقابلية وتقبل دالة عكسية تقابلية نرمز لها بـ : f^{-1}

2) الاشتقاق.

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجال I و $x_0\in I$. نقول أن f قابلة للاشتقاق عند x_0 ، إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

نسمي $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة f عند x_0 أو مشتق f عند x_0

- بوضع $x=x_0+h$ نجد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فهي مستمرة عند هذه النقطة والعكس غير صحيح.

تعريف: نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق من اليمين عند x_0 إذا كانت:

$$\lim_{x\to^{>} x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_d(x_0)$$

موجودة.

- نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كانت:

$$\lim_{x\to^{<} x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_g(x_0)$$

- نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ وعلى يمين a ويسار b
- إذا كان: $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$ نقول أن f قابلة للاشتقاق عند x_0
- ليكن $g:J\to\mathbb{R}\quad,\quad f:I\to J$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 و g قابلة للاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن: $g\circ f$ قابلة للاشتقاق عند x_0 ولدينا: $\left(g\circ f\right)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)f'(x_0)$
- $\left(f+g\right)'=f'+g',\ \ (\alpha f)'=\alpha f'\ \ (\alpha\in\mathbb{R})$
- $\left(f.g\right)'=f'g+g'f,\ \ \left(\dfrac{1}{f}\right)'=-\dfrac{f'}{f^2}\ \ (f(x)\neq 0),\ \ \left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}\ \ (g(x)\neq 0)$
- $\left(f^n\right)'=n.f'.f^{(n-1)}\quad,\quad\left(\sqrt{f}\right)'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}\ \ (f(x)\geq 0)$

قاعدة لويطال: لتكن f و g دالتان معرفتان، مستمرتان وقابلتان للاشتقاق على مجال I و $a\in I$.

إذا كان: $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ أو $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نطبق هذه القاعدة على حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ إذا حصلنا مجددا على حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ نطبق القاعدة مرة أخرى وهكذا حتى تزول حالة عدم التعيين .

- تبقى القاعدة صحيحة إذا كانت $a = \pm\infty$

مثال: أحسب : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2+3x}$

لدينا: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2+3x} = \frac{0}{0}$ نطبق قاعدة لوبيطال نجد:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin'(x)}{(x^2+3x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2x+3} = \frac{1}{3}$$

النقاط الحرجة :

تعريف : لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I . تسمى كل نقطة $c \in I$ تحقق $f'(c) = 0$ نقطة حرجة.

- إذا كان $f''(c) > 0$ فإن c تسمى نقطة حرجة صغرى.
- إذا كان $f''(c) < 0$ فإن c تسمى نقطة حرجة عظمى.
- إذا كان $f''(c) = 0$ فإن c تسمى نقطة انعطاف.

نظرية رول : لتكن f دالة معرفة و مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ وتحقق $f(a) = f(b)$ فإنه :

$$\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$$

نظرية التزايدات المنتهية : لتكن f دالة معرفة و مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ فإنه :

$$\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

3) الدوال المألوفة.

أ) الدالة اللوغاريتمية:

تعريف: نعرف اللوغاريتم النيبيري ، ونرمز له بالرمز $\ln$ (وهناك من يرمز لها بالرمز $\log x$) الدالة الوحيدة المعرفة من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$ بحيث:

$$\ln(1) = 0, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \ \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

- الدالة $\ln$ هي دالة مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$
- $\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) > 0)$

خواص: من أجل x و y موجبين تماما لدينا :

1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2) $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$

3) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

4) $\ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln x$

5) من أجل: $x>0$,$\ln x \leq x-1$

بعض النهايات.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0^+, \quad \alpha > 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha x}{\ln(\alpha x+1)} = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\alpha x+1)}{x} = \alpha$

5) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0, \quad \alpha > 0$

تعريف: ليكن $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ اللوغاريتم ذو الأساس a هو التطبيق المعرف على $]0,+\infty[$ بـ :

$$\forall x > 0, \ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

تعريف: لتكن f دالة ، نعرف E مرونة التابع f بـ : $E = \frac{\Big(\ln f(x)\Big)'}{\Big(\ln x\Big)'} = \frac{x.f'(x)}{f(x)}$

المرونة = النسبة بين التغير النسبي للتابع و التغير النسبي للمتحول.

مثال: احسب مرونة التكاليف بالنسبة للإنتاج عندما تكون كمية الإنتاج $x = 12$ وتكون دالة التكاليف

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 10$$

الحل: لدينا $E = \frac{x.f'(x)}{f(x)} = \frac{x.(3x^2-4x+7)}{x^3-2x^2+7x+10} = \frac{4692}{1534}$

ب) الدالة الأسية.

تعريف: الدالة الأسية ذات الأساس a $(a>0)$ هي $f(x) = a^x$ المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. وهذه الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$

حالة خاصة.

نعرف الدالة الأسية ذات الأساس e بـ :

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

حيث : $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

خواص :

1) $e^0 = 1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln(e^x) = x$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ e^{\ln(x)} = x$

4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \ e^{x+y} = e^x \times e^y$

5) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

6) $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$