الفصل الأول: التحليل التوفيقي

كثيرا ما نهتم في مجال الدراسات الاقتصادية والاجتماعية بعملية تكوين مجموعات جزئية من مجموعات أصلية وفق شروط مفترضة، كالاهتمام بطبيعة الأشياء أو العناصر وترتيبها في الوقت نفسه. كما يمكن أن تختلف الحالات عن بعضها بافتراض عدم إمكانية تكرار العناصر في المجموعات الجزئية، أو امكانية تكرارها، ويساعدنا في دراسة ذلك ما يسمى بالتحليل التوفيقي.

يهتم التحليل التوفيق بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضية التي تسهل هذا التكوين من جهة ويتمكن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد بها واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات الملائمة وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بذلك الحادث من جهة اخرى، وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التوفيقي. لهذا تتجلى ضرورة عرض تلك القواعد الرياضية للاستفادة منها عند التطرق لموضوع الاحتمال وقوانينه.

سنحاول في هذا لفصل تناول الموضوعات التالية:

- التباديل؛ التراتيب؛ التوافيق.

وقبل التطرق إلى هذه الموضوعات، لابد من الإشارة إلى نقطة أساسية تشكل المرتكز الحقيقي للتحليل التوفيقي، هي قاعدة الضرب وقاعدة الجمع أو ما يسمى بالمبدأ الأساسي للعد.

أولا– القواعد الأساسية لطرق العد

هناك قاعدتان أساسيتان لطرق العد هما قاعدة الضرب وقاعدة الجمع، نلخصهما فيمايلي:

1. **قاعدة الضرب:**

إذا كان هناك عملية أو تجربة مكونة من عدد مقداره K من المراحل بحيث:

- المرحلة الأولى تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة؛
- المرحلة الثانية تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة؛
- .... وهكذا
- المرحلة الأخيرة K تتم بعدد قدره n_k من الطرق المختلفة؛

فإن العملية ككل يمكن إجراؤها بعدد من الطرق الممكنة كمايلي:

$$n = n_1 \times n_2 \times .... \times n_k$$

مثال:

بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاثة مقررات: الأول في الإحصاء والثاني في الرياضيات والثالث في المحاسبة، إذا علمت أن هناك ثلاثة مقررات مختلفة للإحصاء ومقررين مختلفين في الرياضيات ومقررين مختلفين في المحاسبة؟

الحل: العملية هي اختيار ثلاثة مقررات، وهي مكونة من ثلاث مراحل:

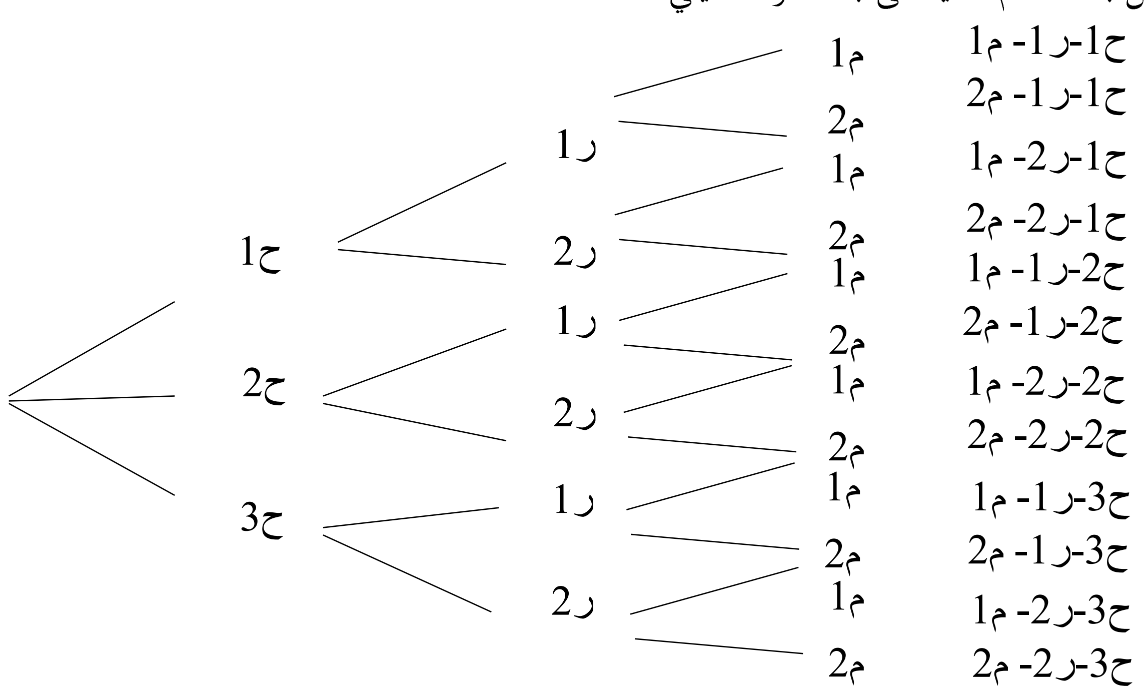
- المرحلة الأولى اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_1 = 3$
- المرحلة الثانية اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_2 = 2$
- المرحلة الثالثة اختيار مقرر المحاسبة وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_3 = 2$

وباستخدام قاعدة الضرب يكون:

$$n = n_1 \times n_2 \times .... \times n_k$$
$$n = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

ومنه عدد الطرق الكلية لاختيار مقرر من بين المقررات المقدمة هو 12 طريقة.

ويمكن توضيح الحل باستخدام ما يسمى بالشجرة كمايلي:



ملاحظة: في عملية الضرب يتم إجراء جميع المراحل معا لإتمام العملية.

2. قاعدة الجمع:

إذا كان هناك عملية أو تجربة مكونة من عدد مقداره K من المراحل بحيث:

- المرحلة الأولى تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة؛
- المرحلة الثانية تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة؛
- .... وهكذا
- المرحلة الأخيرة K تتم بعدد قدره n_k من الطرق المختلفة؛

فإن عدد الطرق المختلفة لإجراء عملية واحدة فقط من هذه العمليات المتنافية هو:

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

مثال:

من معطيات المثال السابق بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقررا واحدا فقط من الإحصاء أو الرياضيات أو المحاسبة؟

الحل:

العملية هي اختيار ثلاثة مقرر واحد فقط:

- المرحلة الأولى اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_1 = 3$
- المرحلة الثانية اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_2 = 2$
- المرحلة الثانية اختيار مقرر المحاسبة وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_3 = 2$

وباستخدام قاعدة الجمع يكون:

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$
$$n = 3 + 2 + 2 = 7$$

ومنه عدد الطرق الكلية لاختيار مقرر واحد من بين المقررات المقدمة هو 07 طرق.

ثانيا- التحليل التوفيقي

من أهم الصعوبات التي تواجهنا عند دراسة الاحتمالات، هي تحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة، فإذا كانت المعطيات قليلة فيمكن تحديد مختلف النتائج بطريقة مباشرة، ولكن عندما تتعدد المعطيات يصبح مستحيلا اتباع هذه الطريقة وعندئذ نلجأ إلى التحليل التوفيقي.

1. التبديـــــلة: وتنقسم إلى قسمين.

1.1. التبديلة بدون تكرار: ويرمز لها بالرمز P_n عندما نكون أمام مجموعة من العناصر n وكلها مختلفة عن بعضها البعض. يسمى وضع هذه العناصر في ترتيب معين بالتبديلة، وتحسب وفق الصيغة التالية:

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 1$$

مثال:

لتكن المجموعة التالية المكونة من ثلاثة عناصر مختلفة:

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

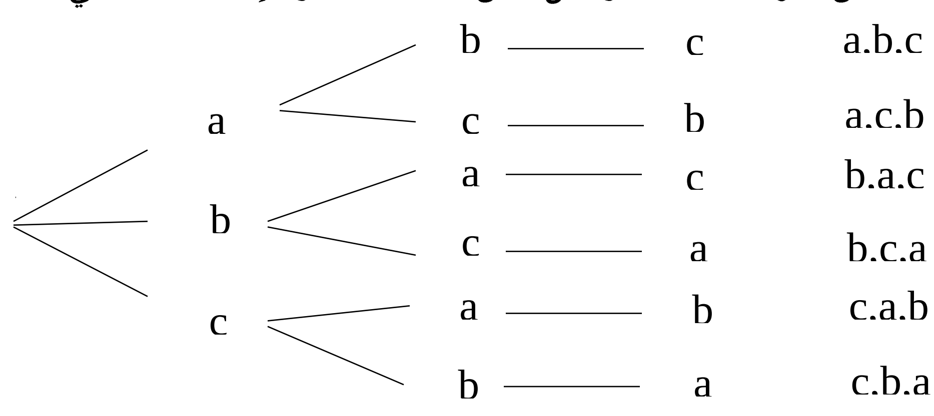
- ماهي التبديلات P_n التي يمكن الحصول عليها؟

الحل:

بمأن المجموعة تحمل ثلاثة عناصر مختلفة $n = 3$ ولا وجود لتكرار فيها فإن عدد التبديلات يكون كمايلي:

$$P_n = P_3 = n! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

في مثل هذه الحالات أين يكون عدد العناصر قليل يمكن استعمال شجرة الإمكانات كمايلي:



إذن هناك 6 طرق أو تبديلات يمكن الحصول عليها من ترتيب العناصر المختلفة.

2.1.التبديلة مع التكرار: عندما تكون لدينا مجموعة من العناصر n ليست كلها مختلفة، أي فيها عناصر متشابهة (مكررة)، مثل كلمة ليبيا، جرجرة، أو تكرار الأرقام: 0،4،4،2،2،1،3،3.

في هذه الحالة التبديلات المختلفة لـ n عنصر هي:

$$P_n^{n_1,n_2,.......n_k} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times.......\times n_k!}$$

حيث:

k عدد العناصر دون احتساب التكرار $n_1, n_2, ...n_k$: هي تكرارات كل عنصر.

مثال:

لنحسب عدد التبديلات المختلفة التي يمكن تشكيلها من كلمة " **جرجرة** " :

الحــل:

إذن كلمة جرجرة تتكون من $k=5$ عنصر، يوجد بينها عناصر مكررة كمايلي:

- ج: يتكرر مرتين $n_1 = 2$ - ر: يتكرر مرتين $n_2 = 2$ ة: توجد واحدة فقط $n_3 = 1$

وعليه تكون عدد التبديلات في هذه الحالة هو:

$$P_n^{n_1,n_2,.......n_k} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times.......\times n_k!}$$

$$P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\times 2!\times 1!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{4} = 30$$

2. الترتيـبة:

سحب k عنصر من مجموعة n مع الأخذ بعين الاعتبار موقع وترتيب العنصر في المجموعة المسحوبة . والترتيبة قسمين هما:

1.2.الترتيـبة بدون إعادة: يرمز لها بالرمز A_n^k، ويكون السحب فيها بدون إعادة العنصر للمجموعة الكلية، حيث تحسب وفق الصيغة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حيث:

k عدد السحبات بدون إعادة العنصر　　　　n : عدد العناصر الكلية

مثال:

لتكن مجموعة مكونة من أربعة حروف:

$$\Omega = \{a, b, c, d\}$$

- بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعة مكونة من عنصرين، إذا علمت أن السحب بدون إعادة؟

الحل:

بمأن السحب بدون إعادة وترتيب العنصر مهم في المجموعة، فإن عدد الطرق يكون كمايلي:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$$

إذن عدد الطرق لتشكيل هو 12 طريقة، بحيث لا يسمح بالإعادة.

ملاحظة: يمكن ايضا ايجاد عدد الطرق الممكنة لذلك باستخدام الشجرة كما في المثال السابق.

2.2.الترتيـبة بالإعادة: يرمز لها بالرمز rA_n^k، ويكون السحب فيها مع إعادة العنصر للمجموعة الكلية، أين يمكن أن يظهر العنصر عدة مرات. وتحسب وفق الصيغة التالية:

$$rA_n^k = n^k$$

مثال:

لتكن نفس معطيات المثال السابق:

$$\Omega = \{a, b, c, d\}$$

- بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعة مكونة من عنصرين، إذا علمت أن السحب مع الإعادة؟

الحل:

بمأن السحب مع إرجاع العنصر إلى المجموعة الكلية، فإن عدد الطرق الممكنة للتشكيل هو:

$$rA_n^k = n^k$$
$$rA_4^2 = 4^2 = 16$$

أي هناك 16 طريقة للتشكيل.

3. التوفيقة: عندما نسحب kعنصر من مجموعة nعنصر ولا نأخذ بعين الاعتبار موقع ولا ترتيب العناصر في المجموعة الجزئية، المهم العناصر المكونة للمجموعة الجزئية.

والتوفيقات قسمين:

1.3.التوفيقة بدون إعادة: يرمز لها بالرمز C_n^k، وتحسب بالصيغة التالية:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال:

لتكن نفس معطيات المثال السابق: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

- بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعة مكونة من عنصرين، إذا علمت أن السحب بدون إعادة؟

الحـل:

- بمأن السحب بدون إعادة وترتيب العنصر غير مهم في المجموعة، فإن عدد الطرق يكون كمايلي:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

- إذن عدد الطرق لتشكيل هو 06 طرق.

2.3.التوفيقة مع الإعادة: يرمز لها بالرمز C_{n+k-1}^kأو K_n^k، وتحسب بالصيغة التالية:

$$k_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

مثال:

لتكن نفس معطيات المثال السابق: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

- بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعة مكونة من عنصرين، إذا علمت أن السحب مع الإعادة؟

الحـل:

- بمأن السحب مع إعادة العنصر والترتيب غير مهم في المجموعة، فإن عدد الطرق يكون كمايلي:

$$k_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$k_4^2 = C_{4+2-1}^2 = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

- إذن عدد الطرق لتشكيل هو 10 طرق.