المحاضرة 4

توازن المستهلك في حالة وجود قيود

- **الطريقة الأولى: طريقة التعويض**

تعتمد هذه الطريقة على دالة المنفعة من الشكل $U=f(x)$، ويتحقق توازن المستهلك هنا عند توافر شرطين أساسيين:

- **الشرط اللازم:** المشتقة الأولى لدالة المنفعة الكلية تساوي الصفر، وهي البرهان الرياضي على أن منحنى المنفعة الكلية قد وصل للذروة.

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

- **الشرط الكافي:** المشتقة الثانية لدالة المنفعة الكلية أقل من الصفر، وهي البرهان الرياضي على أن هذه الذروة تمثل نقطة عظمى على منحنى المنفعة الكلية.

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

- **مثال:**

لنفترض أن لدينا دالة منفعة لأحد المستهلكين معطاة على الشكل الآتي: $U=x.y$

وبفرض أن:

- سعر السلعة x : $Px=6$
- سعر السلعة y : $Py=2$
- الدخل المخصص للإنفاق: $R=60$

المطلوب: حدد التوليفة المثلى من السلعتين (x) و (y) التي تحقق توازن المستهلك.

- **الحل:**

لدينا معادلة الميزانية

$$R = xPx + yPy \ldots\ldots\ldots\; 60 = 6x + 2y$$

باستخراج y من معادلة الميزانية نحصل على:

$$y = 30 - 3x$$

نقوم بتعويض المعادلة (2) في دالة المنفعة نحصل على:

$$U = x.y$$

$$U = x\,(30-3x)$$

$$\boldsymbol{U = 30x - 3x^2}$$

وعليه أصبحت دالة المنفعة بدلالة متغير مستقل واحد (x)، أي من الشكل U=f(x) ، ومن ثم يمكن التحقق من توافر شرطي التوازن لتحديد التوليفة المثلى.

- **الشرط اللازم:** المشتقة اولى لدالة المنفعة الكلية تساوي الصفر

$$\frac{dU}{dx} = 0 \;\rightarrow\; Umx = 0 \rightarrow 30 - 6x = 0$$

ومنه نجد : $x = 5$

- **الشرط الكافي:** المشتقة الثانية لدالة المنفعة الكلية أقل من الصفر

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0 \;\rightarrow\; U''x < 0$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0 \;\rightarrow\; -6 < 0$$

وبما أن الشرطين محققين، فهذا يعني أن منحنى المنفعة الكلية يصل إلى النقطة العظمى عندما x=5.

وبتعويض قيمة x في المعادلة (2) نحصل على قيمة y :

$$y = 30 - 3x = 30 - 3(5) = 30 - 15 = 15$$

ومنه فإن التوليفة السلعية (x=5 , y=15) تمثل التوليفة المثلى التي تحقق للمستهلك أكبر إشباع (منفعة) ممكن.

وتقدر المنفعة الكلية عند وضع التوازن بـ : $U=x.y = 5(15) = 75$

- **الطريقة الثانية: طريقة لاغرانج**

تمثل طريقة لاغرانج الطريقة الأكثر استخداما لإيجاد الكميات التوازنية التي تعظم منفعة المستهلك، وقد تم اقتراحها من طرف *Tucher & Khun*. وتقوم هذه الطريقة على أن المستهلك يحاول ايجاد حل للمشكلة المتمثلة في تعظيم منفعته تحت قيد الميزانية، أي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Max}: \quad \boldsymbol{U = f(x,y)} \\ \boldsymbol{\frac{s}{c}}: \quad \boldsymbol{R = xPx + yPy} \end{cases}$$

ولحل هذه المشكلة (ايجاد التوليفة السلعية المثلى التي تعظم منفعة المستهلك) يتم أولا تشكيل دالة لاغرانج والتي تتكون من دالة المنفعة، إضافة إلى حاصل ضرب مضروب لاغرانج (λ) في معادلة الميزانية مصفرة، ويمكن كتابة دالة لاغرانج على الشكل الآتي:

$$\boldsymbol{L = f(x,y) + \lambda(R - xPx - yPy)}$$

وليتم تحديد التوليفة المثلى يجب تحقق الشرطين الآتيين:

- **الشرط اللازم:** أن تكون المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج (بالنسبة لكل من x ، y و λ) مساوية للصفر.

$$\begin{cases} \boldsymbol{L'_x = 0 \ \rightarrow f'_x - \lambda Px = 0} \quad \dots\dots\dots (1) \\ \boldsymbol{L'_y = 0 \ \rightarrow f'_y - \lambda Py = 0} \quad \dots\dots\dots (2) \\ \boldsymbol{L'_\lambda = 0 \ \rightarrow R - xPx - yPy = 0} \dots\dots (3) \end{cases}$$

وعليه فالشرط الأول يتكون من ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات، يتم من خلالها إيجاد قيمة كل من x ، y و λ.

ومن المعادلتين (1) و (2) نستنتج أنه عند وضع التوازن تكون:

1- النسبة ما بين المنافع الحدية للسلعتين (x) و (y) مساوية للنسبة بين أسعارهما، أي:

$$\frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة } x}{\text{المنفعة الحدية للسلعة } y} = \frac{\text{سعر السلعة } x}{\text{سعر السلعة } y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f'x}{f'y} = \frac{Px}{Py} \text{ أي } \frac{Umx}{Umy} = \frac{Px}{Py}$$

2–النسبة ما بين المنفعة الحدية والسعر متساوية للسلعتين (X) و (Y)، أي:

$$\frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة } x}{\text{سعر السلعة } x} = \frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة } y}{\text{سعر السلعة } y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f'x}{Px} = \frac{f'y}{Py} \text{ أي } \frac{Umx}{Px} = \frac{Umy}{Py}$$

- **الشرط الكافي**: أن يكون المحدد الهيسي (الذي يتكون من المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاغرانج) أكبر من الصفر.

$$|H| = \begin{vmatrix} L''xx & L''xy & L''x\lambda \\ L''yx & L''yy & L''y\lambda \\ L''\lambda x & L''\lambda y & L''\lambda\lambda \end{vmatrix} > 0$$

ويمكن اختصار المحدد الهيسي في حالة التعظيم على الشكل الآتي:

$$|H| = \begin{vmatrix} L''xx & L''xy & -Px \\ L''yx & L''yy & -Py \\ -Px & -Py & 0 \end{vmatrix} > 0$$

- **مثال:**

بالاحتفاظ بالمثال السابق، يمكن تعظيم دالة المنفعة بطريقة لاغرانج على الشكل الآتي:

أولا: هدف المستهلك هو تعظيم المنفعة تحت قيد الميزانية

$$\begin{cases} Max: \quad U = x.y \\ \frac{s}{c}: \ 60 = 6x + 2y \end{cases}$$

ثانيا: تشكيل دالة لاغرانج

$$L = x.y + \lambda(30 - 6x - 2y)$$

ثالثا: تعظيم دالة المنفعة من خلال تحقق الشرطين، اللازم والكافي.

- **الشرط اللازم**: المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج مساوية للصفر

$$\begin{cases} L'x = 0 \rightarrow y - 6\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots(1) \\ L'y = 0 \rightarrow x - 2\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots(2) \\ L'\lambda = 0 \rightarrow 30 - 6x - 2y = 0 \dots\dots(3) \end{cases}$$

بقسمة طرفي المعادلة (1) على المعادلة (2) نجد:

$$\frac{(1)}{(2)}: \ \frac{y}{x} = \frac{6\lambda}{2\lambda}$$

$$\rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{6}{2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{y}{x} = 3$$

$$\rightarrow \quad y = 3x \dots\dots(4)$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نجد:

$$(3): \ 60 - 6x - 2y = 0$$

$$\rightarrow 60 - 6x - 2(3x) = 0$$

$$\rightarrow 60 - 6x - 6x = 0$$

$$\rightarrow 60 - 6x - 6x = 0$$

$$\rightarrow 60 - 12x = 0$$

$$x = 5$$

بتعويض قيمة x في المعادلة (4) نجد قيمة y :

$$(4): \ y = 3x$$

$$\rightarrow y = 3(5)$$

$$y = 15$$

- **<u>الشرط الكافي</u>**: المحدد الهيسي أكبر من الصفر

$$|H| = \begin{vmatrix} L''xx & L''xy & -Px \\ L''yx & L''yy & -Py \\ -Px & -Py & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

ومنه فإن التوليفة المثلى التي تحقق أكبر منفعة للمستهلك هي (x=5, y=15).