المصفوفات:

1. **تعريف المصفوفة**
2. **عمليات على المصفوفات**
3. **المحددات**

تعريف:

المصفوفة هي عبارة عن جدول من الاعداد الحقيقية $R$ او الاعداد المركبة $\mathbb{C}$, ولكن سنقتصر في درستنا على الاعداد الحقيقية فقط مرتب في $n$ سطر و $m$ عمود نرمز لها بالرمز :

$A \in \mathcal{M}_{(n,m)} \in R$ بحيث $a_{ij}$ تمثل عناصر المصفوفة $A$ اذن يمكن تمثيل المصوفة عن طريق الجدول التالي :

$$\mathrm{A}_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots \cdots\ a_{1m} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots \cdots\ a_{2m} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots \cdots\ a_{nm} \end{pmatrix} \quad A = a_{ij} \;\; 1 \le i \le n \,; 1 \le j \le m$$

ويمكن ان نرمز لها باختصارب :

$$A = [a_{ij}] \quad ; \; A = [a_{ij}]_{\,n,m}$$

درجة المصفوفة :

اذا كان للمصفوفة $n$ سطر و $m$ عمود نقول ان المصفوفة من الدرجة $n \times m$ واذا كان $n = m$ نقول ان المصفوفة من الدرجة $n$

**انواع المصفوفات (types de matrices) :**

**مصفوفة سطر (Matrice ligne) :**

تسمى المصفوفة التي من الشكل $1 \times m$ بمصفوفة سطر اذن :

$$si\ n = 1 : A_{1,m} = (a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots\ldots a_{1m})$$

مثال :

$$A_{(1,4)} = (1\ 2 - 3\ 0)$$

**مصفوفة عمود (Matrice collone) :**

تسمى المصفوفة التي من الشكل $n \times 1$ بمصفوفة عمود اذن :

$$si\ m = 1: A_{n,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

**مصفوفة معدومة (matrice nulle) :**

المصفوفة المعدومة هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها معدومة اي تاخذ الشكل التالي :

$$\boldsymbol{A_{n,m}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$si\ a_{ij} = 0\ \ \forall i\ et\ \forall j$$

**مصفوفة مربعة (matrice carréé) :**

اذا كان $n = m$ نقول ان المصفوفة A مربعة من الدرجة n و نرمز لها :

$$A_n \in \mathcal{M}_n(R)$$

ترفق بالكل مصفوفة مربعة بما يسمى المحدد .

**منقولة مصفوفة ( matrice transposé) :**

كل مصفوفة تقبل مصفوفة منقولة لها و نرمز لها $A^t$ بحيث :

$$A^t = B \ \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

مثال :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**خواص:**

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(A.B)^t = A^t.B^t$$

$$[A^t]^t = A$$

**المصفوفة القطرية (matrice diagonale) :**

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة اذا كان :

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 0 & si\ i \neq j \\ a_{ii} \neq 0 & si\ i = j \end{cases}$$

وعليه يكون شكل المصفوفة القطرية :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & . \\ . & . & a_{ii} & \cdot & . \\ . & . & \cdot & a_{ii} & . \\ 0 & . & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**خاصية :**

محدد المصفوفة القطرية يكون بالشكل :

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22} \ldots\ldots a_{nn}$$

**المصفوفة الاحادية (matrice d'identité) :**

اذا تساوت جميع عناصر القطر الرئيسي (diagonale principale) في المصفوفة القطرية للقيمة 1 نقول ان المصفوفة احادية ونرمز لها : $I$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 \ldots & \ldots 1 & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \ldots\ldots 1 & . & . \\ . & . & . & \ldots . 1 & . \\ 0 & . & \cdot & \cdot & \ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

اي :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \,; si\ i = j \\ 0 \,; si\ i \neq j \end{cases}$$

مثال :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots$$

خاصية :

محدد المصفوفة الاحادية يساوي للقيمة 1

$$det(I) = 1$$

$$I_n.A_{nm} = A_{nm}$$

**مصفوفة سلمية :**

المصفوفة السلمية هي مصفوفة قطرية التي تتساوى فيها جميع عاصر القطر الرئيسي وتكون مختلفة للواحد وتكون بالشكل :

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ldots\ldots k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots k & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 0 & si\ i \neq j \\ a_{ii} = k \neq 1 & si\ i = j \end{cases}$$

ويمكن كتابة مصفوفة السلمية بدلالة مصفوفة الوحدة :

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ldots\ldots k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots k & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ldots\ldots 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots 1 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

$$A = kI_n$$

**مصفوفة مثلثية علوية (matrice triangulaire supérieure) :**

اذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر و تكون بالشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

**مصفوفة مثلثية سفلية (matrice triangulaire inférieure) :**

اذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر و تكون بالشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**مصفوفة متناضرة (matrice symétrique) :**

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة نقول عنها انها متناضرة اذا كانت :

$$A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

**مصفوفة شاذة (matrice singulière) :**

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ التي من خصائصها ان محددها معدوم اذن :

$$det(A) = |A_n| = 0$$

**مصفوفة نضامية (marice rigulière) :**

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ التي من خصائصها ان محددها غيرمعدوم اذن :

$$det(A) = |A_n| \neq 0$$

**اثر المصفوفة (trace de'une matrice) :**

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة اثرها هو مجموع عناصر القطر الرئيسي اي :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**العمليات على المصفوفات (les opérations sur les matrices) :**

تساوي مصفوفتين :

لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n,m}$ و المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n,m}$ نقول ان المصفوفتين متساويتين اذا كان :

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A; B \in \mathcal{M}_{n,m}(R) \\ a_{ij} = b_{ij} \; \forall i = 1 \ldots . n \; ; \; \forall j = 1 \ldots . m \end{cases}$$

**جمع مصفوفتين :**

لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n,m}$ و المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n,m}$ نقول ان المصفوفة $C = [c_{ij}]_{n,m}$ جمع المصفوفتين $A \; et \; B$ اذا كان :

$$C = A + B \Leftrightarrow \begin{cases} C \in \mathcal{M}_{n,m}(R) \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; \forall i = 1 \ldots . n \; ; \; \forall j = 1 \ldots . m \end{cases}$$

خواص جمع المصفوفات :

- خاصية التجميعية : $(A + B) + C = A + (B + C)$

مثال :

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\4&4\end{pmatrix}$$

$$(B+C)=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\4&4\end{pmatrix}$$

اذن : $(A+B)+C=A+(B+C)$

- خاصية تبديلية : $A+B=B+A$

مثال :

$$A_{(2)}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\qquad B_{(2)}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\quad C_{(2)}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$$

$$B+A=\left[\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$$

اذن : $A+B=B+A$

- جمع مصفوفة مثلثية علويه مع مصفوفة مثاثية علوية هي مصفوفة مثلية علوية.

مثال :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&11\\0&0&3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\0&-3&1\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-1&12\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

- جمع مصفوفة مثلثية سفلية مع مصفوفة مثاثية سفلية هي مصفوفة مثلية سفلية.

مثال :

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\4&6&0\\6&4&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3&0&0\\5&9&0\\7&3&5\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}5&0&0\\9&15&0\\19&7&7\end{pmatrix}$$

- المصفوفة الصفرية $[0]_{n,m}$ عنصر حيادي بانسبة لعملية الجمع

- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- $\alpha(\beta A)=(\alpha.\beta)A$

**عملية الضرب :**

عملية الضرب بالنسبة للمصفوفات$(\mathrm{B}_{p,m})$.$(\mathrm{A}_{n,p})$ يكون بتحقق الشرط التالي:

عدد اعمدة المصفوفة $(\mathrm{A}_{n,p})$ $(p)$ يساوي عدد اسطر المصفوفة $(\mathrm{B}_{p,m})$ $(p)$

اذا كانت المصفوفة A ذات الرتبة $(m,n)$ و المصفوفة$B$ ذات الرتبة $(n,p)$ اذن المصفوفة A. B هي من الرتبة $(m,p)$

اذن :

$$A\in\mathcal{M}_{n,p}(R);\quad B\in\mathcal{M}_{p,m}(R)$$

$$C=A.B=\begin{cases}C\in\mathcal{M}_{n,m}(R)\\ C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\end{cases}$$

مثال :

لدينا المصفوفتين :

$$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

احسب $A.B;\ C.D$

الحل :

$$A.B=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$C.D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

**خواص ضرب المصفوفات :**

- $\mathrm{A}.(B.C) = (A.B).C$

**مثال :**

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{A}.(B + C) = (A.B) + (A.C)$

**مثال :**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} - 6 \\ \frac{1}{2} + 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} + 6 \\ \frac{1}{2} - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $(\mathbf{A} + B).(C) = (A.C) + (B.C)$

**مثال :**

**لدينا :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**احسب :** $[A + B].C;\ \ ([A.C] + [B.C])$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- **ضرب مصفوفة مثلثية علوية $\times$ مصفوفة مثلثية علوية هي عبارة عن مصفوفة مثلثية علوية**

**مثال :**

**لدينا :**

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&4\\0&2&-2\\0&0&-3\end{pmatrix}\ ;B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&-7\\0&0&1\end{pmatrix}$$

**احسب** $A.B$

**الحل :**

$$A.B=\begin{pmatrix}-1&0&4\\0&2&-2\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&-2&-7\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3&4\\0&-4&-16\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

- **ضرب مصفوفة مثلثية سفلية $\times$ مصفوفة مثلثية سفلية هي عبارة عن مصفوفة مثلثية سفلية**

**مثال :**

**لدينا :**

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-3&2&0\\-2&3&1\end{pmatrix}\ ;B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

**احسب** $A.B$

$$A.B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-3&2&0\\-2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-4&0\\7&-4&1\end{pmatrix}$$

**ملاحظة:**

بالصفة عامة ضرب المصفوفات ليس تبديلي معناه:

$$A.B \neq B.A$$

حالة خاصة :

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n)}(R)$ ولدينا مصفوفة الوحدة $I_n$ اذن :

$$I_n.A = A.I_n$$

**مثال :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**ملاحظة :**

ضرب مصفوفتان غير صفريتيين يمكن ان نحصل على مصفوفة صفرية

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**اذن :**

$$A.B = 0 \nRightarrow A = 0 \; ou \; B = 0$$

اذا كانت $A$ مصفوفة مربعة و كان $k$ عددا صحيحا غير سالب اذن :

$$A^0 = I$$

$$A^k.A = A^{k+1}$$

مثال :

ليكن المصفوفة ( ) $A \in \mathcal{M}_3$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

احسب $A^n$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2)^n \end{pmatrix}$$

خاصية :

لتكن المصفوفتان : ; $A \in \mathcal{M}_n(\ \ )$ ; $B \in \mathcal{M}_n(\ \ )$ بحيث : $A.B = B.A$

اذن :

$$(A+B)^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{k} . A^{p-k} . B^k$$

**المحددات (Déterminants) :**

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ المحددات من الدرجة $n \times n$ هي عبارة عن $n$عنصرا مرتبة في $n$ عمود $n$ سطر و $n$ عمود موضوعة بين خطين متوازيين من الشكل:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & a_{ii} & \dots & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & . & \dots & . \\ . & . & \dots & \dots & \dots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

او يرمز له بالشكل المختصر : $det(A) = |a_{ij}|_n$

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ من الدرجة $2 \times 2$ فان المحدد المصفوفة $A$ نرمز له بالرمز $der(A)$ و يحسب بالشكل الاتي :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ من الدرجة $n = 3 \times 3$ فان المحدد المصفوفة $A$ نرمز له بالرمز $der(A)$ و يحسب بالشكل الاتي :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

نشر المحدد بالنسبة لاعمدة او الاسطر :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ نرمز للمصفوفة المربعة $S_{pq}$ من الرجة $n-1$ والتي يمكن الحصول عليها بحذف العمود وسطر المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذن :

النشر لمحدد المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذا حذفنا سطريكون بالعلاقة :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{q+i} . det(S_{iq})$$

النشر لمحدد المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذا حذفنا عمود يكون بالعلاقة :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{p+j} . det(S_{pj})$$

**محدد المصفوفة المثلثية :**

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة مثلثية (علوية او سفلية ) اذن محددها هو :

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- خواص المحدد :
- $det(A^t) = det(A)$

مثال :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_3(\quad)$ معرفة كما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

احسب $^{t}$ ثم قم بحساب : $det(A)\,, det(A^t)$

الحل :

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 - 2C_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 - 12 = -9$$

$$det(A^t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-2-1) - 2.6$$

$$= 3 - 12 = 9$$

$$det(A^t) = det(A)$$

- $det(A.B) = det(A).det(B)$

لتكن المصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

احسب : $det(A.B)\;\; ; det(A).det(B)$

ماذا تستنتج ؟

الحل :

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+a & 2 & 3-2a\\ 1 & 0 & -2-a\\ -a & 2a & 3a-1\end{pmatrix}$$

$$det(A.B)=(-1+a)\begin{vmatrix}0 & -2-a\\ 2a & 3a-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & -2-a\\ -a & 3a-1\end{vmatrix}$$
$$+(3-2a)\begin{vmatrix}1 & 0\\ -a & 2a\end{vmatrix}$$

$$=(-1+a)(2+a)(2a)-2[(3a-1)-a(2+a)]+(3-2a)2a$$

$$det(A.B)=(2+a)[(-1+a)(2a)+2a]-2(3a-1)+(3-2a)2a$$

$$det(A.B)=2a^2(2+a)-2(3a-1)+(3-2a)2a$$

$$=2a^3+4a^2-6a+2+6a-4a^2=2(a^3+1)$$

$$det(A.B)=2(a^3+1)$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ a & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}0 & a\\ a & 1\end{vmatrix}$$

$$det(A)=1+a^3$$

$$det(B)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=2$$

$$det(A).det(B)=2(1+a^3)=det(A.B)$$

نتيجة :

$$det(A).det(B)=det(A.B)$$

- $det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}$

مثال :

احسب معكوس المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

احسب $det(A);\ det(A^{-1})$

ماذا تستنتج؟

الحل :

لكي يكون للمصفوفة A معكوس يجب ان يكون محدد المصفوفة A يختلف عن الصفر.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} \overrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m-1 \end{vmatrix} \overrightarrow{L_3 = L_3 + \frac{1}{m} L_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m-1-\frac{1}{m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & \frac{m^2-m-1}{m} \end{vmatrix}$$

$$det(A) = m^2 - m - 1$$

اذن للبحث عن معكوس المصفوفة A نبحث عن قيم حل المعادلة :

$$det(A) = m^2 - m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

معكوس المصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} m^2-1 & -1 & -m \\ -1 & m-1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{m^2-m-1} \begin{pmatrix} m^2-1 & -1 & -m \\ -1 & m-1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$det(A^{-1}) = \left| \frac{1}{m^2-m-1} \begin{pmatrix} m^2-1 & -1 & -m \\ -1 & m-1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{pmatrix} \right|$$

باستعمال طريقة Sarrus نجد :

$$\begin{vmatrix} m^2-1 & -1 & -m \\ -1 & m-1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{vmatrix} = (m^2-m-1)^2$$

$$det(A^{-1}) = \frac{(m^2-m-1)^2}{(m^2-m-1)^3} = \frac{1}{m^2-m-1}$$

نتيجة :

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

- $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$

مثال :

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(4-6) = -4 \neq -8$$

اذن :

$$|A| + |B| \neq |A + B|$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

$$|A| + |B| \neq |A + B|$$

نضرية :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذن :

$$det(A^n) = [det(A)]^n$$

مثال :

لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

احسب $A^3; det(A^3); [det(A)]^3$

ماذا تستنتج؟

الخل :

$$A^3 = A^2 . A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -11 & 13 \\ 13 & -11 & 16 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 . A = \begin{pmatrix} 14 & -11 & 13 \\ 13 & -11 & 16 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 13 \\ 13 & -22 & 16 \\ -3 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

حساب محدد المصفوفة $A^3$ :

$$det(A^3) = \begin{vmatrix} 3 & -11 & 13 \\ 13 & -22 & 16 \\ -3 & 0 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -11 & 13 & 3 & -11 \\ 13 & -22 & 16 & 13 & -22 \\ -3 & 0 & -13 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3.(-22)(-13) + (-11)(16)(-3) - (13).(-22)(-3) - (-11)(13)(-13)$$

$$= 858 + 528 - 858 - 1859 = -1331$$

$$det(A^3) = -1331$$

حساب محدد المصفوفة A

$$det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + 2L_1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 11 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + 3L_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - \frac{3}{4}L_2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{11}{4} \end{vmatrix} = -11$$

$$det(A) = -11$$

$$[det(A)]^3 = (-11)^3 = -1331$$

نتيجة :

$$det(A^3) = [det(A)]^3 = -1331$$

**محدد مجموعة من الاشعة (déterminant d'une famille de vecteurs) :**

لتكن $\{U_1;\ U_2;\ \dots\ \dots\ \dots\ U_n\}$ جملة من الاشعة في الفضاء $R^n$ محدد هذه الجملة هو محدد المصفوفة التي تكون عناصرها مشكلة من جملة الاشعة $\{U_1;\ U_2;\ \dots\ \dots\ \dots\ U_n\}$

**خواص محدد جملة من الاشعة :**

لتكن $\{U_1;\ U_2;\ \dots\ \dots\ \dots\ U_n\}$ جملة من الاشعة في الفضاء $R^n$ اذا كان :

$$det(\{U_1;\ U_2;\ \dots\ \dots\ \dots\ U_n\}) = 0$$

اذن الجملة $\{U_1;\ U_2;\ \dots\ \dots\ \dots\ U_n\}$ مرتبطة خطيا

مثال :

لتكن جملة من الاشعة التالية :

$$S = \{u_1 = (7,1,2);\ u_2 = (2,-2,4);\ u_3 = (19;3,5)\}$$

ادرس الارتباط الخطي لهذه الجملة بطريقة المحدد .

الحل :

نعيد صياغة جملة الاشعة في شكل مصفوفة.

$$A = (u_1;\ u_2;\ u_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

نلاحض ان $\overrightarrow{L_1 = 3L_2 + 2L_3}$ اذن :

$$det(A) = 0$$

وعليه الجملة مرتبطة خطيا

اذا كان لدينا :

$$det(\{U_1;\ U_2; \dots \dots \dots U_n\}) \neq 0$$

اذن الجملة $\{U_1;\ U_2; \dots \dots \dots U_n\}$ تشكل اساس في الفضاء $R^n$

نتيجة :

كل مصفوفة تحتوي على سطرين او عمودين متمثلان (colinéaire) يكون محددها يساوي صفر.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 0$$

اذن اذا كان سطر او عمود في مصفوفة عناصره معدومة يكون محددها ذو قيمة صفر.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 0$$

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة مربعة يمكن ان نستخرج عامل مشترك من احدى الاعمدة او الاسطر اذن :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \alpha |A|$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة مربعة من الشكل :

$$A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

اذن :

$$det(A) = \alpha^n |A|$$

مثال :

$$A = -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \left| -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right| = (-2)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8(3) = -24$$

**العمليات على المحددات :**

عملية التبديل بين الاسطر او الاعمدة تعكس اشارة المحدد

$$A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nn} \end{vmatrix} \overrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_n} = - \begin{vmatrix} \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \end{vmatrix}$$

**مثال :**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{\sqrt{2}} & \mathbf{\sqrt{2}} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3}=-\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-\left(\sqrt{2}\right)$$

**اي اضافة الى سطر او عمود لاتغير من قيمة المحدد اي :**

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\overrightarrow{L_1\leftrightarrow \alpha L_n}=\begin{vmatrix}\alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{11} & \cdots & a_{1n}\end{vmatrix}$$

**مثال :**

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 3\\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 4\end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 3\\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 4\end{vmatrix}\overrightarrow{L_1=L_2+L_1}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 4\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{L_3=L_3-\frac{\sqrt{3}}{3}L_1}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3} & 4+\frac{\sqrt{3}}{3}\end{vmatrix}=-6\sqrt{3}-21$$

**مثال2 :**

**احسب محدد المصفوفة التالية :**

$$A=\begin{pmatrix}a & b & b & c\\ b & a & c & b\\ b & c & a & b\\ c & b & b & a\end{pmatrix}$$

**الحل :**

$$det(A)=\begin{vmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1=C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} a+c+2b & b & b & c \\ a+c+2b & a & c & b \\ a+c+2b & c & a & b \\ a+c+2b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+c+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & c \\ 0 & a-b & c-b & b-c \\ 0 & c-b & a-b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1 \\ L_4=L_4-L_1 \end{matrix}$$

$$=(a+c+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & c \\ 0 & a-b & c-b & b-c \\ 0 & c-b & a-b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+c+2b)\begin{vmatrix} a-b & c-b & b-c \\ c-b & a-b & b-c \\ 0 & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

$$=-(a+c+2b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a-c \\ c-b & a-b & b-c \\ a-b & c-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$=-(a+c+2b)(a-c)\begin{vmatrix} c-b & a-b \\ a-b & c-b \end{vmatrix}$$

$$=-(a+c+2b)[(a-c)((c-b)^2-(a-b)^2)]$$

$$=-(a+c+2b)[(a-c)(c^2+b^2-2cb-a^2-b^2+2ab)]$$

$$=-(a+c+2b)[(a-c)([c-a][c+a]-2b[c-a])]$$

$$=-(a+c+2b)[a-c]^2[-[c+a]+2b]$$

$$=(a+c+2b)[a-c]^2\big[[c+a]-2b\big]$$

$$det(A)=(a+c+2b)[a-c]^2\big[[c+a]-2b\big]$$

**محدد مصفوفة متعامدة :**

لتكن المصففوفة $A\in\mathcal{M}_n(R)$ متعامدة بحيث :

$$A = B.B^t = B^t.B = I_n$$

اذن :

$$det(A) = 1$$

**حساب المحدد بطريقة Sarrus :**

**مثال :**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2b^2 & b^2 & 0 \\ 2b+c & b & c \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2b^2 & b^2 & 0 \\ 2b+c & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2b^2 & b^2 & 0 & 2b^2 & b^2 \\ 2b+c & b & c & 2b+c & b \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= 2(cb^2) + 4b^3 - 4cb^2 - 4(cb^2) - 2(cb^2) - 4b^3}$$

$$\boldsymbol{det(A) = -8cb^2}$$