القيم الذاتية (Valeurs Propres) :

1. **تعريف القيم الذاتية و الاشعة الذاتية**
2. **حساب القيم الذاتية ( valeurs propres )**
3. **حساب الاشعة الذاتية ( vevteurs propres)**

**تعريف :**

اذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة و كان $\lambda \in R$ نقول ان λ قيمة ذاتية لـA اذا وجد $X \in R^n$ و $X \neq 0$ بحيث :

$$A.X = \lambda X$$

في هذه الحالة يسمى $X$ شعاع ذاتي للقيمة الذاتية λ

**مبرهنة :**

اذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة و كان $\lambda \in R$ نقول عن $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ اذا وفقط اذا كان :

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & . & . & . & a_{1n} \\ . & a_{22} - \lambda & \dots & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & \dots & . & . \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

**القيم الذاتية** ***valeurs propres :***

**مبرهنة :**

اذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة اذن :

$|\lambda I - A| = 0$ يسمى بكثير حدود المميز (polynomes caractéristiques) للمصفوفة $A$

اذن لحساب القيم الذاتية لمصفوفة مربعة نتبع الخطوات التالية :

نكتب المعادلة : $A.X = \lambda X$ من الشكل :

$$A.X = \lambda.I.X$$

$$A.X - \lambda.I.X = 0$$

$$(A - \lambda.I).X = 0$$

لكي يكون λ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ يجب ان يكون $X \neq 0$ وعليه :

$$det(A - \lambda I) = 0$$

نسمي المعادلة :

$$det(A - \lambda I) = 0$$

المعادلة الذاتية المميزة للمصفوفة $A$

مثال :

اوجد القيم الذاتية للمصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل :

نشكل المعادلة :

$$det(\lambda I - A) = 0$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -1 - \lambda & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)[\lambda(\lambda - 1)] + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$

$$= (\lambda - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$\lambda = 1$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$

**خصائص القيم الذاتية :**

**نضرية :**

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ نضامية اي $det(A) \neq 0$ فان عدد القيم الذاتية هو $n$ قيمة ذاتية و نرمز لها : $\langle \lambda_1; \lambda_2; \dots \dots \dots \lambda_n \rangle$ وعليه :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n($ $)$ اثر المصفوفة $A$ هو مجموعة عناصر القطر الرئيسي :

$$tr(A) = (a_{11} + a_{22} + \cdots \dots . a_{ii} \dots \dots + a_{nn}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

مجموع القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هو مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $A$ :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \dots . \lambda_i \dots \dots + \lambda_n) = (a_{11} + a_{22} + \cdots \dots . a_{ii} \dots \dots + a_{nn})$$

$$tr(A) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \dots . \lambda_i \dots \dots + \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

اوجد القيم الذاتية ل$A$ ؟ ثم احسب اثر المصفوفة $A$ ملذا تستنتج؟

الحل :

مرحلة 1 :

نبحث عن القيم الذاتية للمصفوفة $A$ :

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 = C_2 - C_1} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

القيم الذاتية $\langle \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 3 \rangle$:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 2 + 1 + 3 = 6 = tr(A)$$

اذا كانت المصفوفة $A$ هي المصفوفة الاحادية فان جميع قيمها الذاتية متساوية و تساوي الواحد.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \ldots\ldots = \lambda_n = 1$$

اذا كانت المصفوفة $A$ مصفوفة قطرية فان قيمها الذاتية هي عناصر قطرها :

$$\lambda_i = a_{ii}$$

القيم الذاتية للمصفوفة المثلثية هي عناصر قطرها الرئيسي

مثال :

- جداء القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي محدد المصفوفة $A$ :

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \dots . \lambda_i \dots . . \times \lambda_n$$

- اذا كانت القيم الذاتية $(\lambda_1 \; ; \; \lambda_2 ; \; \dots \dots . \lambda_i \dots . . ; \; \lambda_n)$ للمصفوفة A اذن :

$$\frac{1}{\lambda_1} ; \frac{1}{\lambda_2} ; \; \dots \dots . \frac{1}{\lambda_i} \dots . . ; \; \frac{1}{\lambda_n}$$

قيم ذاتية للمصفوفة $A^{-1}$

- القيم الذاتية للمصفوفة $(A^n)$ هي :

$$({\lambda_1}^n \; ; \; {\lambda_2}^n ; \; \dots \dots . {\lambda_i}^n \dots . . ; \; {\lambda_n}^n)$$

- القيم الذاتية للمصفوفة $(A - k\lambda)$ هي :

$$(\lambda_1 - k \; ; \; \lambda_2 - k ; \; \dots \dots . \lambda_i - k \dots . . ; \; \lambda_n - k)$$

- القيم الذاتية للمصفوفة $(kA)$ هي :

$$(k\lambda_1 ; \; k\lambda_2 ; \; \dots \dots . k\lambda_i \dots . . ; \; k\lambda_n)$$

- المصفوفة $(A^{-1})$ موجودة اذا كان :

$$\lambda_i \neq 0 \, , i = 1 \dots . . n$$

- اذا كانت المصفوفة $A$ غير نضامية اي : $det(A) \neq 0$ اذن :

$$\forall \lambda_i \; i = 1 \dots . n \; ; \; \lambda_i \neq 0$$

- اذا كانت المصفوفة $A$ نضامية اي : $det(A) = 0$ اذن :

$$\exists \lambda_i \; i = 1 \dots . n \; ; \; \lambda_i = 0$$

**كثيرة الحدود المميز للمصفوفة المربعة $A$ (*polynome caractéristique*)**

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ و $det(\lambda I - A) = 0$ المعادلة المميزة لها اذن :

عند تفكيك المعادلة المميزة للمصفوفة $A$ نتحصل على كثير حدود المميز للمصفوفة $A$ :

$$\boldsymbol{P_A(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \cdots \dots . + c_n}$$

**تعيين الاشعة الذاتية (vecteurs propres) :**

لتكن المصفوفة $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathrm{R})$ و $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$ المعادلة المميزة لها بعد ان نجد القيم الذاتية نعوضها في المعادلة المتجانسة :

$$(A - \lambda . I) . X = 0$$

بمان $X$ شعاع غير صفري اذن ايجاد قيمة الشعاع المجهول $X$ يسمى بالشعاع الذاتي للمصفوفة $A.$

**خصائص الاشعة الذاتية :**

اذا كان الشعاع $X$ شعاع ذاتي للمصفوفة $A$ اذن :

$$K.X, \qquad \forall K \in [2.3 \dots \dots . n]$$

شعاع ذاتي للمصفوفة $A$

اذا كان للمصفوف n, A قيمة ذاتية مختلفة $( \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \dots . \lambda_i \dots . . \neq \lambda_n )$ اذن المصفوفة

$A$ تقبل $n$ اشعة ذاتية مختلفة.

**الاشعة الذاتية المتعامدة (orthogonale) :**

الاشعة $X^t{}_1; X_2$ متعامدان اذا كان جدائهما يساوي الصفر :

$$X^t{}_1 \times X_2 = 0$$

مثال :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

مثال :

اوجد الاشعة الذاتية للمصفوفة الاتية :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل :

مرحلة 1 :

البحث عن القيم الذاتية :

و ذلك عن طريق حل المعادلة المميزة :

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow{C_1 = C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}$$

$$= (1-\lambda)(-4-\lambda)(2-\lambda)$$

اذن القيم الذاتية ل $A$:

$$\langle \lambda_1 = 1\ ;\ \lambda_2 = -4\ ;\ \lambda_3 = 2 \rangle$$

مرحلة 2 :

البحث عن الاشعة الذاتاية المرافقة لكل قيمة ذاتية :

الشعاع الذاتي من اجل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ و ذلك عن طريق ايجاد حل لنضام الاتي :

$$(A - \lambda_i)X = 0 \iff \mathrm{AX} = \lambda_i X$$

$$(A - I_3)X = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{R^3}$$

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y \quad\ = 0 \\ -2x + 2y \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = x \\ y = x \end{cases}$$

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; x \in R \rangle$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الشعاع الذاتي من اجل القيمة الذاتية $\lambda_2 = -4$ :

$$(A + 4I_3)X = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{R^3}$$

$$\begin{cases} 4x+2y-z &= 0 \\ 3x+2y &= 0 \\ -2x+2y+5z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x-3x = x \\ y = -\frac{3}{2}x \\ x = x \end{cases}$$

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ -\frac{3}{2}x \\ x \end{pmatrix} = x\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; x \in R \rangle$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

الشعاع الذاتي من اجل القيمة الذاتية $\lambda_3 = 2$ :

$$(A-2I_3)X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{R^3}$$

$$\begin{cases} -2x+2y-z &= 0 \\ 3x-4y &= 0 \\ -2x+2y-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{8}{3}y+2y = z = -\frac{2}{3}y \\ x = \frac{4}{3}y \\ y = y \end{cases}$$

$$\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{3}y \\ y \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix} = y\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; y \in R \rangle$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

نتيجة :

الاشعة الذاتية للمصفوفة $A$:

$$\langle V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};\ V_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$