من أبرز الأساليب الرياضية المستخدمة في حل مسائل البرمجة الخطية مايلي :

- الطريقة البيانية.
- الطريقة المبسطة أو ما يعرف بـ: طريقة السمبلاكس (La méthode de simplex)

الطريقة البيانية:

تعد من أسهل الطرق إلا أنها تستخدم لحل مسائل البرمجة الخطية ذات متغيرين فقط، تعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لإيجاد الحل الأمثل و ذلك بإتباع الخطوات التالية:

- تحويل المتراجحات إلى معادلات.
- إيجاد إحداثيات المستقيمات (المعادلات)، حيث نجعل أحد المتغيرين يساوي الصفر و نحدد قيمة المتغير الثاني.
- نقوم برسم المستقيمات في معلم متعامد و متجانس، حيث نسمي محور السينات بالمتغير الأول و محور العينات بالمتغير الثاني.
- نحدد إتجاه القيود أي نحدد مساحة الحل بالنسبة لكل قيد (حسب شكل المتراجحة إذا كان القيد أكبر أو يساوي يتم شطب القيم الصغرى أي أن الحلول بيانيا هي النقاط التي تقع على المستقيم و ما فوقه أما إذا كان القيد أصغر أو يساوي يتم شطب القيم الكبرى أي أن الحلول بيانيا هي النقاط التي تقع على المستقيم و ما دونه)، و في الأخير نحدد قيد عدم السالبية الذي على أساسه يكون الحل في الربع الأول من المستوي .
- تحديد منطقة الحلول الممكنة و هي المنطقة التي تحقق قيود المسألة مجتمعة و جميع نقاطها تعتبر حلولا ممكنة.
- تحديد رؤوس زوايا منطقة الحلول الممكنة و حساب إحداثياتها ،حيث تتكون كل زاوية من زواياها من تقاطع مستقيمين أو أكثر من المستقيمات الممثلة للمسألة و لحساب إحداثياتها نقوم بتحديد المستقيمات التي أنتجت الزاوية ثم يتم حل جملة المعادلات جبريا.
- تقييم دالة الهدف عند رؤوس زاوايا منطقة الحلول الممكنة، حيث يتم تعويض إحداثيات كل نقطة في دالة الهدف.
- إستنتاج الحل الأمثل و الذي يتمثل في إختيار النقطة التي تحقق أفضل ناتج (أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم ($\boldsymbol{Max\ Z}$) ، أدنى قيمة لدالة الهدف في حالة التدنئة ($\boldsymbol{Min\ Z}$).

مثال توضيحي: حالة التعظيم $\boldsymbol{Max\ Z}$

بإستعمال الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرنامج الآتي :

$$Max\ Z = 8\,x_1 + 6x_2$$

$$\text{S/C}\begin{cases} 4\,x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2\,x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل :

أولا : نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات على الشكل التالي :

$$4\,x_1 + 2x_2 = 60$$
$$2\,x_1 + 4x_2 = 48$$
$$x_1 \geq 0\,,\;\; x_2 \geq 0$$

ثانيا : نقوم بحساب إحداثيات المستقيمات : حيث نفرض أن أحد المتغيرات يساوي الصفر ثم نجد الثاني على النحو التالي :

$$4\,x_1 + 2x_2 = 60$$

x_1	0	15
x_2	30	0

$$2\,x_1 + 4x_2 = 48$$

x_1	0	24
x_2	12	0

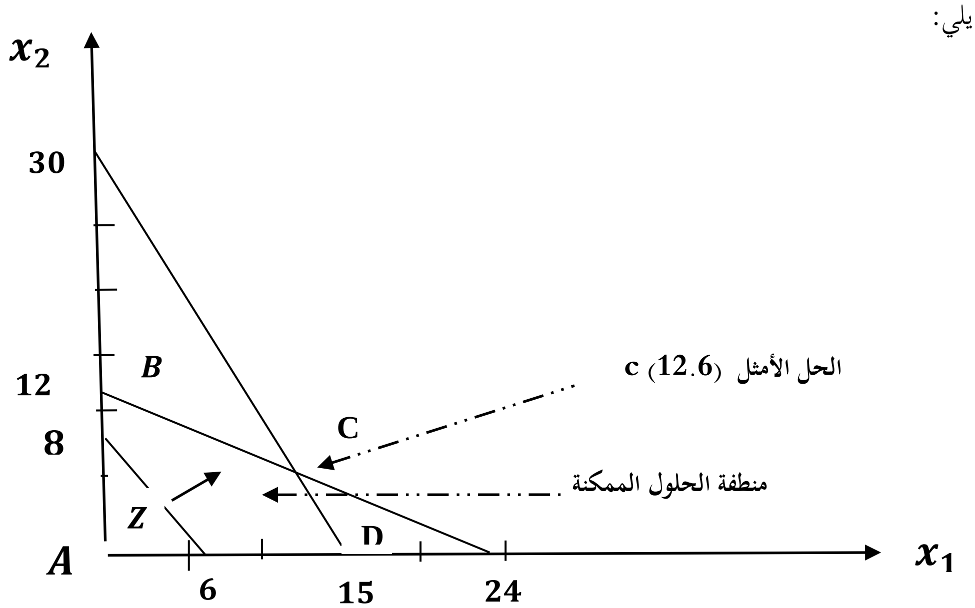
مثلا نفرض أن قيمة دالة الهدف تساوي 48 تصبح $Z = 8 \quad {}_1 + 6x_2 = 48$

و تكون إحداثياتها :

x_1	0	6
x_2	8	0

ثالثا : نقوم بالتمثيل البياني للمستقيمات في مستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس مع إحترام شروط المسألة

فيكون الرسم كما يلي:



نسمي المساحة المحصورة بين النقاط (A,B,C,D) بمنطقة الحلول الممكنة التي تحقق قيود المسألة مجتمعة و لمعرفة الحل الأمثل نقوم بمقارنة قيم دالة الهدف عند مختلف نقاط أو أطراف أو زوايا مساحة الحلول الممكنة و الحل الأمثل في هذه الحالة هو النقطة التي تحقق أعظم ربح و بيانيا هي أبعد أو آخر نقطة يلمسها مستقيم دالة الهدف و هي النقطة $C(x_1 , x_2)=(12,6)$.

التأكد الرياضي:

نقوم أولا بتحديد إحداثيات نقاط منطقة الحلول الممكنة (x_1 , x_2) و المتمثلة في :

النقطة A و هي نقطة المبدأ و التي إحداثياتها A (0 , 0) ، تكون قيمة دالة الهدف :

Z_A = 8(0) + 6(0)=0

النقطة B التي إحداثياتها B (0 ,12) ، تكون قيمة دالة الهدف :

Z_B =8 (0) + 6(12)=72

النقطة C التي تم الحصول عليها من تقاطع القيدين الأول و الثاني و بالتالي يمكن إيجاد إحداثياتها بحل جملة معادلتين :

$$4x_1 + 2x_2 = 60$$
$$2x_1 + 4x_2 = 48$$

إذن إحداثيات النقطة C (12 , 6) ، و بالتالي تكون قيمة دالة الهدف :

Z_C =8 (12) + 6 (6)=132

النقطة D التي إحداثياتها D (15 ,0) ، تكون قيمة دالة الهدف :

Z_D =8 (15) + 6(0)=120

بمقارنة الحلول عند مختلف النقاط A ,B,C ,D يتضح أن الحل الأمثل و الذي يمثل أكبر قيمة لدالة الهدف لأننا بصدد التعظيم ($\boldsymbol{Max\ Z}$) ، يكون عند النقطة C (12, 6) حيث يمكن إنتاج 12 وحدة من المنتج الأول و 6 وحدات من المنتج الثاني و تحقيق أقصى ربح قدره 132 وحدة نقدية مع الإستغلال الكامل للموارد المتاحة .

ملاحظة : الإستغلال التام للطاقات الإنتاجية ليس شرطا يجب تحققه عند الحل الأمثل بل يكفي أن تتحقق دالة الهدف (أكبر قيمة في حالة $\boldsymbol{Max\ Z}$ و أدنى قيمة في حالة $\boldsymbol{Min\ Z}$)