



INSTITUT SUPERIEUR DES ETUDES TECHNOLOGIQUES DE GAFSA

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

MASTERE PROFESSIONNEL EN MECANIQUE DES SYSTEMES DES
INDUSTRIES MINIERES

SUPPORT DE COURS : ELASTICITE-MMC

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{14} & C_{14} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Elaboré par : Mr. Nciri Rached

Pour la formation des étudiants du Niveau1-Mastère Professionnel en
Mécanique des Systèmes des Industries Minières

Année universitaire : 2016-2017

PREFACE

Cet ouvrage vient pour s'inscrire dans l'ensemble des productions pédagogiques élaborées au sein du département Génie Mécanique de l'Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Gafsa. Durant ce travail, je me suis attelé à rédiger un support de cours pour le module « Elasticité-MMC » destiné pour les élèves du Niveau 1-Mastère Professionnel en Mécanique des Systèmes des Industries Minières.

PLAN DU COURS « ELASTICITE-MMC »

- **Profil :** Génie Mécanique-Mécanique des Systèmes des Industries Minières
- **Niveau :** M1-Mécanique des Systèmes des Industries Minières-S2
- **Pré-requis :** Niveau Baccalauréat.
- **Nombre d'heures :** 21 heures de cours intégré.
- **Buts du cours :**
 - Comprendre et savoir quantifier la déformation dans un milieu continu.
 - Comprendre et savoir quantifier la contrainte dans un milieu continu.
 - Comprendre et savoir appliquer les lois de comportement (prévoir la déformation connaissant la contrainte et vice-versa ça)

SOMMAIRE

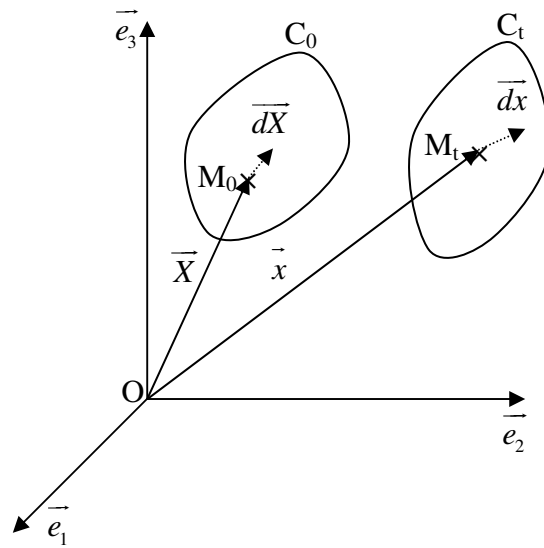
CHAPITRE I: DEFORMATIONS DANS UN MILIEU CONTINU	1
I. TENSEURS GRADIENT	1
I.1. Tenseur gradient.....	1
I.2. Tenseur gradient de déplacement.....	1
II. TENSEURS DE DEFORMATION.....	2
II.1. Tenseurs de Cauchy-Green.....	2
II.2. Tenseur de Green-Lagrange	3
II.3. Tenseur d'Euler-Almansi	3
II.4. Tenseur des déformations linéarisé	3
II.5. Interprétation des résultats.....	4
II.5.1. Allongement (dilatation linéaire).....	4
II.5.2. Glissement (distorsion angulaire)	5
II.5.3. Tenseur des déformations linéarisé.....	6
II.5.4. Dilatation volumique	6
II.5.5. Interprétation géométrique.....	6
III. CONDITION DE COMPATIBILITE	7
IV. EXERCICE D'APPLICATION	8
CHAPITRE II: CONTRAINTES DANS UN MILIEU CONTINU.....	11
I. VECTEUR CONTRAINTE	11
I.1. Postulat de Cauchy.....	11
I.2. Contraintes tangentielle et normale	11
II. TENSEUR CONTRAINTE	12
III. REPRESENTATION GRAPHIQUE (TRICERCLE DE MOHR)	12
III.1. Définition	12
III.2. Principe de construction	12
IV. EXERCICE D'APPLICATION	13
CHAPITRE III: LOI DE COMPORTEMENT DES MILIEUX CONTINUS.....	17
I. RELATIONS ENTRE L'ETAT DE CONTRAINTE ET L'ETAT DE DEFORMATION	17
II. RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS DE LAME ET LES PROPRIETES MECANQUES DU MATERIAU.....	18
III. EQUATIONS SUPPLEMENTAIRES.....	18
III.1. Equation de Navier.....	18
III.2. Equation de Beltrami.....	18
IV. EXERCICE D'APPLICATION	19

CHAPITRE I: DEFORMATIONS DANS UN MILIEU CONTINU

I. Tenseurs gradient

I.1. Tenseur gradient

Pour un même milieu continu et dans un même référentiel $\mathcal{R}$, on imagine 2 configurations : initiale C_0 et à un instant t C_t . Le même point M , noté M_0 dans la configuration C_0 , sera noté M_t dans la configuration C_t . Pour matérialiser la déformation, on considère 2 vecteurs $\overrightarrow{dX}$ et $\overrightarrow{dx}$ définis respectivement au voisinage des points M_0 et M_t .



La transformation $\overrightarrow{dX} \rightarrow \overrightarrow{dx}$ s'écrit,

$$\overrightarrow{dx} = \overline{\overline{F}} \overrightarrow{dX}$$

Avec $\overline{\overline{F}} = \left[F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right]$ est un tenseur de second ordre (matrice 3x3) appelé Tenseur gradient.

I.2. Tenseur gradient de déplacement

Le déplacement du point M lors de la transformation de la configuration initiale C_0 vers la configuration C_t s'écrit :

$$\vec{u}(M, t) = \overrightarrow{M_0 M_t} = \vec{x} - \vec{X}$$

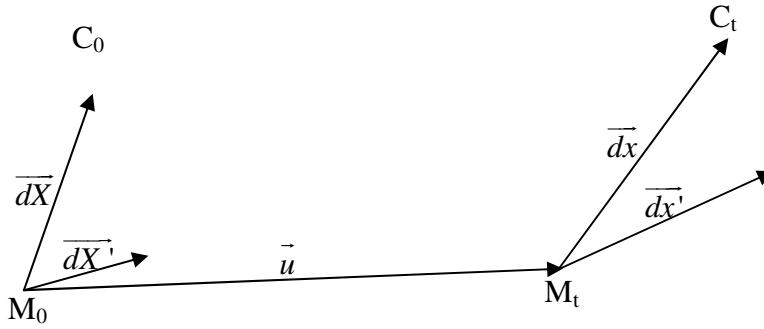
D'où,

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= d\vec{x} - d\vec{X} = (\vec{F} - \vec{I}) d\vec{X} \\ \Rightarrow \overline{\overline{\text{grad}\vec{u}}} &= (\vec{F} - \vec{I}) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right] \end{aligned}$$

$\overline{\overline{\text{grad}\vec{u}}}$ est un tenseur de second ordre (matrice 3x3) appelé Tenseur gradient de déplacement.

II. Tenseurs de déformation

Pour définir proprement une déformation, il est judicieux de considérer la variation du produit scalaire entre deux vecteurs matériels appliqués au point M étudié.



II.1. Tenseurs de Cauchy-Green

Le produit scalaire entre les deux vecteurs définis dans la configuration C_t s'écrit :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = (\vec{F} d\vec{X}) \cdot (\vec{F} d\vec{X}') = d\vec{X} \cdot (\vec{F}^T \otimes \vec{F}) d\vec{X}' = d\vec{X} \cdot \vec{C} d\vec{X}'$$

$$\vec{C} = \vec{F}^T \otimes \vec{F} = (\overline{\overline{\text{grad}\vec{u}}} + \vec{I})^T \otimes (\overline{\overline{\text{grad}\vec{u}}} + \vec{I})$$

$\vec{C}$ est un tenseur de second ordre (matrice 3x3) appelé Tenseur de Cauchy-Green droit.

De la même manière, on montre que,

$$d\vec{X} \cdot d\vec{X}' = (\vec{F}^{-1} d\vec{x}) \cdot (\vec{F}^{-1} d\vec{x}') = d\vec{x} \cdot (\vec{F}^{-1T} \otimes \vec{F}^{-1}) d\vec{x}' = d\vec{x} \cdot \vec{B} d\vec{x}'$$

$$\vec{B} = \vec{F} \otimes \vec{F}^T = (\overline{\overline{\text{grad}\vec{u}}} + \vec{I}) \otimes (\overline{\overline{\text{grad}\vec{u}}} + \vec{I})^T$$

$\overline{\overline{B}}$ est un tenseur de second ordre (matrice 3×3) appelé Tenseur de Cauchy-Green gauche.

II.2. Tenseur de Green-Lagrange

La variation du produit scalaire de deux vecteurs matériels entre la configuration C_t et celle C_0 s'écrit :

$$d\vec{x}.d\vec{x}' - d\vec{X}.d\vec{X}' = d\vec{X} \left(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}} \right) d\vec{X}' = 2d\vec{X} \overline{\overline{E}} d\vec{X}'$$

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u} \otimes \text{grad} \vec{u}}} \right)$$

$\overline{\overline{E}}$ est un tenseur de second ordre (matrice 3×3) appelé Tenseur de Green-Lagrange qui traduit l'évolution de l'état de déformation dans le sens $C_0 \rightarrow C_t$.

II.3. Tenseur d'Euler-Almansi

De la même manière que pour le cas du tenseur $\overline{\overline{E}}$, on montre que,

$$d\vec{x}.d\vec{x}' - d\vec{X}.d\vec{X}' = d\vec{x} \left(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{B}}^{-1} \right) d\vec{x}' = 2d\vec{x} \overline{\overline{A}} d\vec{x}'$$

$$\overline{\overline{A}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{B}}^{-1} \right)$$

$\overline{\overline{A}}$ est un tenseur de second ordre (matrice 3×3) appelé Tenseur d'Euler-Almansi qui traduit l'évolution de l'état de déformation dans le sens $C_t \rightarrow C_0$.

II.4. Tenseur des déformations linéarisé

L'écriture du tenseur de Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$ en fonction du tenseur gradient de déplacement $\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}}$ affiche un terme non linéaire :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} + \underbrace{\overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u} \otimes \text{grad} \vec{u}}}}_{\text{Terme non linéaire}} \right)$$

Cette non linéarité de l'état de déformation vis-à-vis du champ de déplacement complique considérablement le calcul. Heureusement, cette non linéarité peut être « contournée » si on

suppose que les transformations sont infinitésimales. Cette supposition est connue sous le nom de l'Hypothèse des Petites Perturbations (H.P.P.) :

- Les déplacements des points du milieu continu sont petits : les configurations C_0 et C_t peuvent être confondues.
- Les composants du tenseur gradient de déplacement $\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}}$ sont tous négligeables devant l'unité.

En appliquant la H.P.P., l'écriture des tenseurs des déformations devient plus simple et le terme non linéaire est négligé :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{C}} &= \overline{\overline{F}}^T \otimes \overline{\overline{F}} = \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{I}} \right)^T \otimes \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{I}} \right) = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} \\ \overline{\overline{E}} &= \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} \right) = \overline{\overline{\varepsilon}} \\ \overline{\overline{B}} &= \overline{\overline{F}} \otimes \overline{\overline{F}}^T = \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{I}} \right) \otimes \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{I}} \right)^T = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} = \overline{\overline{C}} \\ \overline{\overline{A}} &= \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{B}}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} \right) = \overline{\overline{E}} = \overline{\overline{\varepsilon}}\end{aligned}$$

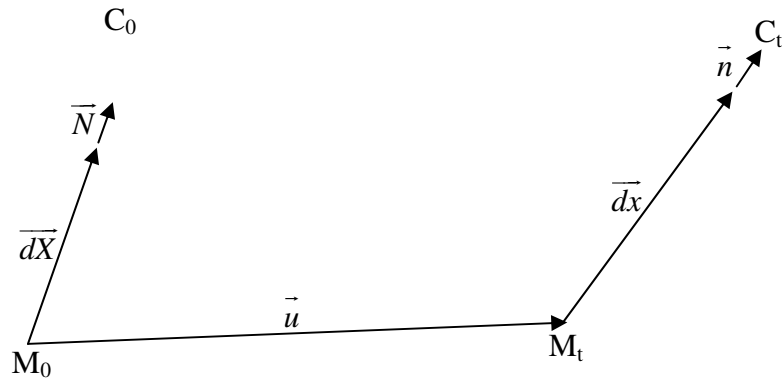
Le Tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est appelé Tenseur des déformations linéarisé. Il représente la partie symétrique du tenseur gradient de déplacement $\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}}$. On définit, aussi, le tenseur $\overline{\overline{\omega}}$ représentant la partie antisymétrique du tenseur $\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}}$.

$$\overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} - \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} \right)$$

II.5. Interprétation des résultats

II.5.1. Allongement (dilatation linéaire)

L'allongement (dilatation linéaire) d'un vecteur $\overline{dX} = dX \overline{N}$ appliqué au voisinage d'un point M_0 (configuration C_0) donne un vecteur $\overline{dx} = dx \overline{n}$ appliqué au voisinage d'un point M_t (configuration C_t).



L'allongement au voisinage du point M_0 dans la direction $\bar{N}$ s'écrit :

$$\varepsilon(M_0, \bar{N}) = \frac{dx - dX}{dX}$$

Or,

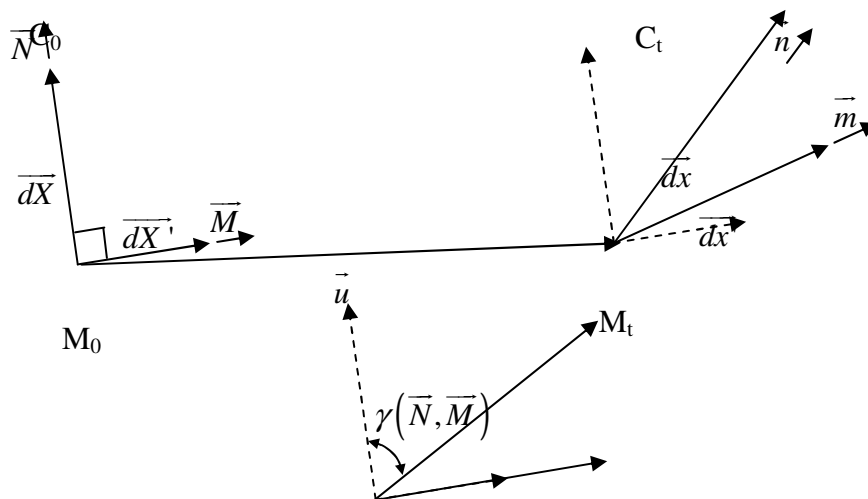
$$dx = \sqrt{dx \cdot dx} = dX \sqrt{\bar{N} \cdot \bar{C} \bar{N}}$$

D'où,

$$\varepsilon(M_0, \bar{N}) = \sqrt{\bar{N} \cdot \bar{C} \bar{N}} - 1 = \sqrt{\bar{N} (2\bar{E} + \bar{I}) \bar{N}} - 1$$

II.5.2. Glissement (distorsion angulaire)

Le glissement (distorsion angulaire) des deux vecteurs initialement perpendiculaires $\bar{dX} = dX \bar{N}$ et $\bar{dX}' = dX' \bar{M}$ appliqués au voisinage d'un point M_0 (configuration C_0) donne deux vecteurs $\bar{dx} = dx \bar{n}$ et $\bar{dx}' = dx' \bar{m}$ appliqués au voisinage d'un point M_t (configuration C_t).



Le glissement au voisinage du point M_0 dans les directions initialement perpendiculaire $\vec{N}$ et $\vec{M}$ s'écrit :

$$\gamma(M_0, \vec{N}, \vec{M}) = \text{Arc sin} \left(\frac{\vec{dx} \cdot \vec{dx}'}{dx \cdot dx'} \right)$$

D'où,

$$\gamma(M_0, \vec{N}, \vec{M}) = \text{Arc sin} \left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{CM}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{CN}} \cdot \sqrt{\vec{M} \cdot \vec{CM}}} \right) = \text{Arc sin} \left(\frac{2\vec{N} \cdot \vec{EM}}{(1 + \varepsilon(\vec{N}))(1 + \varepsilon(\vec{M}))} \right)$$

II.5.3. Tenseur des déformations linéarisé

Les termes diagonaux du tenseur des déformations linéarisé traduisent les allongements alors que ceux extra diagonaux traduisent les glissements.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon(\vec{e}_1) & \frac{\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{2} & \frac{\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{2} & \varepsilon(\vec{e}_2) & \frac{\gamma(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}{2} \\ \frac{\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_3)}{2} & \frac{\gamma(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}{2} & \varepsilon(\vec{e}_3) \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Il est à rappeler que le tenseur des déformations linéarisé est symétrique.

II.5.4. Dilatation volumique

La dilatation volumique θ traduit la variation de volume d'un milieu continu lors du passage de la configuration C_0 à celle C_t .

$$\theta = \frac{dv - dV}{dV}$$

II.5.5. Interprétation géométrique

On considère deux points infiniment voisins M_0 et M_0' dans la configuration initiale C_0 qui se transforme respectivement en M_t et M_t' dans la configuration C_t . Le champ de déplacement du point M_0' s'écrit,

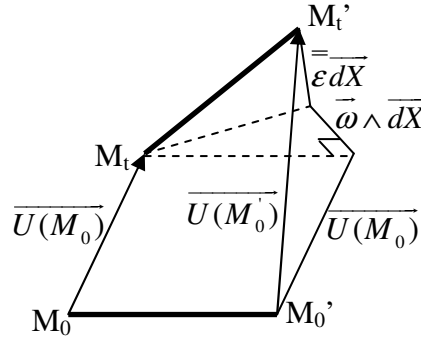
$$\overrightarrow{U(M_0')} = \overrightarrow{U(M_0)} + \overline{\overline{\omega}} d\overrightarrow{X} + \overline{\overline{\varepsilon}} d\overrightarrow{X}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\omega}}$ étant un tenseur antisymétrique, il est possible de lui associer un vecteur $\vec{\omega}$ tel que :

$$\overline{\overline{\omega}} d\overrightarrow{X} = \vec{\omega} \wedge d\overrightarrow{X}$$

D'où,

$$\overrightarrow{U(M_0')} = \underbrace{\overrightarrow{U(M_0)}}_{\text{champ de déplacement}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge d\overrightarrow{X}}_{\text{champ de rotation}} + \underbrace{\overline{\overline{\varepsilon}} d\overrightarrow{X}}_{\text{champ de déformation}}$$



III. Condition de compatibilité

Connaissant l'état de déformation (représenté par le tenseur de déformation linéarisé $\overline{\overline{\varepsilon}}$), Il n'est pas toujours possible de remonter à l'état de contrainte (représenté par le tenseur de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$) qui lui a donné naissance. Seul un état de déformation validant les conditions de compatibilité permet de « passage » $\overline{\overline{\varepsilon}} \rightarrow \overline{\overline{\sigma}}$. Ces conditions de compatibilité sont 6 équations qui relient entre les différentes composantes du tenseur de déformation linéarisé $\overline{\overline{\varepsilon}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ces conditions de compatibilité peuvent être écrites en 1 seule équation tensorielle :

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overline{\overline{\text{div}}} \left(\overline{\overline{\varepsilon}} \right) \right) + \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overline{\overline{\text{div}}} \left(\overline{\overline{\varepsilon}} \right) \right) \right)^T - \overline{\overline{\text{grad}}} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \left(\text{tr} \left(\overline{\overline{\varepsilon}} \right) \right) \right) - \Delta \left(\overline{\overline{\varepsilon}} \right) = \overline{\overline{0}}$$

IV. Exercice d'application

On considère une déformation décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = 1.1X_1 + 0.1X_2 + 0.15X_3 \\ x_2 = 1.11X_2 + 0.12X_3 \\ x_3 = 0.99X_3 \end{cases}$$

Q1 :

Déterminer les tenseurs : gradient $\overline{\overline{F}}$, gradient de déplacement $\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u}$, Cauchy-Green droit $\overline{\overline{C}}$ et gauche $\overline{\overline{B}}$, Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$ et Euler-Almansi $\overline{\overline{A}}$.

R1 :

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 & 0.15 \\ 0 & 1.11 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{u} = \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.15 \\ 0 & 0.11 & 0.12 \\ 0 & 0 & -0.01 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \otimes \overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1.11 & 0 \\ 0.15 & 0.12 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 & 0.15 \\ 0 & 1.11 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.21 & 0.11 & 0.165 \\ 0.11 & 1.2421 & 0.1482 \\ 0.165 & 0.1482 & 1.017 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{F}} \otimes \overline{\overline{F}}^T = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 & 0.15 \\ 0 & 1.11 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1.11 & 0 \\ 0.15 & 0.12 & 0.99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2425 & 0.129 & 0.1485 \\ 0.129 & 1.2465 & 0.1188 \\ 0.1485 & 0.1188 & 0.9801 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.21 & 0.11 & 0.165 \\ 0.11 & 0.2421 & 0.1482 \\ 0.165 & 0.1482 & 0.017 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{A}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{B}}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.1736 & -0.0745 & -0.1162 \\ -0.0745 & 0.1817 & -0.0879 \\ -0.1162 & -0.0879 & -0.0486 \end{pmatrix}$$

Q2 :

Est-il possible d'admettre l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P) ? Justifier votre réponse.

R2 :

Oui, il est possible d'admettre la H.P.P parce que les composantes du tenseur $\bar{\bar{\text{grad}}}\vec{u}$ sont négligeables devant l'unité.

Q3 :

Sous la H.P.P, déterminer le tenseur des déformations linéarisé. Expliquer les significations des composants diagonales et celles extra-diagonales.

R3 :

Sous la H.P.P, le tenseur des déformations linéarisé s'écrit,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\text{grad}}}\vec{u} + \bar{\bar{\text{grad}}}^T\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.15 \\ 0 & 0.11 & 0.12 \\ 0 & 0 & -0.01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.11 & 0 \\ 0.15 & 0.12 & -0.01 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.15 \\ 0.1 & 0.22 & 0.12 \\ 0.15 & 0.12 & -0.02 \end{pmatrix}$$

Les composantes diagonales : ϵ_{11} , ϵ_{22} et ϵ_{33} traduisent respectivement les allongements (dilatations linéaires) dans les directions : $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

Les composantes extra-diagonales : $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$, $\epsilon_{13} = \epsilon_{31}$ et $\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$ traduisent respectivement les glissements (distorsions angulaires) des couples de directions : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Q4 :

Déterminer l'allongement (dilatation linéaire) dans la direction $\vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

R4 :

$$\varepsilon(\vec{N}) = \sqrt{\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{N}} - 1 = \sqrt{\vec{N} (2\vec{E} + \vec{I}) \vec{N}} - 1$$

$$\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.21 & 0.11 & 0.165 \\ 0.11 & 1.2421 & 0.1482 \\ 0.165 & 0.1482 & 1.017 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.485 \\ 1.5003 \\ 1.3302 \end{pmatrix} = 4.3155$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\vec{N}) = 1.077$$

Q5 :

Déterminer le glissement (distorsion angulaire) dans les directions $\vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

R5 :

$$\gamma(\vec{N}, \vec{M}) = \text{Arc sin} \left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{M}}{\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{N}} \cdot \sqrt{\vec{M} \cdot \vec{C} \vec{M}}} \right) = \text{Arc sin} \left(\frac{2\vec{N} \cdot \vec{E} \vec{M}}{(1 + \varepsilon(\vec{N}))(1 + \varepsilon(\vec{M}))} \right)$$

$$\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.21 & 0.11 & 0.165 \\ 0.11 & 1.2421 & 0.1482 \\ 0.165 & 0.1482 & 1.017 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.165 \\ 0.1482 \\ 1.017 \end{pmatrix} = 0.3132$$

$$\vec{N} \cdot \vec{C} \vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.21 & 0.11 & 0.165 \\ 0.11 & 1.2421 & 0.1482 \\ 0.165 & 0.1482 & 1.017 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.3521 \\ 0.3132 \end{pmatrix} = 2.6721$$

$$\vec{M} \cdot \vec{C} \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.21 & 0.11 & 0.165 \\ 0.11 & 1.2421 & 0.1482 \\ 0.165 & 0.1482 & 1.017 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.165 \\ 0.1482 \\ 1.017 \end{pmatrix} = 1.017$$

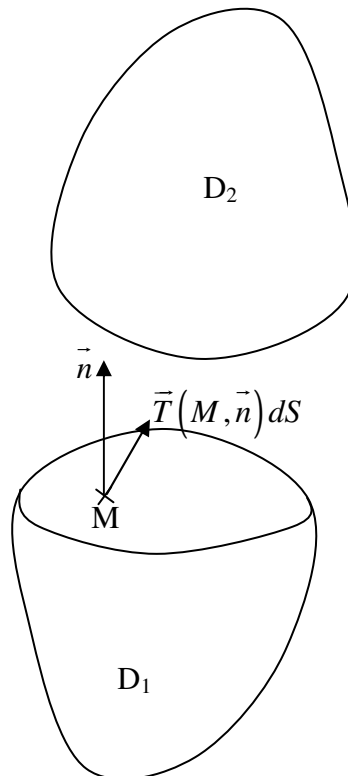
$$\Rightarrow \gamma(\vec{N}, \vec{M}) = 10.95^\circ$$

CHAPITRE II: CONTRAINTES DANS UN MILIEU CONTINU

I. Vecteur contrainte

I.1. Postulat de Cauchy

Soit un milieu continu D constitué de deux parties complémentaires D_1 et D_2 jointe par un plan qu'on appelle « facette de coupe ». Les efforts exercés par D_1 sur D_2 peuvent être représentés par une densité (répartition) surfacique des forces. Cette densité ne dépend que du point considéré et de la normale à la facette de coupe choisie contenant ce point, et elle est représentée par un vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ appelé « vecteur contrainte » au point M dans la direction définie par le vecteur normale $\vec{n}$.



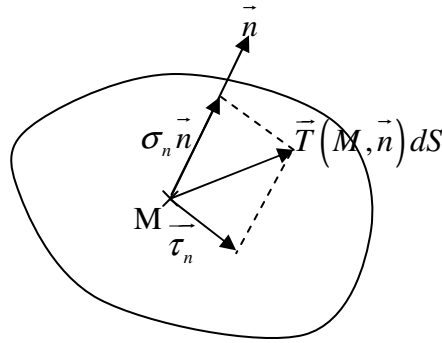
I.2. Contraintes tangentielle et normale

La projection du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur la normale à la facette de coupe auquel appartient le point considéré M donne la composante normale σ_n . La composante tangentielle

(appelée aussi cission ou cisaillement) est obtenu par projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur le plan de la facette de coupe.

$$\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{\tau}_n = \vec{n} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \wedge \vec{n} = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \cdot \vec{n}$$



II. Tenseur contrainte

L'état de contrainte en point M appartenant à une facette de coupe de normale $\vec{n}$ est défini par un tenseur de second ordre symétrique appelé « tenseur contrainte » et noté $\overline{\sigma}$ tel que :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\sigma}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

III. Représentation graphique (Tricercle de Mohr)

III.1. Définition

Le tricercle de Mohr est une représentation graphique de l'état de contrainte dans le plan $(\vec{n}, \vec{t})$ de la facette de coupe choisie auquel appartient le point considéré M. Il représente le lieu des états de contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ (modélisés par la pointe du vecteur contrainte) lorsque la facette de coupe tourne autour du point M.

III.2. Principe de construction

On considère un état de contrainte tridimensionnel modélisé par le tenseur contrainte $\overline{\sigma}$. La diagonalisation de ce tenseur permet de calculer les contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} . On

ordonne les contraintes propres dans l'ordre décroissant. Si on considère que $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, les trois cercles de Mohr seront :

- Cercle 1 :

$$\text{Rayon} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

$$\text{Centre} = \left(0, \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)$$

- Cercle 2 :

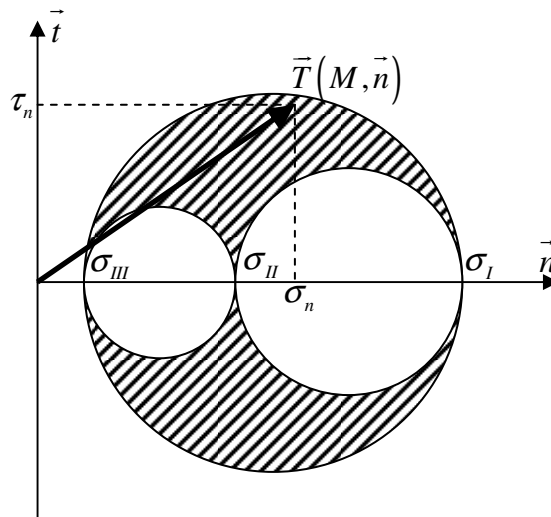
$$\text{Rayon} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

$$\text{Centre} = \left(0, \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)$$

- Cercle 3 :

$$\text{Rayon} = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}$$

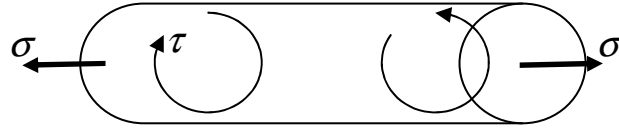
$$\text{Centre} = \left(0, \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right)$$



La pointe du vecteur contrainte varie dans la zone hachurée.

IV. Exercice d'application

On considère une poutre de section circulaire sollicitée en traction et torsion.



Q1 :

Donner l'état de contrainte résultant.

R1 :

$$\left[\overline{\sigma}_{\text{résultant}} \right] = \left[\overline{\sigma}_{\text{traction}} \right] + \left[\overline{\sigma}_{\text{torsion}} \right]$$

$$\left[\overline{\sigma}_{\text{traction}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} \quad \text{avec } \sigma = \frac{F}{S}$$

$$\left[\overline{\sigma}_{\text{torsion}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} \quad \text{avec } \tau = \frac{M_t}{I_G}$$

D'où,

$$\left[\overline{\sigma}_{\text{résultant}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

Q2 :

Représenter par un tricerle de Mohr le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans le plan $(\vec{n}, \vec{t})$.

R2 :

On doit d'abord commencer par diagonaliser le tenseur contrainte $\left[\overline{\sigma}_{\text{résultant}} \right]$. On établit le polynôme :

$$P(X) = \det \left(\left[\overline{\sigma}_{\text{résultant}} \right] - X \vec{I} \right) = (-X^2 + \sigma X + \tau^2) X$$

Les valeurs propres du tenseur contrainte $[\sigma_{\text{résultant}}]$ sont les 3 racines du polynôme $P(X)$

$$P(X) = (-X^2 + \sigma X + \tau^2)X = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \\ X_2 = \sigma_{II} = 0 \\ X_3 = \sigma_{III} = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$$

Le tricerle de Mohr est constitué des 3 cercles suivants :

1^{er} cercle :

$$\text{Rayon : } \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\text{Centre : } \left(0, \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} = \frac{\sigma}{2} \right)$$

2^{eme} cercle :

$$\text{Rayon : } \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \frac{\sigma}{4} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{4}$$

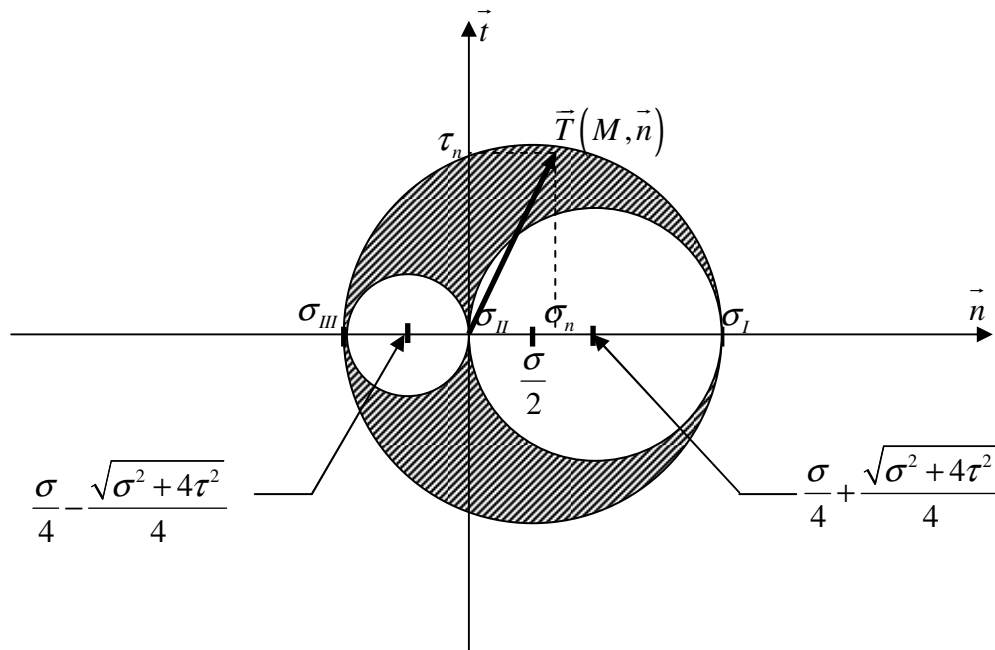
$$\text{Centre : } \left(0, \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} = \frac{\sigma}{4} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{4} \right)$$

3^{eme} cercle :

$$\text{Rayon : } \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} = -\frac{\sigma}{4} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{4}$$

$$\text{Centre : } \left(0, \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} = \frac{\sigma}{4} - \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{4} \right)$$

On représente, alors, graphiquement le tricerle de Mohr,



Q3 :

Interpréter le tricerle de Mohr.

R3 :

La pointe du vecteur contrainte $T(M, \vec{n})$ varie en fonction de la variation de la normale à la facette de coupe considérée. Cette pointe doit rester toujours dans la zone hachurée (appelé zone des contraintes admissibles).

CHAPITRE III: LOI DE COMPORTEMENT DES MILIEUX CONTINUS

I. Relations entre l'état de contrainte et l'état de déformation

Si le matériau présente un comportement **Elastique** et **Linéaire** et il est **Homogène** et **Isotrope** (ELHI), on peut déduire l'état de déformation à partir de l'état de contrainte ou l'inverse en se basant sur les deux relations suivantes traduisant la loi de comportement:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\sigma}} &= \bar{\bar{\sigma}}_0 + 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda\left(\text{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) - \beta(T - T_0)\right)\bar{\bar{I}} \\ \bar{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1+\nu}{E}\left(\bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma}}_0\right) + \left(\alpha(T - T_0) - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma}}_0)\right)\bar{\bar{I}}\end{aligned}$$

Avec,

- $\bar{\bar{\sigma}}$ et $\bar{\bar{\sigma}}_0$ sont respectivement l'état de contrainte à la configuration C_t et C_0 .
- $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est l'état de déformation.
- μ et λ sont respectivement le premier et le deuxième coefficient de Lamé.
- T et T_0 sont respectivement les températures à la configuration C_t et C_0 .
- E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de poisson du matériau.
- α et β sont les coefficients de dilation thermique.

La relation $\bar{\bar{\sigma}} = f(\bar{\bar{\varepsilon}})$ n'est valable que si le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\varepsilon}}$ valide les conditions de compatibilité.

Si la transformation entre la configuration C_0 et C_t est isotherme ($T = T_0$) et si l'état initial est naturel ($\bar{\bar{\sigma}}_0 = 0$), les relations ci-dessus se simplifient comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\sigma}} &= 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda\text{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{I}} \\ \bar{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1+\nu}{E}\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\bar{\bar{\sigma}})\bar{\bar{I}}\end{aligned}$$

II. Relations entre les coefficients de Lamé et les propriétés mécaniques du matériau

Les coefficients de Lamé et les propriétés mécaniques du matériau sont reliés comme suit :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

III. Equations supplémentaires

III.1. Equation de Navier

Un état de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$ est dit statiquement admissible s'il satisfait l'équation de Navier et les conditions aux limites sur les efforts.

L'équation de Navier découle de l'équation d'équilibre :

$$\underbrace{\overline{\overline{div(\overline{\overline{\sigma}})}} + \rho(\overline{\overline{f}} - \overline{\overline{\gamma}})}_{\text{Equation d'équilibre}} = \vec{0}$$

$$\Downarrow \text{Loi de comportement } \overline{\overline{\sigma}} = f(\overline{\overline{\varepsilon}})$$

$$\mu \Delta(\overline{\overline{u}}) + (\mu + \lambda) \overline{\overline{grad(div(\overline{\overline{u}}))}} + \rho(\overline{\overline{f}} - \overline{\overline{\gamma}}) = \vec{0}$$

Avec,

- ρ est la densité volumique du milieu continu.
- $\overline{\overline{f}}$ est le vecteur densité massique des forces exercées à distance sur le milieu continu.
- $\overline{\overline{\gamma}}$ est le vecteur accélération du milieu continu.

III.2. Equation de Beltrami

Un état de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est dit cinématiquement admissible s'il satisfait l'équation de compatibilité et les conditions aux limites sur les déplacements.

L'équation de Beltrami découle de l'équation de compatibilité:

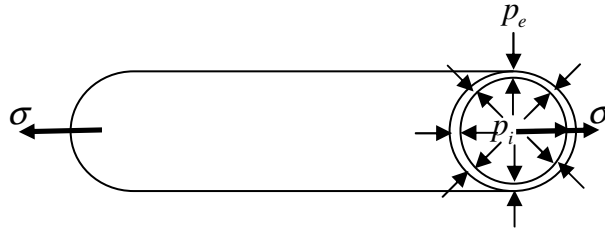
$$\underbrace{\overline{\overline{\text{grad}\left(\text{div}\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right)} + \left(\overline{\overline{\text{grad}\left(\text{div}\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right)}}\right)^T - \text{grad}\left(\overline{\overline{\text{grad}\left(\text{tr}\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\right)}}\right)}_{\text{Equation de compatibilité}} - \Delta \overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{0}}$$

$$\Downarrow \text{Loi de comportement } \overline{\overline{\varepsilon}} = f\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)$$

$$\overline{\overline{\text{grad}\left(\text{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right)} + \left(\overline{\overline{\text{grad}\left(\text{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right)}}\right)^T - \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\text{grad}\left(\text{grad}\left(\text{tr}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right)\right)}}\right)} - \Delta \overline{\overline{\sigma}} + \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \text{div}\left(\rho\left(\vec{\gamma} - \vec{f}\right)\right) \overline{\overline{I}} = \overline{\overline{0}}$$

IV. Exercice d'application

On considère un réservoir cylindrique sollicité en traction sur les bases, une pression uniforme intérieure p_i appliquée sur la surface de rayon $r = R_i$ et une pression extérieure uniforme p_e appliquée sur la surface de rayon $r = R_e$.



1/ Donner la forme du champ de déplacement $\vec{U}(M)$

La forme générale du champ de déplacement $\vec{U}(M)$ dans la base cylindrique s'écrit :

$$\vec{U}(M) = U_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + U_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + U_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

En tenant compte de la symétrie géométrique (symétrie cylindrique) et la symétrie de chargement (état de contrainte), on peut déduire que :

- La composante angulaire de déplacement $U_\theta(r, \theta, z)$ est nulle.
- La composante radiale du déplacement $U_r(r, \theta, z)$ ne dépende que de la variable radiale r . D'où $U_r(r, \theta, z) = U_r(r)$.

- La composante axiale du déplacement $U_z(r, \theta, z)$ ne dépend que de la variable axiale z . D'où $U_z(r, \theta, z) = U_z(z)$

La forme du champ de déplacement $\vec{U}(M)$ se simplifie alors et on obtient l'expression suivante :

$$\vec{U}(M) = U_r(r) \vec{e}_r + U_z(z) \vec{e}_z$$

2/ Le champ de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ est-il cinématiquement admissible ?

On remarque qu'on n'a aucune condition de déplacement imposée sur les frontières du domaine d'étude. On a seulement des conditions de contrainte imposées. Compte tenu qu'on connaît la forme du champ de déplacement $\vec{U}(M)$, le champ de déformation associé sera forcément cinématiquement admissible (il n'est pas nécessaire de vérifier qu'il valide les conditions de compatibilité).

3/ Donner la forme du champ de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement $\vec{U}(M)$ s'écrit :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{\text{grad}}} \vec{U}(M) + \bar{\bar{\text{grad}}}^T \vec{U}(M) \right) = \begin{pmatrix} \frac{dU_r(r)}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_r(r)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dU_z(z)}{dz} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

3/ Donner la forme du champ de contrainte $\bar{\bar{\sigma}}(M)$

Compte tenu que le champ de déformation est cinématiquement admissible, on peut utiliser directement la loi de comportement pour déterminer le champ de contrainte $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}(M) + \lambda tr(\overline{\overline{\varepsilon}}(M))\overline{\overline{I}} \begin{pmatrix} 2\mu\frac{dU_r(r)}{dr} + \lambda T & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\frac{U_r(r)}{r} + \lambda T & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\frac{dU_z(z)}{dz} + \lambda T \end{pmatrix}_{(\overline{e_r}, \overline{e_\theta}, \overline{e_z})}$$

Avec,

$$T = \frac{dU_r(r)}{dr} + \frac{U_r(r)}{r} + \frac{dU_z(z)}{dz}$$

4/ Déterminer les composantes du tenseur de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}(M)$ et du tenseur contrainte $\overline{\overline{\sigma}}(M)$ tout en veillant à ce que le tenseur de contrainte reste statiquement admissible.

Le champ de contrainte doit être statiquement admissible. Il doit vérifier, alors, l'équation de Navier :

$$\overrightarrow{\overline{\overline{div\sigma}}(M)} + \rho(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\gamma}) = \overrightarrow{0}$$

Le domaine étant en équilibre et les forces à distance étant négligeables, l'équation de Navier devient :

$$\overrightarrow{\overline{\overline{div\sigma}}(M)} = \overrightarrow{0}$$

D'où,

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}(r, z)}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}(r, z) - \sigma_{\theta\theta}(r, z)) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}(r, z)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}(r, z)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est triviale (identiquement satisfaite). Reste alors le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}(r, z)}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}(r, z) - \sigma_{\theta\theta}(r, z)) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}(r, z)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

En écrivant les composantes du tenseur contrainte en fonction des composantes du champ de déplacement, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_r(r)}{dr} - \frac{U_r(r)}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rU_r(r))}{dr} \right) = 0 \\ \frac{d^2 U_z(z)}{dz^2} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ces deux équations différentielles donnera les expressions de la composante radiale $U_r(r)$ et celle axiale $U_z(z)$:

$$\begin{cases} U_r(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r} \\ U_z(z) = \gamma z + \delta \end{cases}$$

Avec ,

α, β, γ et δ sont des constantes d'intégration déterminées en fonction des conditions aux limites (les conditions aux limites pour ce problème sont des conditions de contraintes imposées).

Les formes des composantes du tenseur contrainte $\bar{\sigma}$ deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases}$$

Avec,

A, B et C sont des constantes d'intégration déterminées en fonction des conditions aux limites.

Les constantes α , β , γ et δ d'une part et A, B et C d'autre part sont reliées et s'écrivent en fonction des coefficients de Lamé (μ et λ) ou demodule d'Young E et du coefficient du poisson ν du matériau constituant le réservoir.

$$\begin{cases} A = 2\alpha(\lambda + \mu) + \gamma\lambda \\ B = 2\beta\mu \\ C = 2\alpha\lambda + \gamma(2\mu + \lambda) \end{cases} ; \begin{cases} \alpha = \frac{(\lambda + 2\mu)A - \lambda C}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \\ \beta = \frac{B}{2\mu} \\ \gamma = \frac{(\mu + \lambda)C - \lambda A}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \end{cases}$$

Ou aussi,

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha + \gamma\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E \\ B = \frac{\beta}{1 + \nu} E \\ C = \frac{2\alpha\nu + \gamma(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E \end{cases} ; \begin{cases} \alpha = \frac{1 - \nu}{E} A - \frac{\nu}{E} C \\ \beta = \frac{1 + \nu}{E} B \\ \gamma = -\frac{2\nu}{E} A + \frac{1}{E} C \end{cases}$$

On remarque que la constante δ ne figure pas dans les relations ci-dessus. En effet, elle n'est pas fixée parce que quelque soit sa valeur, elle ne change pas les expressions des composantes du tenseur contrainte et celui de déformation. Il s'agit, en fait, d'une constante qui traduit un déplacement solide **indéformable** suivant l'axe du réservoir. Mathématiquement elle va disparaître lors de la dérivation de la composante axiale $U_z(z)$.

En tenant en compte les conditions aux limites sur le chargement (contraintes imposées), les constantes A, B et C s'écrivent :

$$\begin{cases} A = \frac{P_i R_i^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B = \frac{(P_i - P_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ C = \sigma \end{cases}$$

Les constantes A, B et C trouvées sont à insérer dans les expressions des composantes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} . On détermine ainsi le tenseur contrainte $\bar{\sigma}$.

L'insertion des constantes A, B et C dans α , β et γ permet de déterminer les composantes radiale $U_r(r)$ et axiale $U_z(z)$ du champ de déplacement $\bar{U}(M)$.

$U_r(r)$ et $U_z(z)$ une fois déterminés, on peut déterminer alors le tenseur des déformations linéarisés $\bar{\epsilon}$.

5/ Vérifier si le réservoir reste dans le domaine élastique sous l'état de contrainte existant.

On applique le critère de Von Mises :

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2) &\leq 2\sigma_e^2 \\ \Downarrow \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 &\leq 2\sigma_e^2 \\ \Downarrow \\ 3\left(\frac{B}{r^2}\right)^2 + (A - C)^2 &\leq \sigma_e^2 \end{aligned}$$

Le cas le plus défavorable (en termes d'élasticité) est obtenu pour $r = R_i$. D'où,

$$3\left(\frac{B}{R_i^2}\right)^2 + (A - C)^2 \leq \sigma_e^2 \Rightarrow 3\frac{(p_i - p_e)^2 R_e^4}{(R_e^2 - R_i^2)^2} + \left(\frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2)} - \sigma\right)^2 \leq \sigma_e^2$$

Connaissant les valeurs numérique de la pression intérieure P_i , la pression extérieure P_e , la contrainte de traction σ , le rayon intérieur R_i , le rayon extérieur R_e et la limite élastique du matériau σ_e , on peut vérifier si le réservoir reste ou non dans le domaine élastique sous l'état de contrainte existant.

REFERENCES

- [1] Olivier Thual, Introduction à la mécanique des milieux continus déformables, Polytech-Cépaduès.
- [2] J-N Reddy, Loïc Villain et Anna Cuprjak (traduction), Mécanique des milieux continus : Introduction aux principes et applications, Sciences de l'ingénieur-De Boeck.
- [3] Eric Lemarchand, Djimedo Kondo et Luc Dormieux, Mécanique des milieux continus - Cours et exercices corrigés, Références. Sciences-Ellipses Marketing.
- [4] Fatima Sahban et Amar Kifani, Mécanique des milieux continus - Cours et exercices corrigés Tome 1, Notions fondamentales, équations générales, élasticité classique à l'usage des étudiants de la maîtrise de mécanique et des élèves des écoles d'ingénieurs, Publibook/Société écrivains.
- [5] Temam Roger et Miranville Alain, Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [6] Jean Coirier et Carole Nadot-Martin, Mécanique des milieux continus : Cours et exercices corrigés, Sciences Sup-Dunod.