الفصل الثاني: مفاهيم عامة حول المتتاليات

1) المتتاليات.

تعريف : نسمي متتالية عددية كل تطبيق u_n من $\mathbb{N}$ (أو جزء من $\mathbb{N}$) نحو $\mathbb{R}$. نرمز عادة للمتتالية ب $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو اختصارا (u_n). يسمى الحد u_n بالحد العام للمتتالية (u_n).

أمثلة : $u_n = \sqrt{n}$، $u_n = 2n-3$، $u_n = (-1)^n$.

1.I) اتجاه تغير متتالية :

تعريف : نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها:

- متزايدة (متزايدة تماما) إدا كان: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$).
- متناقصة (متناقصة تماما) إدا كان: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$).
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية رتيبة إذ ا كانت متزايدة أو متناقصة.
- هناك متتاليات لا هي متزايدة ولا هي متناقصة (غير رتيبة) مثل المتتالية: $u_n = (-1)^n$

أمثلة :

1) لتكن المتتالية:... $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

لدينا :

$$\forall n \geqslant 1 : u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

ومنه: $\forall n \geqslant 1 : u_{n+1} < u_n$

إذن: (u_n) متناقصة تماما.

2) لتكن المتتالية: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \sqrt{n}$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$

إذن: (u_n) متزايدة تماما.

2.1) المتتاليات المحدودة :

- نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي $M \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant M$$

- نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي $m \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geqslant m$$

- نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل أي:

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : m \leqslant u_n \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مثال : لتكن المتتالية: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = 3 - \frac{1}{n}$

لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leqslant 1 \implies -\frac{1}{n} \geqslant -1 \implies -\frac{1}{n} + 3 \geqslant 2$$

ومنه: (u_n) محدودة من الأسفل ب 2

لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} > 0 \implies -\frac{1}{n} < 0 \implies -\frac{1}{n} + 3 < 3$$

ومنه: (u_n) محدودة من الأعلى ب 3.

إذن هي متتالية محدودة.

3.1) المتتاليات المتقاربة :

تعريف : المتتالية (u_n) متقاربة إذا كانت تملك نهاية منتهية ووحيدة $\ell \in \mathbb{R}$ أي: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

إذا كانت المتتالية ليست متقاربة فهي متباعدة.

ملاحظات :

أ) كل متتالية متقاربة محدودة.

ب) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

ج) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

4.1) المتتاليات المتجاورة :

تعريف : نقول عن متتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنهما متجاورتين إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة و

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

5.1) المتتاليات الحسابية :

تعريف : نسمي متتالية حسابية ذات الأساس r كل متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$

- تعطى عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية ب: $u_n = u_0 + n\,r$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_0 ،

وبـ : $u_n = u_1 + (n-1)r$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_1.

- مجموع حدود متتالية حسابية إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_0 يعطى بـ :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (u_0 + u_n)\frac{n+1}{2} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right)$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول + 1 .

إتجاه تغير متتالية حسابية : لتكن (u_n) متتالية حسابية ذات الأساس r.

نعلم أن: $u_{n+1} = u_n + r$ ، ومنه: $u_{n+1} - u_n = r$. إذن نستنتج أن:

- (u_n) متزايدة إذا كان: $r > 0$.
- (u_n) متناقصة إذا كان: $r < 0$.
- (u_n) ثابتة إذا كان: $r = 0$.

خاصية : لتكن a و b و c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$

-- يسمى b الوسط الحسابي للعددين a وc.

تمرين تطبيقي 1 : نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n = 3n + 5$

1) بين أن (u_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول.

2) أحسب u_3 و u_{11} .

3) أحسب المجموع : $u_3 + u_4 + ... + u_{11}$

الجواب :

1) لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 5 - 3n - 5 = 3$

و $u_0 = 3.0 + 5 = 5$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ و حدها الأول $u_0 = 5$

2) لدينا: $u_3 = 3.3 + 5 = 9 + 5 = 14$ و $u_{11} = 3.11 + 5 = 38$

3) $u_3 + u_4 + ... + u_{11} = (11 - 3 + 1)\dfrac{u_{11} + u_3}{2} = 9\dfrac{52}{2} = 234$

تمرين تطبيقي 2 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$

نضع: $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$

1) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n > 2$

2) أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) استنتج أن (u_n) متقاربة.

4) أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية. حدد أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

الجواب :

1) لإثبات أن: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 2$ نستعمل البرهان بالتراجع.

أولا : نسمي $p(n)$ العلاقة $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 2$

ثانيا : نتحقق من صحة $p(0)$ أي صحة العلاقة من أجل: $n = 0$

لدينا: $u_0 = 3 > 2$ ومنه: $p(0)$ محققة.

ثالثا : نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$.

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} = \frac{5u_n - 4 + 5 - 5}{u_n + 1} \\ &= \frac{5u_n + 5}{u_n + 1} - \frac{9}{u_n + 1} \\ &= 5 - \frac{9}{u_n + 1} \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى:

$$\begin{aligned} u_n > 2 &\implies u_n + 1 > 3 \implies \frac{1}{u_n + 1} < \frac{1}{3} \\ &\implies \frac{9}{u_n + 1} < 3 \implies -\frac{9}{u_n + 1} > -3 \\ &\implies 5 - \frac{9}{u_n + 1} > 2 \end{aligned}$$

ومنه: $u_{n+1} > 2$.

إذن: $p(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 2$

2) لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n + 1}$

و $-u_n^2 + 4u_n - 4 = -(u_n - 2)^2 < 0$ و $u_n + 1 > 0$

إذن: $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1} < 0$

نستنتج أن: $(u)_n$ متناقصة.

3) لدينا (u_n) محدودة من الأسفل من ج 1 و متناقصة من ج 2 ومنه: (u_n) متقاربة.

4) أ) لدينا: $v_{n+1} - v_n = \frac{3}{u_{n+1} - 2} - \frac{3}{u_n - 2} = \frac{3(u_n + 1)}{3u_n - 6} - \frac{3}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1$

ومنه: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول $v_0 = \frac{3}{u_0 - 2} = 3$

ب) لدينا: $v_n = v_0 + nr = 3 + n \implies u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n} = \frac{2n + 9}{n + 3}$

ومنه: $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n + 9}{n + 3} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n} = 2$

6.1) المتتاليات الهندسية :

تعريف : نسمي متتالية هندسية ذات الأساس $q>0$ كل متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق: $\forall n\in\mathbb{N}:\ u_{n+1}=u_nq$

- تعطى عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية بـ : $u_{n+1}=u_0q^n$ إذا كان u_0 هو الحد الأول للمتتالية.

و $u_{n+1}=u_1q^{n-1}$ إذا كان u_1 هو الحد الأول للمتتالية.

- مجموع حدود متتالية هندسية يعطى بـ :

$$S_n=u_0+u_1+\dots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\text{الحد الأول}\times\frac{1-(\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}}$$

إتجاه تغير متتالية هندسية : لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q .

نعلم أن: $u_n=u_0q^n$ و $u_{n+1}=u_0q^{n+1}$. نستنتج أنه من أجل أي عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=u_0q^n(q-1)$ ومنه:

- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $q=1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة.
- إذا كان $q=0$ تكون كل حدود المتتالية (u_n) معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- إذا كان $q<0$ فإن الفرق $u_{n+1}-u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن $(q)^n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة. ومنه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

خاصية : لتكن a وb و c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن: $b^2=ab$

-- يسمى b الوسط الهندسي للعددين a وc.

تمرين تطبيقي 3 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases}u_0=-2\\ u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-1\end{cases}$$

نضع: $v_n=u_n+3$

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية.

2) استنتج عبارة v_n و u_n بدلالة n. استنتج $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

3) نضع: $S_n=v_0+v_1+\dots+v_n$. أكتب S_n بدلالة n.

الجواب :

1) لدينا: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{u_{n+1}+3}{u_n+3}=\dfrac{\frac{2}{3}u_n-1+3}{u_n+3}=\dfrac{\frac{2}{3}u_n+2}{u_n+3}=\dfrac{2}{3}\Big(\dfrac{u_n+3}{u_n+3}\Big)=\dfrac{2}{3}$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0+3=-2+3=1$.

2) $v_n=v_0q^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ \ u_n=v_n-3=\left(\frac{2}{3}\right)^n-3$