جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة- **السنة الجامعية : 2023/2022**

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير **مقياس: رياضيات 1**

السنة الأولى ليسانس -جذع مشترك - **الفرع : 3 ، 4**

السلسلة رقم 02: المتتاليات العددية

تمرين 01:

(u_n) متتالية معرّفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.

1- أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
2- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = \frac{1}{n+1}$.
3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

تمرين 02:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n-4}{u_n+1} \end{cases}$

1- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 2$.
2- أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3- استنتج تقارب $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

تمرين 03:

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 6$ والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1- تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$.
2- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$.
3- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة، ثم استنتج تقاربها.
4- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ. عين العدد الحقيقي α بحيثُ تكون المتتالية (v_n) هندسية، يطُلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب. أكتب v_n بدلالة n، واستنتج كتابة u_n بدلالة n، وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 04:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين بـ : $u_0 = 6$ و $v_0 = 6$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1- أحسب u_1 ، v_1 و u_2 ، v_2.

2- من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = v_n - u_n$ ، بين أنّ المتتالية w_n هندسية وعين نهايتُها.

3- ادرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثمّ استنتج أنّهما متجاورتان.

تمرين 05:

(u_n) متتاليةٌ معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة التراجعية $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$ وحدّها الأوّل $u_0 = 1$.

لكل n من $\mathbb{N}^*$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

1- عين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- ما طبيعة المتتالية (u_n) إذا كان $\alpha = 1$.

3- نفرض أن $\alpha \neq 1$ و $\alpha \neq -1$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{1-\alpha}$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q .

ب. أحسب نهاية المتتالية (v_n).

تمرين 06:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها.

3- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = ln(u_n)$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب. أكتب v_n و u_n بدلالة n، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

ت. نضع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

أحسب S_n ثم P_n بدلالة n .