



Cinématique des milieux continus

Jean Garrigues

► To cite this version:

Jean Garrigues. Cinématique des milieux continus. Engineering school. Cinématique des milieux continus, 2012. cel-00681766v1

HAL Id: cel-00681766

<https://cel.hal.science/cel-00681766v1>

Submitted on 22 Mar 2012 (v1), last revised 7 Apr 2016 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cinématique des milieux continus

Jean Garrigues

22 mars 2012

Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'introduire les outils nécessaires à la description du mouvement, de la déformation¹ et de la vitesse de déformation d'un milieu continu déformable au sens le plus général du terme, c'est-à-dire en pratique les solides déformables, les liquides et les gaz. Tous les concepts présentés dans ce cours sont valables pour l'un quelconque de ces milieux continus.

Les développements qui suivent se placent résolument dans le cadre de la physique classique (non relativiste et non quantique). Nous admettons donc que l'espace dans lequel les mouvements de milieux continus se produisent est de dimension 3 et d'autre part, que la distance entre deux points et le temps sont des grandeurs communes à tous les observateurs du mouvement.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielle² : en effet, toutes les grandeurs physiques relatives aux milieux continus déformables sont représentées par des champs de tenseurs d'ordre 0 ou plus.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a, μ);
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : $\mathbf{v}$);
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : $\mathbf{T}$);
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne : $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$
- la transposition des matrices est notée avec un T en exposant (exemple : M^T);
- les espaces d'entités mathématiques sont en majuscules doublées (exemples : l'espace des réels : $\mathbb{R}$, l'espace des vecteurs de dimension 3 : $\mathbb{V}_3$).
- le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{V}_3$ est noté « $\wedge$ ».

1. Contrairement aux cours élémentaires sur les déformations, on ne fera ici aucune concession géométrique. Les déformations ne sont ni « petites » ni « grandes ».

2. L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus* disponible sur <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923>

Chapitre 1

Concepts fondamentaux

Dans ce chapitre, avant d'aborder les chapitres traitant de la cinématique des milieux continus proprement dite, on définit le concept de milieu continu. On précise ensuite un certain nombre de concepts fondamentaux sur lesquels s'appuie la cinématique en général.

1.1 Le modèle milieu continu tridimensionnel

On suppose que l'espace dans lequel ont lieu les mouvements de milieux matériels, est mathématiquement représentable par un espace affine de points, de dimension 3 et muni d'une distance. On le note $\mathcal{E}_3$.

1.1.1 Milieu continu

Soit $\mathcal{D}$ un domaine volumique ouvert de $\mathcal{E}_3$. On dit que le domaine $\mathcal{D}$ est rempli d'un milieu matériel *continu*¹ si, à tout instant t et en chaque point M du domaine $\mathcal{D}$, on peut définir des champs de grandeurs physiques relatives à ce milieu matériel.

Ces grandeurs physiques peuvent être mathématiquement représentées par :

- des champs scalaires (masse volumique, température, etc)
- des champs vectoriels (vitesse, accélération, etc)
- des champs tensoriels (déformations, contraintes, etc)

Lorsque la nature de la grandeur physique n'est pas précisée, elle sera notée $\mathcal{A}$.

Cette modélisation « continue » de toute matière (il existe quelque chose de matériel en tout point géométrique M du domaine $\mathcal{D}$) est assurément une *idéatisation*. Nos connaissances en physique atomique sont en flagrante contradiction avec cette hypothèse ! En un point M et à un instant t donnés, il n'y a pratiquement aucune chance d'y trouver un corpuscule (atome, noyau, électron, ...) et bon nombre de grandeurs physiques macroscopiques perdent leur sens à cette échelle d'observation.

EXEMPLES : Des grandeurs macroscopiques telles que la pression, la température ou la vitesse, qui semblent naturellement descriptibles par des champs mathématiques $p(M,t)$, $T(M,t)$ ou $\mathbf{v}(M,t)$, perdent de leur sens au niveau microscopique : en général, il n'y a que du vide au point M et à l'instant t , auquel on ne peut associer aucune grandeur physique.

1. L'usage du qualificatif « continu » pour désigner un milieu matériel qui occupe tous les points d'un domaine ouvert $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ est traditionnel. Cette « continuité » n'a aucun rapport avec la continuité des applications dont on parle en analyse.

Le modèle *milieu continu* de la matière présente néanmoins une grande utilité pratique, car les vérifications des prédictions de ce modèle se font macroscopiquement : quand on veut vérifier une pression, une température ou une vitesse en un point et à un instant donné, on effectue cette mesure avec un *appareil macroscopique* dont le « point de mesure » est en fait un petit volume contenant un très grand nombre de corpuscules. La mesure effectuée est donc une moyenne statistique, sur un petit volume et sur un petit intervalle de temps, des interactions des corpuscules avec la zone sensible de l'appareil de mesure².

REMARQUE : Les prévisions d'un modèle continu de la matière peuvent être incorrectes si la taille du « point de mesure » ne contient pas suffisamment de corpuscules pour que la moyenne statistique soit significative. Par exemple, dans les hautes couches de l'atmosphère, le libre parcours moyen des corpuscules est de l'ordre du mètre. Si l'on veut que les prédictions d'un modèle continu de la matière dans cette région corroborent correctement des mesures, il faudrait un instrument dont le « point de mesure » ait un volume d'au moins 1 km^3 !

Le modèle continu de la matière, ignorant délibérément la structure corpusculaire de la matière, ne peut donc fournir aucun renseignement sur les mouvements individuels des corpuscules microscopiques.

1.1.2 Définition d'une particule en mécanique des milieux continus

L'espace $\mathcal{E}_3$ est constitué de *points géométriques* (concept mathématique). Un milieu matériel continu est constitué de *points matériels* que l'on appellera *particules*. Par définition, *les particules sont donc des entités matérielles de volume nul*.

À chaque instant, chaque particule P du milieu matériel continu coïncide avec un certain point géométrique M du domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$, et en chaque point géométrique $M \in \mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ se trouve une particule P .

Quand le milieu continu est en mouvement, ses particules sont en mouvement, c'est-à-dire que le point géométrique avec lequel elles coïncident varie avec le temps.

1.2 Champs matériels

La continuité supposée du milieu matériel permet de poser la définition suivante :

DÉFINITION : Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ un domaine d'étude contenant un milieu continu, de particule générique P , et soit $\mathcal{A}$ une grandeur physique macroscopique (scalaire, vectorielle ou tensorielle). On appelle *champ matériel* toute application définie par :

$$\forall (P, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}(P, t) \in \mathbb{V}^{\otimes p} \quad (p > 0 \in \mathbb{N}) \quad (1.1)$$

où $\mathbb{V}^{\otimes p}$ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p .

On suppose de plus que ces champs sont différentiables presque partout sur $\mathcal{D}$.

PRÉCISION : Le sens de la locution « presque partout » est celui que l'on définit dans la théorie de la mesure. Il signifie que l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ où les champs ne sont pas différentiables est de volume nul. On admet donc la possibilité d'existence de points de discontinuité isolés, de lignes de discontinuité et de surfaces de discontinuité. On n'exclut donc pas *a priori* l'existence de phénomènes physiques tels que la cavitation, la fissuration ou les ondes de choc. À strictement parler, les champs matériels sont donc des distributions, et les intégrales qui seront écrites dans la suite sont à prendre au sens de Lebesgue.

Dans une première lecture, on peut ignorer cette extension en supposant que les champs sont partout différentiables et que les intégrales sont au sens classique de Riemann. On peut traiter la plupart des discontinuités simples en considérant des domaines différentiables « par morceaux ».

On peut donc définir en tout point de $\mathcal{D}$ un gradient de la grandeur physique $\mathcal{A}$, ainsi que tous les opérateurs différentiels qui en découlent (divergence, rotationnel, laplacien).

2. On rappelle qu'une mole d'air (22,4 litres dans les conditions normales de pression et de température) contient $6,02 \cdot 10^{23}$ molécules. Combien y a-t-il de molécules dans un « point de mesure » de 1 mm^3 ?

1.3 Observateurs en physique classique

La notion d'*observateur*, appelé aussi *référentiel* ou encore *solide de référence*³, est normalement définie dans les cours de mécanique générale. On en rappelle ici la définition.

DÉFINITION : On appelle observateur (ou référentiel ou encore solide de référence) un ensemble de trois points (A, B, C) non colinéaires **dont les distances sont constantes dans le temps**, et sur lesquels on a construit, par un moyen quelconque, un repère cartésien orthonormé direct.

REMARQUES : Les trois points à distance constante (A, B, C) forment un « solide de référence ». Le repère cartésien orthonormé construit sur ces trois points est un « référentiel ». Le tout est un « observateur ».

Il existe une infinité de manières pour contruire géométriquement un repère orthonormé direct à partir de 3 points (A, B, C) :

- Exemple 1 : les trois vecteurs liés⁴ d'origine A définis par : $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|}$; $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{AC}}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{AC}\|}$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ constituent un repère orthonormé direct d'origine A .
- Exemple 2 : $\mathbf{u}_{AB} = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|}$; $\mathbf{u}_{AC} = \frac{\mathbf{AC}}{\|\mathbf{AC}\|}$; $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_{AB} + \mathbf{u}_{AC}}{\|\mathbf{u}_{AB} + \mathbf{u}_{AC}\|}$; $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_{AB} - \mathbf{u}_{AC}}{\|\mathbf{u}_{AB} - \mathbf{u}_{AC}\|}$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Les trois vecteurs liés $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, constituent un repère orthonormé direct d'origine A .
- Exemple 3 : prendre comme origine le centre de gravité du triangle ABC et construire un repère orthonormé direct d'origine G sur les directions principales d'inertie du triangle ABC (on sait qu'on peut toujours trouver des directions principales d'inertie orthogonales).

Un observateur étant choisi, à chaque point $M \in \mathcal{E}_3$ (ou à la particule qui se trouve en M), on associe de manière biunivoque, par projection orthogonale sur le repère cartésien de l'observateur, trois coordonnées cartésiennes orthonormées $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(M \in \mathcal{E}_3, \mathcal{R}) \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

Cependant, cette représentation des points de $\mathcal{E}_3$ par trois réels n'est pas la plus commode. On préfère une représentation vectorielle des points de $\mathcal{E}_3$ de la manière suivante :

DÉFINITION : Soit $\mathbb{V}_3$ un espace vectoriel de dimension 3 dont une base orthonormée est $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Soit un observateur $\mathcal{R}$. On appelle vecteur position d'un point M pour l'observateur $\mathcal{R}$ (ou vecteur position de la particule P qui se trouve en M) le vecteur $\mathbf{x}_M \in \mathbb{V}_3$ défini par la bijection :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbf{x}_M = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}_3 \quad (1.3)$$

Avec les bijections (1.2) et (1.3), on établit la bijection suivante qui, pour un observateur $\mathcal{R}$, à tout point $M \in \mathcal{E}_3$ associe un vecteur position $\mathbf{x}_M \in \mathbb{V}_3$:

$$(M \in \mathcal{E}_3, \mathcal{R}) \leftrightarrow \mathbf{x}_M = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}_3 \quad (1.4)$$

Soit un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ défini par les trois points à distance constante $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ sur lesquels on construit un repère orthonormé direct $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$ qui permet d'associer de manière biunivoque à tout point M les trois coordonnées $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) \in \mathbb{R}^3$. À ce triplet de coordonnées on associe comme précédemment un vecteur position $\tilde{\mathbf{x}}_M$ du même espace vectoriel $\mathbb{V}_3$ dont les composantes sur la base orthonormée de $\mathbb{V}_3$ sont les coordonnées $\{\tilde{\alpha}_i\}$ du point M : $\tilde{\mathbf{x}}_M = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{v}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}_3 \mathbf{v}_3$:

$$(M \in \mathcal{E}_3, \tilde{\mathcal{R}}) \leftrightarrow (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3) \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_M = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{v}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}_3 \mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}_3 \quad (1.5)$$

3. Les termes *référentiel* et *solide de référence* sont plutôt employés dans les cours français de mécanique générale. Le mot *observateur* a été mis à la mode par des mécaniciens contemporains américains (NOLL, TRUESDEL, COLEMAN et autres), se revendiquant de la « mécanique rationnelle ». Il n'y a absolument aucune différence conceptuelle entre ces trois dénominations. L'auteur de ce cours a choisi d'utiliser le mot « observateur » peut-être en raison de son aspect anthropomorphe : il lui semble que l'on imagine mieux les différences dans l'observation d'un mouvement quand on parle d'un changement d'observateur plutôt que d'un changement de référentiel.

4. On peut les appeler aussi *bipoints ordonnés*.

Les deux vecteurs $\mathbf{x}_M$ et $\tilde{\mathbf{x}}_M$, tous deux éléments de $\mathbb{V}_3$, sont des vecteurs différents car leurs composantes sur la base orthonormée de $\mathbb{V}_3$ sont différentes.

Dans toute la suite du cours, les points $M \in \mathcal{E}_3$ seront repérés par leur vecteur position pour un certain observateur : $\mathbf{x}_M \in \mathbb{V}_3$.

Cette méthode de repérage des positions d'une particule par un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{V}_3$ présente l'avantage de ne pas avoir à se soucier de systèmes de coordonnées. Pour chaque observateur, les points de $\mathcal{E}_3$ seront biunivoquement représentés par des vecteurs positions (tenseurs d'ordre 1) propres à chaque observateur et appartenant au même espace vectoriel $\mathbb{V}_3$, dans lequel on dispose de tous les outils de l'algèbre et de l'analyse.

1.4 Mouvement par rapport à un observateur

DÉFINITION : Quand le vecteur position d'une particule P pour un observateur $\mathcal{R}$ varie au cours du temps, on dit que la particule P est en mouvement **pour cet observateur**.

DÉFINITION : Le vecteur position d'une particule P pour un observateur $\mathcal{R}$ à un instant t quelconque est appelé position actuelle de P pour l'observateur $\mathcal{R}$.

Lors de l'étude du mouvement d'un milieu matériel (éventuellement continu), toute liberté est laissée au scientifique qui fait cette étude, dans le choix d'un observateur (ou référentiel ou solide de référence). Le choix d'un observateur est arbitraire. Il n'y a aucune raison *a priori* de privilégier un observateur plutôt qu'un autre⁵. Dire qu'une particule est en mouvement sans préciser quel observateur on utilise pour observer ce mouvement, n'a aucun sens.

En particulier, un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est dit en mouvement par rapport à l'observateur $\mathcal{R}$ si les vecteurs positions des points A , B et C pour l'observateur $\mathcal{R}$ sont des fonctions du temps.

1.5 Tenseur de changement d'observateur

1.5.1 Vecteur matériel

Soient deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ étant *a priori* en mouvement l'un par rapport à l'autre. Soient deux particules P et P' d'un milieu continu en mouvement. On note :

- $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{x}'_t$ les vecteurs positions, à un instant t quelconque, des particules P et P' pour l'observateur $\mathcal{R}$,
- $\tilde{\mathbf{x}}_t$ et $\tilde{\mathbf{x}}'_t$ les vecteurs positions, au même instant t , des mêmes particules P et P' pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

L'indice t rappelle que ces quatre vecteurs positions sont des positions actuelles (donc *a priori* fonction du temps).

DÉFINITIONS : On appelle vecteur matériel, un ensemble ordonné de deux particules. Il sera noté : $\{P, P'\}$. La particule P est appelée origine du vecteur matériel $\{P, P'\}$. La particule P' est appelée extrémité du vecteur matériel $\{P, P'\}$.

Un vecteur matériel est représenté par chaque observateur par la différence entre le vecteur position de l'extrémité P' et le vecteur position de l'origine P :

- pour l'observateur $\mathcal{R}$, le vecteur matériel actuel est représenté par le vecteur : $\{P, P'\}_{\mathcal{R}} = \mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t \in \mathbb{V}_3$;
- pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, le vecteur matériel actuel est représenté par le vecteur : $\{P, P'\}_{\tilde{\mathcal{R}}} = \tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t \in \mathbb{V}_3$.

5. Mais on peut être motivé, pour simplifier des calculs, d'en choisir un pour lequel un maximum d'entités sont fixes (par exemple une frontière ou une partie de frontière d'un domaine d'étude $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$).

ATTENTION : Un vecteur matériel (élément de $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$) n'est pas un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{V}_3$ ($\mathbb{V}_3$ est un espace mathématique qui sert à calculer sur les vecteurs). La locution « considérons le vecteur $\mathbf{PP}'$ » n'a pas de sens vectoriel tant qu'on ne précise pas quel observateur on utilise. En effet, chaque observateur associe au vecteur matériel $\{P, P'\}$ un vecteur de $\mathbb{V}_3$ différent (revoir comment on associe un vecteur position de $\mathbb{V}_3$ à chaque particule). Ce malencontreux raccourci de langage est à l'origine de bien des malentendus.

Par exemple; si on dessine au tableau trois points O , $\tilde{O}$ et P , il semble naturel d'écrire dans l'espace de points $\mathcal{E}_3$ l'égalité : $\mathbf{OP} = \mathbf{O\tilde{O}} + \mathbf{\tilde{O}P}$ sans préciser d'observateur (on devrait plutôt l'écrire : $\{O, P\} = \{O, \tilde{O}\} + \{\tilde{O}, P\}$). Pour un observateur $\mathcal{R}$ cette géométrie s'écrit dans $\mathbb{V}_3$:

$$\underbrace{\{O, P\}_{\mathcal{R}}}_{\mathbf{x}_t^P} = \underbrace{\{O, \tilde{O}\}_{\mathcal{R}}}_{\mathbf{x}_t^{\tilde{O}}} + \{\tilde{O}, P\}_{\mathcal{R}} \quad \text{où } \{\tilde{O}, P\}_{\mathcal{R}} \neq \{\tilde{O}, P\}_{\tilde{\mathcal{R}}} = \tilde{\mathbf{x}}_t^P$$

On ne peut donc en déduire : $\mathbf{x}_t^P = \mathbf{x}_t^{\tilde{O}} + \tilde{\mathbf{x}}_t^P$ comme on pourrait le faire trop rapidement en regardant la figure car la représentation pour l'observateur $\mathcal{R}$ du vecteur matériel $\{\tilde{O}, P\}$ n'est pas le vecteur position de la particule P pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ cette même géométrie s'écrit dans le même espace vectoriel $\mathbb{V}_3$:

$$\{O, P\}_{\tilde{\mathcal{R}}} = \{O, \tilde{O}\}_{\tilde{\mathcal{R}}} + \{\tilde{O}, P\}_{\tilde{\mathcal{R}}} = -\tilde{\mathbf{x}}_t^O + \tilde{\mathbf{x}}_t^P$$

En particulier, bien qu'on puisse écrire dans l'espace de points $\mathcal{E}_3$ l'égalité $\mathbf{O\tilde{O}} = -\tilde{\mathbf{O}O}$ (qu'on devrait écrire $\{O, \tilde{O}\} = -\{\tilde{O}, O\}$), on ne peut pas en déduire l'égalité vectorielle dans $\mathbb{V}_3$: $\mathbf{x}_t^{\tilde{O}} = -\tilde{\mathbf{x}}_t^O$.

Les seules relations qu'on puisse écrire dans $\mathbb{V}_3$ pour les deux observateurs sont :

$$\{\tilde{O}, P\}_{\mathcal{R}} = \mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_t^{\tilde{O}} \quad \text{et} \quad \{O, P\}_{\tilde{\mathcal{R}}} = \tilde{\mathbf{x}}_t^P - \tilde{\mathbf{x}}_t^O$$

qui sont les définitions universelles (c'est-à-dire valables pour tout observateur) de la représentation d'un vecteur matériel par un observateur.

Toutes ces remarques justifient le fait qu'aucune figure ne sera dessinée en cinématique, car si elles induisent des relations vraies dans $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$, elles induisent trop rapidement des relations fausses dans $\mathbb{V}_3$.

1.5.2 Changement d'observateur des vecteurs matériels

La *définition* de la distance actuelle (c'est-à-dire à l'instant t) entre les deux particules P et P' est la norme de la différence des vecteurs positions. Cette définition est la même pour tous les observateurs (on dit que cette définition est *universelle*).

$$d(P, P', t) = \|\mathbf{x}_t' - \mathbf{x}_t\| \quad \text{et} \quad \tilde{d}(P, P', t) = \|\tilde{\mathbf{x}}_t' - \tilde{\mathbf{x}}_t\|$$

REMARQUE : L'*universalité* est une propriété attribuable à une *relation* (loi, définition) : la relation est la même pour tous les observateurs.

D'autre part, en physique classique, la distance actuelle des deux particules est un scalaire $d(P, P', t)$ qui a la même valeur pour tous les observateurs : on dit que la distance actuelle entre deux particules est une grandeur scalaire *objective*. On peut donc écrire :

$$d(P, P', t) = \tilde{d}(P, P', t) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}_t' - \mathbf{x}_t\| = \|\tilde{\mathbf{x}}_t' - \tilde{\mathbf{x}}_t\| \quad \forall t \forall P \forall P' \quad (1.6)$$

REMARQUE : L'*objectivité* est une propriété attribuable à une *grandeur physique* scalaire⁶ : sa valeur actuelle est la même pour tous les observateurs.

L'*objectivité* des distances actuelles (1.6) étant vraie *quel que soit le couple de particules* (P, P') , il existe à chaque instant une rotation unique (elle est donc fonction du temps), noté $\mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}$ telle que :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t' - \tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}} \cdot (\mathbf{x}_t' - \mathbf{x}_t) \quad \forall t \forall P \forall P' \quad (\text{propriété des tenseurs orthogonaux}) \quad (1.7)$$

6. On définira au chapitre 3 page 23 l'*objectivité* de grandeurs physiques tensorielles d'ordre 1 ou plus.

RAPPEL : Une rotation est un tenseur du second ordre orthogonal et de déterminant égal à +1. On montre en algèbre tensorielle⁷ qu'on peut aussi la définir par son axe unitaire $\mathbf{w}_t$ et un angle $\theta_t \in [0, \pi]$. Pour déterminer cette rotation de manière unique, il suffit de prendre les vecteurs positions actuels, pour les deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$, de 3 particules quelconques non alignées. Une des propriétés des tenseurs orthogonaux est : $\|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \forall \mathbf{v} \forall \mathbf{Q}$ orthogonal. On est donc assuré que l'objectivité des distances actuelles pour 3 particules suffit à garantir l'objectivité des distances actuelles pour tout couple de particules.

DÉFINITION : La rotation $\mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}$ est appelé tenseur de changement d'observateur actuel entre les observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$.

CONVENTION DE NOTATION : Lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, le tenseur de changement d'observateur actuel $\mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}$ entre les deux observateurs sera noté plus simplement $\mathbf{Q}_t$.

Les propriétés algébriques des rotations impliquent que :

- les angles non orientés formés par les positions actuelles de trois particules sont les mêmes pour tous les observateurs : les angles sont des grandeurs scalaires objectives;
- les aires du triangle formé par les positions actuelles de trois particules sont les mêmes pour tous les observateurs : les aires sont des grandeurs scalaires objectives;
- les produit mixtes formé par les positions actuelles de quatre particules sont les mêmes pour tous les observateurs : les volumes sont des grandeurs scalaires objectives.

1.6 Relation avec les concepts introduits en cinématique élémentaire

RAPPELS D'ALGÈBRE : On peut identifier l'angle et l'axe d'une rotation $\mathbf{Q}_t$ par les formules suivantes⁸ :

$$\cos \theta_t = \frac{\text{Tr} \mathbf{Q}_t - 1}{2} \quad \theta_t \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_t = -\frac{\mathbf{H} : \mathbf{Q}_t}{\sin \theta_t} = -\frac{\mathbf{H} : \mathbf{Q}_t}{\|\mathbf{H} : \mathbf{Q}_t\|}$$

Le vecteur $\mathbf{y} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{x}$ est le résultat de la rotation du vecteur $\mathbf{x}$ par la rotation d'axe unitaire $\mathbf{w}_t$ et d'angle θ_t .

La relation inverse est : $\mathbf{Q}_t = \cos \theta_t \mathbf{G} + (1 - \cos \theta_t) \mathbf{w}_t \otimes \mathbf{w}_t - \sin \theta_t \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}_t$.

Il y a donc une bijection entre les rotations géométriques et les tenseurs orthogonaux de déterminant 1.

En dérivant temporellement l'identité $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{G}$ on trouve : $\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t = -\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t = -\left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t\right)^T$.

Les tenseurs $\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t$ et $\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t$ sont donc opposés et antisymétriques.

Soit $\mathbf{w}_t$ le vecteur adjoint au tenseur antisymétrique $\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t$. Il est défini par :

$$\mathbf{w}_t = \frac{1}{2} \mathbf{H} : \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t = \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}_t$$

Il découle des propriétés des tenseurs antisymétriques que :

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t\right) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{w}_t \wedge \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}_3 \quad (1.8)$$

En cinématique élémentaire, on n'introduit généralement pas le tenseur de changement d'observateur, car la bijection entre tenseurs orthogonaux de déterminant 1 et les rotations géométriques n'est pas supposée connue. Le tenseur rotation $\mathbf{Q}_t$ y est donc défini comme une rotation géométrique d'axe unitaire $\mathbf{w}_t$ et d'angle $\theta_t \in [0, \pi]$. Le vecteur généralement noté $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}} = \theta_t \mathbf{w}_t$ est appelé *vecteur rotation* de $\tilde{\mathcal{R}}$ par rapport à $\mathcal{R}$. La seule nouveauté ici est donc de représenter cette rotation géométrique par un tenseur orthogonal

7. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 1.6.10

8. voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus* du même auteur, section 1.6.10

de déterminant +1, qui se prête mieux au calcul tensoriel. Le tourné d'un vecteur $\mathbf{v}$ par la rotation $\mathcal{R}_{(\theta_t, \boldsymbol{\omega}_t)}$ s'écrit simplement :

$$\mathcal{R}_{(\theta_t, \boldsymbol{\omega}_t)}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{v}$$

En appliquant la définition du tenseur de changement d'observateur (voir (1.7) page 5) aux points $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ d'un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, il vient :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{B}} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{A}} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) \quad (1.9)$$

En dérivant par rapport au temps l'égalité (1.9) (par définition, les points $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont fixes pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$), on obtient :

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) + \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{v}^{\tilde{B}} - \mathbf{v}^{\tilde{A}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}^{\tilde{B}} - \mathbf{v}^{\tilde{A}} = - \left(\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \right) \cdot (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) \quad (1.10)$$

où le tenseur du second ordre $\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t$ est antisymétrique.

Si on note $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{H} : (\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t)$ le vecteur adjoint au tenseur antisymétrique $\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t$, alors (voir (1.8))

$$\left(\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \right) \cdot (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) = -\mathbf{w} \wedge (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}})$$

L'équation (1.10) s'écrit alors :

$$\mathbf{v}^{\tilde{B}} - \mathbf{v}^{\tilde{A}} = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}^{\tilde{B}} = \mathbf{v}^{\tilde{A}} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) = \mathbf{v}^{\tilde{A}} + \mathbf{w} \wedge \{\tilde{A}, \tilde{B}\}_{\tilde{\mathcal{R}}}$$

On reconnaît la formule habituellement donnée dans les cours de mécanique générale pour décrire le champ des vitesses d'un solide (ici le solide est constitué des points $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ à distance constante définissant l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$) où le vecteur $\mathbf{w}$ généralement noté $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}/\mathcal{R}}$ est le vecteur *vitesse de rotation actuelle de l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ pour l'observateur $\mathcal{R}$* habituellement introduit en mécanique générale. On a donc :

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \mathbf{H} : \left(\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \right) = \text{adj} \left(\mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \right) = -\text{adj} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathbf{Q}_t \right) \quad (1.11)$$

La connaissance des valeurs actuelles du tenseur de changement d'observateur $\mathbf{Q}_t$ permet donc de retrouver les concepts introduits en mécanique générale et inversement.

REMARQUE : On peut aussi envisager le changement d'observateur inverse. De la définition (1.7) page 5 on écrit :

$$\mathbf{x}_t' - \mathbf{x}_t = \mathbf{Q}_t^T \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t' - \tilde{\mathbf{x}}_t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_t^B - \mathbf{x}_t^A = \mathbf{Q}_t^T \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A)$$

En dérivant par rapport au temps (par définition, les points A et B sont fixes pour l'observateur $\mathcal{R}$), on obtient :

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) + \mathbf{Q}_t^T \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_t^B - \tilde{\mathbf{v}}_t^A) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}_t^B - \tilde{\mathbf{v}}_t^A = - \left(\mathbf{Q}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \right) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A)$$

où le tenseur $\mathbf{Q}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T$ est antisymétrique de vecteur adjoint $\mathbf{w}'$. On a alors :

$$\tilde{\mathbf{v}}_t^B - \tilde{\mathbf{v}}_t^A = \mathbf{w}' \wedge (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}_t^B = \tilde{\mathbf{v}}_t^A + \mathbf{w}' \wedge (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) = \tilde{\mathbf{v}}_t^A + \mathbf{w}' \wedge \{A, B\}_{\tilde{\mathcal{R}}}$$

Le vecteur $\mathbf{w}'$ est donc le vecteur vitesse de rotation de $\mathcal{R}$ pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$:

$$\mathbf{w}' = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \text{adj} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t^T \right) = -\text{adj} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) \quad (1.12)$$

Les deux vecteurs $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}/\mathcal{R}} \in \mathbb{V}_3$ et $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \in \mathbb{V}_3$ ne sont pas opposés, le premier étant évalué par ses composantes dans le repère de l'observateur $\mathcal{R}$ et le second dans le repère de l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

En utilisant l'identité $(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \otimes^3 \mathbf{H} = \mathbf{H}$, on montre que :

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = -\mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}/\mathcal{R}} \quad (1.13)$$

1.7 En bref...

Le modèle milieu continu est une idéalisation de la matière. Ses prévisions ne peuvent corroborer que des vérifications macroscopiques.

Pour décrire des grandeurs associées à des particules à tout instant, on utilise des champs matériels scalaires, vectoriels ou tensoriels, (presque partout) différentiables.

Pour décrire le mouvement d'un milieu continu, il faut choisir un observateur.

L'universalité de la définition des distances, ainsi que l'objectivité de la distance entre deux particules impliquent l'existence d'un tenseur de changement d'observateur qui est une rotation (tenseur orthogonal de déterminant +1).

Chapitre 2

Descriptions du mouvement d'un milieu continu

2.1 Transformation entre deux instants

Considérons un milieu continu en mouvement pour un certain observateur $\mathcal{R}$.

Soit P une particule du milieu continu en mouvement pour cet observateur. On note $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{x}_{t'}$ les vecteurs positions, pour l'observateur $\mathcal{R}$, de la particule P aux instants t et t' .

Considérons la transformation géométrique $\mathbf{f}_{tt'} : \mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, qui, dans un certain mouvement du milieu continu décrit avec l'observateur $\mathcal{R}$, associe à toute position $\mathbf{x}_t \in \mathbb{V}_3$ (vecteur position de P à l'instant t), la position $\mathbf{x}_{t'} \in \mathbb{V}_3$ (vecteur position de la même particule P mais à l'instant t'):

$$\mathbf{x}_t \in \mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbf{x}_{t'} = \mathbf{f}_{tt'}(\mathbf{x}_t) \in \mathbb{V}_3 \quad (2.1)$$

On suppose que :

1. toutes les particules dont la position à l'instant t est $\mathbf{x}_t$ ont une position $\mathbf{x}_{t'}$ à l'instant t' ;
2. deux particules distinctes P et Q dont les positions à l'instant t sont $\mathbf{x}_t^P$ et $\mathbf{x}_t^Q$, ne peuvent occuper la même position à un autre instant t' (autrement dit, les $\mathbf{x}_{t'}$ n'ont qu'un seul antécédent dans la transformation $\mathbf{f}_{tt'}$).

Dans ces conditions, la fonction $\mathbf{f}_{tt'}$ est inversible.

REMARQUE : En fait, en mécanique des milieux continus, il est possible que l'inversibilité de $\mathbf{f}_{tt'}$ ne soit vraie que presque partout (voir note 1.2 page 2). Par exemple, dans le cas où une cavitation se produirait dans le mouvement entre les instants t et t' , il existerait une particule de position $\mathbf{x}_t$ (le « germe » de la cavitation) qui aurait plusieurs positions à l'instant t' : ce seraient tous les points sur la surface délimitant la bulle de cavitation. Dans le cas d'une fissuration, c'est toute une ligne de positions $\mathbf{x}_t$ qui auraient deux positions $\mathbf{x}_{t'}$: une sur chaque lèvres de la fissure ouverte.

De plus, on a évidemment : $\mathbf{f}_{tt} = I$ (identité) et $\mathbf{f}_{tt''} = \mathbf{f}_{t't''} \circ \mathbf{f}_{tt'}$ (transitivité).

En mécanique des milieux continus, on utilise principalement deux méthodes pour décrire le mouvement des particules d'un milieu continu par rapport à un observateur $\mathcal{R}$. On utilise aussi ces deux méthodes pour décrire les champs matériels de grandeurs physiques $\mathcal{A}(P, t)$ d'un milieu continu. Ce sont les méthodes de Lagrange et d'Euler. Ces deux méthodes ne diffèrent que par la manière dont on identifie les particules.

2.2 Description de Lagrange

DÉFINITIONS : On appelle instant de référence un instant t_0 choisi arbitrairement¹. On appelle instant actuel un instant t quelconque.

Dans la description de Lagrange, les particules sont identifiées par leur position de référence, c'est-à-dire qu'on désigne (on nomme) les particules par la position de référence $\mathbf{x}_0$ qu'elles occupent à l'instant de référence t_0 pour un observateur $\mathcal{R}$.

Soit un champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ décrivant la valeur d'une grandeur tensorielle d'ordre $p \geq 0$ pour toute particule et à tout instant.

DÉFINITION : La description de Lagrange du champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ est la fonction $\mathcal{A}_L$ définie par :

$$(\mathbf{x}_0, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathcal{A}(P, t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

où $\mathbf{x}_0$ est la position de référence de la particule P pour un observateur $\mathcal{R}$.

REMARQUE : Quand on a choisi un système de coordonnées, l'argument vectoriel $\mathbf{x}_0$ de la fonction $\mathcal{A}_L$, peut être remplacé par 3 réels (x_0^1, x_0^2, x_0^3) qui sont les coordonnées du point occupé par la particule P à l'instant t_0 . Dans ce cas les quatre arguments réels (x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) de la fonction $\mathcal{A}_L$ sont appelés *variables de Lagrange*.

DÉFINITION : On appelle **description de Lagrange du mouvement** pour un observateur $\mathcal{R}$, la description de Lagrange du champ matériel des positions actuelles $\mathbf{x}_t(P, t)$ pour cet observateur :

$$(\mathbf{x}_0, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t(P, t) \in \mathbb{V}_3 \quad (2.2)$$

REMARQUE : La notation $\mathbf{f}$ pour la description de Lagrange du mouvement est traditionnelle. On devrait noter cette fonction $\mathbf{x}_{tL}$ (description de Lagrange des positions actuelles).

2.3 Description d'Euler

Dans la description d'Euler, les particules sont identifiées par leur position actuelle.

DÉFINITION : La description d'Euler du champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ est la fonction $\mathcal{A}_E$ définie par :

$$(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathcal{A}(P, t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

où $\mathbf{x}_t$ est la position actuelle de la particule P pour l'observateur $\mathcal{R}$.

REMARQUE : Quand on a choisi un système de coordonnées, l'argument vectoriel $\mathbf{x}_t$ de la fonction $\mathcal{A}_E$, peut être remplacé par 3 réels (x_t^1, x_t^2, x_t^3) qui sont les coordonnées du point occupé par la particule P à l'instant t . Dans ce cas les quatre arguments réels (x_t^1, x_t^2, x_t^3, t) de la fonction $\mathcal{A}_E$ sont appelés *variables d'Euler*.

DÉFINITION : On appelle **description d'Euler du mouvement** pour l'observateur $\mathcal{R}$, la description d'Euler du champ matériel des vitesses actuelles $\mathbf{v}(P, t)$ pour cet observateur :

$$(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{v}(P, t) \in \mathbb{V}_3 \quad (2.3)$$

ILLUSTRATION : On peut considérer la description d'Euler du mouvement comme la donnée de la collection des « photographies » du champ des vitesses à tous les instants.

1. On donnera plus loin des motivations physiques pour choisir cet instant arbitraire.

2.4 Equivalence des deux descriptions

Tout champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ peut donc être décrit aussi bien par la méthode de Lagrange que par la méthode d'Euler. Pour une particule P , de position de référence $\mathbf{x}_0$ et de position actuelle $\mathbf{x}_t$, on a évidemment :

$$\mathcal{A}(P, t) = \mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t) \quad (2.4)$$

Pour un observateur $\mathcal{R}$, les deux fonctions $\mathcal{A}_L$ et $\mathcal{A}_E$ sont deux applications différentes, mais leur valeur pour une particule donnée et à un instant donné est la même.

La question se pose de savoir si les deux descriptions du mouvement qui ont été données précédemment sont équivalentes : si un mouvement est décrit par l'une des méthodes, peut-on trouver l'autre description ?

2.4.1 Passage de la description de Lagrange du mouvement à celle d'Euler

Supposons que l'on connaisse la description de Lagrange du mouvement $\mathbf{f}$ d'un milieu matériel continu. La position actuelle des particules est donnée par :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$$

La vitesse d'une particule, identifiée ici par sa position de référence $\mathbf{x}_0$, est par définition la dérivée par rapport au temps de sa position actuelle :

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \quad (\text{dérivée à particule constante, c'est-à-dire à } \mathbf{x}_0 \text{ constant}) \quad (2.5)$$

Le champ vectoriel $\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t)$ est la description de Lagrange du champ des vitesses. Pour obtenir la description d'Euler des vitesses, il faut donner le champ des vitesses en fonction des positions actuelles.

La fonction $\mathbf{f}$ étant inversible à tout instant, on peut écrire : $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t)$.

En substituant $\mathbf{x}_0$ par sa valeur dans (2.5), on obtient le champ des vitesses en fonction des positions actuelles $\mathbf{x}_t$ et de t , c'est-à-dire la description d'Euler des vitesses :

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{v}_L(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t), t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t), t)}{\partial t} \quad (2.6)$$

REMARQUE : La traduction de l'équation vectorielle (2.6) en un système de trois équations réelles portant sur des coordonnées dépend à la fois du système de coordonnées utilisé (signification des trois variables réelles de position (x_t^1, x_t^2, x_t^3)) et de la base sur laquelle on projette cette égalité vectorielle en trois équations réelles.

2.4.2 Passage de la description d'Euler du mouvement à celle de Lagrange

Inversement, supposons que l'on connaisse la description d'Euler du mouvement $\mathbf{v}_E$ d'un milieu matériel continu :

$$\mathbf{v}(P, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$$

Trouver la description de Lagrange du mouvement, c'est trouver la description de Lagrange des positions actuelles $\mathbf{x}_t$ des particules, c'est-à-dire trouver la fonction $\mathbf{f}$ telle que $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$.

La description de Lagrange des vitesses est la vitesse de la particule (identifiée par $\mathbf{x}_0$) est :

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \quad (\text{voir équation (2.5)})$$

Elle est aussi par définition : $\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t)$.

La fonction inconnue $\mathbf{f}$ est donc solution de l'équation différentielle vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \mathbf{v}_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t) \quad \text{avec les 3 conditions initiales } \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.7)$$

La solution de cette équation différentielle vectorielle, assortie des 3 conditions initiales donne la description de Lagrange du mouvement.

REMARQUE : La traduction de l'équation différentielle vectorielle (2.7) en un système de trois équations différentielles portant sur des coordonnées dépend à la fois du système de coordonnées utilisé (signification des trois variables réelles de position) et de la base sur laquelle on projette cette équation vectorielle en trois équations réelles (suivant la base choisie, la résolution de l'équation différentielle en $\mathbf{f}$ peut être plus ou moins aisée).

Les deux descriptions du mouvement sont donc équivalentes : à partir de l'une on peut trouver l'autre, et inversement.

On a aussi l'équivalence entre les deux descriptions de tout champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$:

- si le champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ est connu par sa description de Lagrange $\mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0, t)$, alors sa description d'Euler est : $\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathcal{A}_L(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t), t)$;
- si le champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ est connu par sa description d'Euler $\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)$, alors sa description de Lagrange est : $\mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathcal{A}_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t)$.

2.4.3 Comparaison des deux descriptions

Les deux descriptions présentent chacune leurs commodités suivant le type de milieux continus que l'on étudie.

Les mécaniciens spécialisés dans les solides déformables préfèrent souvent la description de Lagrange², car ils peuvent donner un sens physique à l'instant de référence t_0 (par exemple, un instant où le solide déformable n'a jamais été soumis à aucun effort). En outre, ils peuvent identifier physiquement des particules en marquant des points sur le solide déformable dans sa position de référence. Les positions $\mathbf{x}_0$ étant facilement matérialisables, la description de Lagrange leur semble la plus naturelle pour suivre l'évolution des grandeurs physiques des particules d'un solide déformable au cours de sa déformation.

Les mécaniciens spécialisés dans les fluides (liquides ou gaz, ces notions seront précisées plus tard) préfèrent généralement employer la description d'Euler car la position individuelle des particules à un instant arbitraire t_0 leur est de peu d'intérêt. Ils préfèrent donc la description d'Euler qui n'utilise pas de concept de position de référence. En outre, la description d'Euler donne directement les indications d'un instrument de mesure placé en un certain point d'observation de l'écoulement.

EXEMPLE : Si l'on observe l'écoulement d'une rivière avec un capteur de vitesse situé en un point géométrique M fixe³, la fonction $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_M, t)$ pour $\mathbf{x}_M$ fixé, est la vitesse à l'instant t de la particule dont la position actuelle est le point M . Si l'on regarde l'évolution de cette mesure au cours du temps, la fonction $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_M, t)$ donne les vitesses des différentes particules qui passent au point d'observation fixe M .

La différence essentielle entre les deux descriptions réside dans le fait que la description de Lagrange d'un champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ décrit la distribution des valeurs actuelles (à l'instant t) de la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur des positions à un instant différent : l'instant de référence t_0 ; alors que la description d'Euler du même champ matériel décrit la distribution des valeurs actuelles de la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur les positions actuelles. On peut prêter une plus grande signification physique à cette dernière. Quoi qu'il en soit, les deux descriptions étant mathématiquement équivalentes, toute discussion supplémentaire ne serait qu'affaire de traditions ou d'habitudes.

2. sauf peut-être quand les déformations ne sont pas « petites » (voir plus loin).

3. pour un certain observateur.

2.5 Champ des déplacements

Cette méthode de description du mouvement n'est traditionnellement employée que par les mécaniciens des solides déformables. Dans la suite, elle ne sera évoquée qu'occasionnellement.

DÉFINITION : On appelle vecteur déplacement d'une particule P , la différence entre la position actuelle et la position de référence (pour un observateur $\mathcal{R}$) :

$$\mathbf{u}(P, t) = \mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_0^P \quad (2.8)$$

Le champ matériel $\mathbf{u}(P, t)$ peut, comme tout champ matériel, être décrit par la méthode de Lagrange ou la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L : (\mathbf{x}_0, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_0^P = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0 \in \mathbb{V}_3 \\ \mathbf{u}_E : (\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{u}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_0^P = \mathbf{x}_t - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \end{aligned}$$

La description du mouvement au moyen de la description de Lagrange du champ des déplacements $\mathbf{u}_L$ est évidemment équivalente à la description de Lagrange du mouvement $\mathbf{f}$. On passe de l'une à l'autre par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0$$

2.6 Opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens

2.6.1 Rappel d'analyse tensorielle

On sait de l'analyse des champs⁴ dans $\mathcal{E}_3$ que les variations locales d'un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) $\mathcal{A}(M)$ différentiable, sont décrites par un champ d'opérateurs linéaires tangents appelé *gradient du champ* $\mathcal{A}$ et noté $\mathbf{grad} \mathcal{A}$, tel que :

$$[d\mathcal{A}](M, d\mathbf{M}) = [(\mathbf{grad} \mathcal{A})(M)] \cdot d\mathbf{M}$$

où $d\mathbf{M}$ est un vecteur arbitraire et où $d\mathcal{A}$, appelé différentielle en M de la fonction $\mathcal{A}(M)$, tend vers la différence $\mathcal{A}(M + d\mathbf{M}) - \mathcal{A}(M)$ quand $\|d\mathbf{M}\| \rightarrow 0$.

Si l'on choisit de représenter les points M de $\mathcal{E}_3$ par un vecteur position $\mathbf{x}$ (ce qui suppose le choix d'un observateur), l'opérateur $\mathbf{grad} \mathcal{A}$ est redéfini ainsi :

$$[d\mathcal{A}](\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = [(\mathbf{grad} \mathcal{A})(\mathbf{x})] \cdot d\mathbf{x} \quad \text{ou plus brièvement :} \quad d\mathcal{A} = \mathbf{grad} \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}$$

où l'opérateur linéaire $\mathbf{grad} \mathcal{A}$ est une application linéaire $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ définie en chaque point $\mathbf{x}$ où $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ est différentiable. Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que si la grandeur $\mathcal{A}$ est un tenseur d'ordre p , alors $\mathbf{grad} \mathcal{A}$ est un champ de tenseurs d'ordre $p + 1$.

2.6.2 Gradients lagrangien et eulérien

On considère maintenant un milieu continu (*a priori* en mouvement pour un observateur $\mathcal{R}$), sur lequel est défini un champ matériel de tenseurs d'ordre $p \geq 0$: $\mathcal{A}(P, t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$. Les deux modes de description de ce champ matériel, celui de Lagrange comme celui d'Euler, sont tous les deux des applications (différentes) $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$. On peut donc décrire les variations spatiales locales de ces champs (à t constant) avec un gradient.

4. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 3.3.

DÉFINITION : On appelle gradient lagrangien de $\mathcal{A}$ le gradient de sa description de Lagrange. On le note $\mathbf{grad}_L \mathcal{A}$:

$$\mathbf{grad}_L \mathcal{A} = \mathbf{grad} \mathcal{A}_L$$

DÉFINITION : On appelle gradient eulérien de $\mathcal{A}$ le gradient de sa description d'Euler. On le note $\mathbf{grad}_E \mathcal{A}$:

$$\mathbf{grad}_E \mathcal{A} = \mathbf{grad} \mathcal{A}_E$$

On a donc :

$$d\mathcal{A} = d\mathcal{A}_L = d\mathcal{A}_E = \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_0 = \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t \quad (2.9)$$

où $\mathbf{grad}_L \mathcal{A}$ et $\mathbf{grad}_E \mathcal{A}$ sont des tenseurs d'ordre $p+1$.

En particulier, le gradient lagrangien du champ matériel des positions actuelles des particules est défini par :

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{grad}_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (2.10)$$

où le tenseur $\mathbf{grad}_L \mathbf{f}$ ($= \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t$) est un tenseur du second ordre. Il est défini pour toute particule et à tout instant, c'est-à-dire que c'est un *champ matériel*.

En particulier, à l'instant $t = t_0$, sa valeur est le tenseur métrique $\mathbf{G}$.

REMARQUE : Le gradient eulérien des positions actuelles $\mathbf{x}_t$ est le tenseur métrique $\mathbf{G}$, en effet, sa définition est $d\mathbf{x}_t = \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t \cdot d\mathbf{x}_t \Rightarrow \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t = \mathbf{G}$.

NOTATION : Le gradient lagrangien des positions actuelles $\mathbf{grad}_L \mathbf{f}$ est traditionnellement noté $\mathbf{F}$. On pose :

$$\mathbf{grad}_L \mathbf{f} = \mathbf{F} \quad (2.11)$$

La fonction $\mathbf{f}$ étant inversible, le déterminant de son gradient n'est jamais nul : $\det \mathbf{F} \neq 0 \forall P \forall t$. À l'instant de référence t_0 , ce gradient prend pour valeur le tenseur métrique $\mathbf{G}$ dont le déterminant est $+1$. On en déduit la propriété suivante :

$$\det \mathbf{F} > 0 \forall P \forall t \quad (2.12)$$

Relations entre gradients lagrangiens et eulériens :

La fonction $\mathbf{f}$ étant inversible, on sait de l'analyse des champs de tenseurs que son gradient, qui est une application $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, est aussi inversible. On a donc la relation :

$$\mathbf{grad}_E (\mathbf{f}^{-1}) = (\mathbf{grad}_L \mathbf{f})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \quad (2.13)$$

De l'égalité (2.9) page 14, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_0 &= d\mathcal{A} = \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t \\ &= \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (\text{d'après (2.10)}) \\ \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_0 &= \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie $\forall d\mathbf{x}_0$ arbitraire, on en déduit la relation entre les gradients lagrangien et eulérien de tout champ tensoriel $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{grad}_L \mathcal{A} = \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{grad}_E \mathcal{A} = \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.14)$$

En particulier, si le champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ est le champ des vitesses $\mathbf{v}(P, t)$, il vient :

$$\mathbf{grad}_L \mathbf{v} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \mathbf{grad}_L \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.15)$$

2.6.3 Versions lagrangienne et eulérienne des autres opérateurs différentiels

En conséquence de ce qui précède, on définit une version lagrangienne et une version eulérienne des opérateurs différentiels déduits du gradient (ces opérateurs sont définis en analyse tensorielle) :

$$\mathbf{div}_L \mathbf{A} = \mathbf{grad}_L \mathbf{A} : \mathbf{G} \quad \Delta_L \mathbf{A} = \mathbf{div}_L \mathbf{grad}_L \mathbf{A} \quad \mathbf{rot}_L \mathbf{A} = -\mathbf{grad}_L \mathbf{A} : \mathbf{H} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{div}_E \mathbf{A} = \mathbf{grad}_E \mathbf{A} : \mathbf{G} \quad \Delta_E \mathbf{A} = \mathbf{div}_E \mathbf{grad}_E \mathbf{A} \quad \mathbf{rot}_E \mathbf{A} = -\mathbf{grad}_E \mathbf{A} : \mathbf{H} \quad (2.17)$$

où $\mathbf{G}$ est le tenseur métrique et $\mathbf{H}$ le tenseur d'orientation.

On déduit de (2.14) des relations entre opérateurs lagrangiens et eulériens :

$$\mathbf{div}_L \mathbf{A} = \mathbf{grad}_L \mathbf{A} : \mathbf{G} = (\mathbf{grad}_E \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{G} = \mathbf{grad}_E \mathbf{A} : \mathbf{F}^T \quad (2.18)$$

$$\mathbf{div}_E \mathbf{A} = \mathbf{grad}_E \mathbf{A} : \mathbf{G} = (\mathbf{grad}_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}) : \mathbf{G} = \mathbf{grad}_L \mathbf{A} : \mathbf{F}^{-T} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{rot}_L \mathbf{A} = -\mathbf{grad}_L \mathbf{A} : \mathbf{H} = -(\mathbf{grad}_E \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{H} = -\mathbf{antisym}(\mathbf{grad}_E \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{H} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{rot}_E \mathbf{A} = -\mathbf{grad}_E \mathbf{A} : \mathbf{H} = -(\mathbf{grad}_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}) : \mathbf{H} = -\mathbf{antisym}(\mathbf{grad}_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}) : \mathbf{H} \quad (2.21)$$

2.7 Dérivée particulaire

Soit un milieu continu en mouvement pour un observateur $\mathcal{R}$. À chaque particule P (en mouvement) on associe une grandeur physique (scalaire, vectorielle ou tensorielle) par un champ matériel $\mathbf{A}(P, t)$. On s'intéresse à la dérivée temporelle de la grandeur $\mathbf{A}$ pour une particule donnée (on dit souvent qu'on « suit la particule dans son mouvement »).

DÉFINITION : On appelle *dérivée particulaire* de $\mathbf{A}$, notée $\dot{\mathbf{A}}$, la dérivée temporelle de la grandeur $\mathbf{A}$ à particule constante :

$$\dot{\mathbf{A}}(P, t) = \frac{\partial \mathbf{A}(P, t)}{\partial t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathbf{A}(P, t') - \mathbf{A}(P, t)}{t' - t} \quad (2.22)$$

Si $\mathbf{A}$ est un champ tensoriel d'ordre p , sa dérivée particulaire est donc aussi un champ tensoriel d'ordre p .

REMARQUE : La dérivée particulaire décrit l'évolution de la grandeur physique $\mathbf{A}$ pour une particule P donnée. Elle traduit donc l'évolution temporelle des propriétés de la matière en P .

Si le champ matériel $\mathbf{A}(P, t)$ est décrit par la méthode de Lagrange :

Sa description de Lagrange est : $\mathbf{A}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{A}(P, t)$, où $\mathbf{x}_0$ est la position de référence de la particule P .

La dérivée particulaire du champ $\mathbf{A}$ est la dérivée à particule constante, c'est-à-dire à $\mathbf{x}_0$ constant. La description de Lagrange de la dérivée particulaire est donc :

$$\dot{\mathbf{A}}_L = \frac{\partial \mathbf{A}_L(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \quad (2.23)$$

Si le champ matériel $\mathbf{A}(P, t)$ est décrit par la méthode d'Euler :

Sa description d'Euler est : $\mathbf{A}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{A}(P, t)$, où $\mathbf{x}_t$ est la position actuelle de la particule P .

À un instant t' , la position de la même particule P est le point $\mathbf{x}_{t'}$, et la grandeur $\mathbf{A}(P, t')$ observée en $\mathbf{x}_{t'}$ pour cette même particule est donc $\mathbf{A}_E(\mathbf{x}_{t'}, t')$.

La variation de la grandeur $\mathbf{A}$ pour la particule P entre les instants t et t' est donc : $\mathbf{A}_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \mathbf{A}_E(\mathbf{x}_t, t)$.

La dérivée particulière du champ $\mathcal{A}$ est donc :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{A}}_E &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\
 &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t') + \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t') - \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\
 &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t')}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t') - \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\
 &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathbf{grad} \mathcal{A}_E \cdot (\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t) + \|\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t') - \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\
 &= \mathbf{grad} \mathcal{A}_E \cdot \lim_{t' \rightarrow t} \frac{(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\|\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t') - \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\
 \dot{\mathcal{A}}_E &= \mathbf{grad} \mathcal{A}_E \cdot \mathbf{v}_E + \underbrace{\|\mathbf{v}_E\| \lim_{t' \rightarrow t} \mathcal{O}(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}_0 + \frac{\partial \mathcal{A}_E}{\partial t}
 \end{aligned}$$

La description d'Euler de la dérivée particulière du champ $\mathcal{A}(P, t)$ est donc :

$$\dot{\mathcal{A}}_E = \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{v}_E + \frac{\partial \mathcal{A}_E}{\partial t} \quad (2.24)$$

VOCABULAIRE : Dans beaucoup d'ouvrages de mécanique des fluides, la description d'Euler de la dérivée particulière $\dot{\mathcal{A}}_E$ est souvent appelée *dérivée totale* de la fonction $\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)$ (on considère son argument $\mathbf{x}_t$, comme une fonction du temps). Le terme $\frac{\partial \mathcal{A}_E}{\partial t}$ est appelé *dérivée propre* et le terme $\mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{v}_E$ est appelé *dérivée convective*.

REMARQUE : En prenant comme champ matériel les positions actuelles $\mathcal{A}(P, t) = \mathbf{x}_t(P, t)$, sa description d'Euler est évidemment $\mathbf{x}_{tE} = \mathbf{x}_t$. On a donc $\frac{\partial \mathbf{x}_{tE}}{\partial t} = \mathbf{0}$. D'autre part, $\mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t = \mathbf{G}$ car $d\mathbf{x}_{tE} = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x}_t$. L'équation (2.24) conduit à $\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{v}_E$. On retrouve bien que la vitesse d'une particule est la dérivée particulière de sa position actuelle.

En particulier, la dérivée particulière du gradient lagrangien des positions actuelles $\mathbf{F} = \mathbf{grad}_L \mathbf{f}$ est :

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{grad}_L \mathbf{f})}{\partial t} = \mathbf{grad}_L \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) = \mathbf{grad}_L \mathbf{v}$$

On peut donc récrire les relations (2.15) page 14 ainsi :

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.25)$$

2.8 Accélération d'une particule

DÉFINITION : L'accélération d'une particule pour un observateur $\mathcal{R}$ est la dérivée particulière de sa vitesse pour cet observateur.

Quand la vitesse est décrite par la méthode de Lagrange, en utilisant (2.23) page 15, on trouve la description de Lagrange des accélérations :

$$\gamma_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

Quand la vitesse est décrite par la méthode d'Euler, en utilisant (2.24) page 16, on trouve la description d'Euler des accélérations :

$$\gamma_E(\mathbf{x}_t, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_E \quad (2.27)$$

En utilisant l'identité $\mathbf{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{rot} \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$, on obtient une autre forme utile de la description d'Euler des accélérations :

$$\gamma_E(\mathbf{x}_t, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_E(\mathbf{v}^2) + (\mathbf{rot}_E \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}_E \quad (2.28)$$

Le lecteur pourra vérifier qu'on a bien les changement de description suivants :

$$\gamma_E(\mathbf{x}_t, t) = \gamma_L(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t), t) \quad \text{et} \quad \gamma_L(\mathbf{x}_0, t) = \gamma_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t)$$

2.9 Outils d'analyse du mouvement

2.9.1 Trajectoire d'une particule

DÉFINITION : La trajectoire de la particule P pour un observateur $\mathcal{R}$ est l'ensemble des positions (pour cet observateur) occupées par cette particule au cours du temps.

On sait de la cinématique élémentaire, qu'à chaque instant, le vecteur vitesse actuelle d'une particule pour un observateur $\mathcal{R}$ est tangent à la trajectoire (pour cet observateur) au point de sa position actuelle $\mathbf{x}_t$.

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, la description de Lagrange donne directement la trajectoire. En effet, l'équation vectorielle $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$ pour $\mathbf{x}_0$ constant et $t \in]-\infty, +\infty[$ définit l'ensemble des positions actuelles de la particule identifiée par $\mathbf{x}_0$, c'est-à-dire la trajectoire de la particule $\mathbf{x}_0$.

ÉQUATIONS RÉELLES : Lorsqu'on a choisi un système de coordonnées, l'équation vectorielle des trajectoires se traduit par 3 équations réelles qui sont les équations paramétriques des trajectoires :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) \Leftrightarrow \begin{cases} x_t^1 = f^1(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \\ x_t^2 = f^2(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \\ x_t^3 = f^3(x_{01}, x_{02}, x_{03}, t) \end{cases} \quad (t \text{ est le paramètre ; } x_{01}, x_{02} \text{ et } x_{03} \text{ identifient la particule})$$

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, la recherche des trajectoires revient à rechercher la description de Lagrange du mouvement. Il suffit donc d'intégrer l'équation différentielle vectorielle (2.7) page 12.

2.9.2 Lignes de courant à un instant t

DÉFINITION : On appelle lignes de courant à l'instant t pour un observateur $\mathcal{R}$, les lignes de champ du champ des vitesses actuelles (pour cet observateur), c'est-à-dire les courbes $\mathcal{L}$ qui sont tangentes aux vitesses actuelles, en chacun de leur point.

Les lignes de courant visualisent donc, par leur tangente, la direction des vecteurs vitesses à un instant t . À un autre instant t' , elles sont généralement différentes.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, on connaît le champ des vitesses actuelles $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$ et on en cherche les lignes de champ $\mathcal{L}$ par la méthode qui suit.

La manière la plus générale de décrire toute courbe $\mathcal{L}$ de l'espace $\mathcal{E}_3$ est d'en donner des équations paramétriques, c'est-à-dire de donner une fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mu)$ qui définit le point courant M de $\mathcal{L}$ par l'équation vectorielle $\mathbf{x}_M = \mathbf{g}(\mu)$.

ÉQUATIONS RÉELLES : Lorsqu'on a choisi un système de coordonnées, la définition paramétrique de la courbe $\mathcal{L}$ est donnée par trois équations réelles :

$$\mathbf{x}_M = \mathbf{g}(\mu) \Leftrightarrow \begin{cases} x_M^1 = g^1(\mu) \\ x_M^2 = g^2(\mu) \\ x_M^3 = g^3(\mu) \end{cases} \quad (\mu \text{ est le paramètre ; } x_M^1, x_M^2 \text{ et } x_M^3 \text{ sont les coordonnées du point courant } M)$$

La recherche de la fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mu)$ se ramène donc à la recherche des trois les fonctions réelles g^1, g^2 et g^3 . Pour certaines courbes de l'espace $\mathcal{E}_3$, il est possible de prendre comme paramètre l'une des coordonnées (par exemple $\mu = x_M^1$), la définition d'une courbe se ramène alors à deux équations. Cependant, puisque l'on ne connaît pas *a priori* les particularités des lignes de courant recherchées, il est préférable d'utiliser un paramétrage général.

On sait de l'étude des courbes paramétriques, que le vecteur $\frac{d\mathbf{g}(\mu)}{d\mu}$ est tangent à la courbe $\mathcal{L}$ au point $\mathbf{g}(\mu)$. Il découle de la définition des lignes de courant qu'on recherche des courbes $\mathcal{L}$ de point courant $\mathbf{x}_M = \mathbf{g}(\mu)$ telles que la tangente en M à $\mathcal{L}$ soit colinéaire à la vitesse $\mathbf{v}_E(M, t)$ en M (à l'instant t choisi). On cherche donc la fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mu)$ telle que :

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{g}(\mu), t) \parallel \frac{d\mathbf{g}(\mu)}{d\mu} \Leftrightarrow \mathbf{v}_E(\mathbf{g}(\mu), t) \wedge \frac{d\mathbf{g}(\mu)}{d\mu} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

La résolution de l'équation différentielle vectorielle (2.29), d'inconnue $\mathbf{g}(\mu)$ et où t est une constante, donne les lignes de courant à l'instant t .

REMARQUE : L'écriture du parallélisme de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sous la forme vectorielle $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$ est une écriture redondante. Si l'on projette cette équation vectorielle sur une base, on obtient un système de seulement 2 équations réelles indépendantes⁵. L'équation (2.29) est donc équivalente à un système de 2 équations différentielles réelles (et non 3). Il n'y a donc que deux constantes d'intégration C_1 et C_2 . Les lignes de courant sont une famille de courbes à deux paramètres C_1 et C_2 .

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, on cherche la description d'Euler des vitesses suivant la méthode donnée en section 2.4 page 11 et on est ramené au problème précédent.

DÉFINITIONS : *L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe C donnée engendre une surface appelée nappe de courant. Si la courbe C est fermée la surface engendrée est appelée tube de courant.*

2.9.3 Ligne d'émission à un instant t

Soit N un point géométrique fixe pour un observateur $\mathcal{R}$. Chaque particule P a sa propre trajectoire. On ne s'intéresse ici qu'aux particules P dont la trajectoire passe par N , c'est-à-dire qui sont passées ou qui vont passer par le point fixe choisi N .

DÉFINITION : *On appelle ligne d'émission de N à l'instant t pour un observateur $\mathcal{R}$, l'ensemble des positions (pour cet observateur), à un instant t choisi, des particules dont la trajectoire passe par N .*

Puisqu'à un instant t donné, il existe toujours une particule qui se trouve en N , la ligne d'émission de N à l'instant t passe toujours par N .

ILLUSTRATION : Imaginons que dans un mouvement de milieu continu, il existe au point N « pinceau ponctuel » qui colore les particules qui y passent. Si on prend une photographie du milieu continu à l'instant t , les particules colorées de la photographie dessinent la ligne d'émission de N à l'instant t .

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, on note $\mathbf{x}_N$ le vecteur position du point d'émission fixe N . Les particules dont la trajectoire passe par N sont les particules (c'est-à-dire les $\mathbf{x}_0$) qui sont solutions de :

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_1) \quad (t_1 \text{ est l'instant où la particule } \mathbf{x}_0 \text{ passe au point } N) \quad (2.30)$$

En résolvant en $\mathbf{x}_0$ l'équation vectorielle (2.30), on trouve : $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_N, t_1)$. Les $\mathbf{x}_0$ trouvés sont les particules dont la trajectoire passe par N (elles y passent à l'instant t_1). On sélectionne toutes ces particules quand on fait varier le paramètre t_1 dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

L'équation de la ligne d'émission à l'instant t choisi est la position de ces particules à cet instant. C'est donc la courbe définie par l'équation vectorielle paramétrique de paramètre t_1 :

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_N, t_1), t)}_{\mathbf{g}(t_1)} \quad \text{où } t_1 \in]-\infty, +\infty[\text{ et où } t \text{ est une constante.}$$

La fonction $\mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_N, t) = \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_N, t_1), t)$ est l'équation paramétrique, de paramètre t_1 , de la courbe d'émission de N à l'instant t choisi.

5. L'une d'entre elles est une combinaison linéaire des deux autres.

ÉQUATIONS RÉELLES : Lorsqu'on a choisi un système de coordonnées, l'équation paramétrique vectorielle (de paramètre t_1) $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_N, t)$ de la ligne d'émission de N à l'instant t choisi, se traduit par trois équations réelles :

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_N, t) \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = g^1(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \\ x^2 = g^2(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \\ x^3 = g^3(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \end{cases}$$

où (x^1, x^2, x^3) sont les coordonnées du point courant de la ligne d'émission, (x_N^1, x_N^2, x_N^3) sont celles du point d'émission (fixe), t est une constante et t_1 est le paramètre.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, on cherche la description de Lagrange du mouvement et on est ramené au cas précédent.

2.9.4 Débits à travers une surface

Soit S une surface géométrique fixe (pour un observateur $\mathcal{R}$) orientable⁶ et orientée⁷ traversée par un milieu continu en mouvement. On appelle $\mathbf{n}$ la normale unitaire en un point courant N de S .

DÉFINITION : On appelle *débit volumique à travers la surface S fixe pour un observateur $\mathcal{R}$, le flux du vecteur vitesse (pour cet observateur) à travers la surface S* :

$$q_v(t) = \int_S \mathbf{v}_E(N, t) \cdot \mathbf{n}(N) dS \quad (2.31)$$

L'unité légale de débit volumique est le $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

DÉFINITION : On appelle *débit massique à travers la surface S fixe pour un observateur $\mathcal{R}$, le flux de la quantité de mouvement par unité de volume $\rho \mathbf{v}$ (pour cet observateur) à travers la surface S* :

$$q_m(t) = \int_S \rho_E(N, t) \mathbf{v}_E(N, t) \cdot \mathbf{n}(N) dS \quad (2.32)$$

où ρ_E est la description d'Euler de la masse volumique du milieu continu. L'unité légale est le $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Noter que le signe d'un débit (massique ou volumique) dépend de l'orientation choisie pour S .

VOCABULAIRE : Le scalaire $\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}$ est parfois appelé *vitesse débitante* à travers la surface.

Par ailleurs, dans la littérature scientifique, il règne un certain flou dans l'emploi du mot « flux » : en mathématiques, le flux d'un vecteur $\mathbf{w}$ à travers une surface S est le *scalaire* défini par l'intégrale : $\Phi = \int_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS$; c'est la définition qui sera utilisée dans ce cours. Chez certains auteurs, notamment les thermodynamiciens, le mot « flux » désigne parfois l'intégrande $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ (un scalaire) ou parfois encore le vecteur $\mathbf{w}$ lui-même.

REMARQUE : Si la surface S n'est pas fixe (mais reste indéformable), on définit le débit qui la traverse de la même manière, mais en prenant le flux de la *vitesse relative* du milieu continu par rapport à S ; ce qui revient à calculer le débit à travers une surface fixe mais avec les vitesses vues par un observateur $\mathcal{R}_S$ lié à la surface indéformable S .

2.10 Mouvement stationnaire

DÉFINITION : On dit qu'un mouvement est *stationnaire* ou *permanent* pour un observateur $\mathcal{R}$, si les descriptions d'Euler (pour cet observateur) de toutes les grandeurs physiques sont indépendantes du temps :

$$\frac{\partial \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)}{\partial t} = 0 \quad \forall \text{ la grandeur physique } \mathcal{A} \text{ observée et } \forall \mathbf{x}_t \quad (2.33)$$

6. C'est-à-dire qu'on peut y définir une normale. Toutes les surfaces ne sont pas orientables ; par exemple, une bande de Möbius n'est pas orientable car elle n'a qu'une face.

7. On a choisi une face positive et une face négative parmi les deux choix possibles.

Si l'on mesure une grandeur physique $\mathcal{A}$ (une vitesse par exemple) en un point d'observation fixe M , la mesure de la grandeur $\mathcal{A}(\mathbf{x}_M, t)$, pour les différentes particules qui passent en M au cours du temps, est constante dans le temps : $\mathcal{A}(\mathbf{x}_M, t) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_M)$.

En un autre point d'observation fixe M' , la mesure de la grandeur physique $\mathcal{A}(\mathbf{x}_{M'}, t)$ est différente, mais toujours constante dans le temps.

En particulier, en prenant comme champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ le champ des vitesses $\mathbf{v}(P, t)$, la stationnarité implique : $\frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} = \mathbf{0}$. On en déduit que, *dans un mouvement stationnaire, les lignes de courant sont les mêmes à tout instant.*

De plus, puisque les trajectoires sont aussi des courbes tangentes au champ des vitesses actuelles, on en déduit que, *dans un mouvement stationnaire, les trajectoires sont confondues avec les lignes de courant.*

REMARQUES : En mécanique des milieux continus fluides (liquides et gaz), l'étude des mouvements stationnaires est un cas particulier important : elle consiste à étudier les écoulements en régime établi (s'il existe). Les écoulements non stationnaires sont aussi appelés *écoulements transitoires* ou *régimes transitoires*.

En présence d'écoulements fluides turbulents, le sens du mot « stationnaire » est réduit à la stationnarité de la seule vitesse moyenne. Les fluctuations autour de la vitesse moyenne ne sont pas stationnaires.

En dynamique des solides déformables (vibrations) et en acoustique, on donne souvent un sens différent à l'adjectif « stationnaire » : on parle de « vibrations stationnaires ». Dans un tel mouvement, la description d'Euler des vitesses n'est pas indépendante du temps, ce sont seulement l'amplitude et la fréquence de vibration des grandeurs qui sont constantes dans le temps.

Le sens du mot « stationnaire » peut donc varier donc suivant le contexte.

2.11 Changements d'observateur

NOTATION : On convient de surmonter d'un $\sim$ les grandeurs physiques mesurées avec un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

Toutes les définitions des concepts développés dans ce chapitre reposent sur la représentation des positions des particules P par un vecteur position $\mathbf{x}$. Le vecteur position d'une particule P est donc un vecteur différent pour chaque observateur : $\mathbf{x}_0^P \neq \tilde{\mathbf{x}}_0^P$ et $\mathbf{x}_t^P \neq \tilde{\mathbf{x}}_t^P$.

Il s'ensuit que les dérivées temporelles des vecteurs positions sont aussi différentes. Les vitesses et les accélérations mesurées par deux observateurs différents ne sont donc pas les mêmes, ni en direction, ni en module : $\mathbf{v}(P, t) \neq \tilde{\mathbf{v}}(P, t)$ et $\boldsymbol{\gamma}(P, t) \neq \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(P, t)$ ⁸.

En conséquence, la fonction $\mathbf{f}$ utilisée dans la description de Lagrange du mouvement, qui relie des vecteurs positions différents, est donc une fonction différente pour les deux observateurs : $\mathbf{f} \neq \tilde{\mathbf{f}}$. De même, le champ des vitesses actuelles utilisé dans la description d'Euler du mouvement est différent pour les deux observateurs : $\mathbf{v}_E \neq \tilde{\mathbf{v}}_E$. Les trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission sont donc des courbes de forme différentes pour des observateurs différents.

EXEMPLE : Soit une particule P en mouvement pour un observateur $\mathcal{R}$. Si l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est choisi tel que son origine est toujours confondue avec la particule P (on peut dire que « l'origine de l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est liée à la particule P »⁹), la trajectoire de la particule P pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ se réduit à un point alors que la trajectoire de la même particule pour l'observateur $\mathcal{R}$ est une courbe.

8. On sait écrire les relations de changement d'observateur pour les vitesses et les accélérations. Ce sont des relations compliquées faisant intervenir à la fois la vitesse relative des origines, la vitesse de rotation relative des observateurs ainsi que leurs dérivées temporelles, qu'il est inutile de détailler ici (voir n'importe quel cours de cinématique du point).

9. Pour préciser complètement le mouvement relatif des deux observateurs, il faudrait aussi préciser la vitesse de rotation relative entre $\tilde{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{R}$.

2.12 En bref...

Un champ matériel est une fonction $\mathcal{A}(P, t)$ qui associe une valeur de la grandeur $\mathcal{A}$ (scalaire, vectorielle ou tensorielle) à toute particule et à tout instant. Suivant la nature (la définition) de la grandeur $\mathcal{A}$, elle peut changer ou non de valeur quand on change d'observateur. L'étude de ces changements est l'objet du chapitre suivant.

Les descriptions de Lagrange $\mathcal{A}_L(\mathbf{x}_0, t)$ et d'Euler $\mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t, t)$ d'un champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ sont équivalentes. Quand on considère le gradient de chacune de ces descriptions, on définit une version lagrangienne et d'une version eulérienne des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien.

Le champ matériel des dérivées particulières $\dot{\mathcal{A}}(P, t)$ d'une grandeur $\mathcal{A}$ peut être décrit par la méthode de Lagrange ou celle d'Euler.

Pour appréhender le mouvement d'un milieu continu pour un observateur $\mathcal{R}$, on peut analyser les trajectoires des particules, les lignes de courant à un instant t donné, les lignes d'émission d'un point donné à un instant t donné. *Toutes ces courbes sont différentes pour un autre observateur.*

Les mouvements stationnaires pour un certain observateur ont la même apparence à chaque instant pour cet observateur. Dans le cas d'une définition stricte de la stationnarité, les lignes de courant et les trajectoires sont confondues pour cet observateur. Un mouvement stationnaire pour un observateur ne l'est généralement pas pour un autre observateur.

Chapitre 3

Objectivité

3.1 Définitions et notations

Dans ce chapitre, on considère deux observateurs quelconques, notés $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$, *a priori* en mouvement relatif quelconque.

CONVENTIONS DE NOTATION : Dans la suite, on convient de surmonter d'un « $\sim$ » les grandeurs vues par l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$. Les vecteurs positions actuelles d'une particule $P^{(i)}$ pour les deux observateurs sont notées respectivement $\mathbf{x}_t^{(i)}$ et $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}$.

On a montré en section 1.5 page 4 qu'il existe une rotation, fonction du temps, appelé *tenseur de changement d'observateur de $\mathcal{R}$ à $\tilde{\mathcal{R}}$ à l'instant t* , noté $\mathbf{Q}_{t\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}$ ou plus simplement $\mathbf{Q}_t$ tel que, pour tout couple de particules $(P^{(1)}, P^{(2)})$ et à tout instant, on a la relation suivante (voir (1.7) page 5) :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \quad \forall t \forall P^{(1)} \forall P^{(2)} \quad (3.1)$$

Soit un vecteur matériel défini par le couple de particules $\{P^{(1)}, P^{(2)}\}$. À un instant t , l'observateur $\mathcal{R}$ le représente par le vecteur $\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}$ et l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ le représente par le vecteur $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)}$. On écrira donc :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) \quad \forall t \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\} \quad (3.2)$$

ou encore, pour un changement arbitraire de particule au voisinage d'une particule P :

$$d\tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t \quad (3.3)$$

3.2 Objectivité des grandeurs physiques scalaires

DÉFINITION : Soit une grandeur physique scalaire $\mathcal{A}$ dont la définition est universelle. L'application de cette définition avec l'observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel scalaire $\mathcal{A}(P, t)$ et l'application de cette même définition avec l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel scalaire $\tilde{\mathcal{A}}(P, t)$. On dit que la grandeur scalaire $\mathcal{A}$ est objective si :

$$\mathcal{A}(P, t) = \tilde{\mathcal{A}}(P, t) \quad \forall P \forall t \quad (3.4)$$

Autrement dit, l'application de la définition universelle de la grandeur scalaire $\mathcal{A}$ conduit à une valeur actuelle identique pour tous les observateurs.

Il existe des grandeurs physiques scalaires objectives et d'autres qui ne le sont pas.

EXEMPLES : La norme du vecteur vitesse d'une particule n'est pas une grandeur physique scalaire objective car $\|\mathbf{v}(P,t)\| \neq \|\tilde{\mathbf{v}}(P,t)\|$. Il en est de même pour l'énergie cinétique massique de cette particule ou la norme de son accélération.

En revanche, la masse volumique, la pression ou la température d'une particule sont des grandeurs scalaires objectives.

3.3 Objectivité des grandeurs physiques vectorielles

DÉFINITION : Soit une grandeur physique vectorielle $\mathbf{A}$ dont la définition est universelle. L'application de cette définition avec l'observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel vectoriel $\mathbf{A}(P,t)$ et l'application de cette même définition avec l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel vectoriel $\tilde{\mathbf{A}}(P,t)$. On dit que la grandeur vectorielle $\mathbf{A}$ est objective si :

$$\tilde{\mathbf{A}}(P,t) \cdot \underbrace{(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)})}_{\{P^{(2)}, P^{(1)}\}_{\tilde{\mathcal{R}}}} = \mathbf{A}(P,t) \cdot \underbrace{(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)})}_{\{P^{(2)}, P^{(1)}\}_{\mathcal{R}}} \quad \forall P \forall P^{(1)} \forall P^{(2)} \forall t \quad (3.5)$$

Autrement dit, pour une grandeur vectorielle objective, le « produit scalaire de la grandeur vectorielle actuelle $\mathbf{A}(P,t)$ avec tout vecteur matériel actuel $\{P^{(1)}, P^{(2)}\}$ »¹ a la même valeur, à tout instant t , pour tous les observateurs (c'est donc une grandeur scalaire objective). On peut exprimer cette définition de manière imagée en disant que la valeur actuelle des champs matériels vectoriels $\mathbf{A}(P,t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}(P,t)$ ont « la même position par rapport à la position actuelle de la matière du milieu continu » pour tous les observateurs.

ILLUSTRATION : Supposons que les deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ dessinent chacun simultanément, à un instant t quelconque, leur champ matériel vectoriel respectif $\mathbf{A}(P,t)$ et $\tilde{\mathbf{A}}(P,t)$ sur les positions actuelles des particules. Quand la grandeur vectorielle est objective, les deux dessins sont superposables.

De la définition (3.5), pour une grandeur $\mathbf{A}$ vectorielle objective, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(P,t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) &= \mathbf{A}(P,t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) & \forall P \forall P^{(1)} \forall P^{(2)} \forall t \\ \tilde{\mathbf{A}}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) &= \mathbf{A}(P,t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) & \forall P \forall P^{(1)} \forall P^{(2)} \forall t \\ \tilde{\mathbf{A}}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_t &= \mathbf{A}(P,t) & \forall P \forall t \end{aligned}$$

On en déduit la formule de changement d'observateur de toute grandeur vectorielle objective :

$$\tilde{\mathbf{A}}(P,t) = \mathbf{A}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_t^T = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{A}(P,t)$$

Inversement,

$$\tilde{\mathbf{A}}(P,t) = \mathbf{A}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_t^T \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}}(P,t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) = \mathbf{A}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) = \mathbf{A}(P,t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)})$$

On en déduit une caractérisation des grandeurs vectorielles objectives :

THÉORÈME : Une grandeur vectorielle $\mathbf{A}$ est objective si et seulement si sa formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\mathbf{A}}(P,t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{A}(P,t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{A}(P,t)) \quad (\text{rotation par } \mathbf{Q}_t \text{ du vecteur } \mathbf{A}(P,t)) \quad (3.6)$$

Les propriétés des tenseurs orthogonaux montrent que si $\mathbf{A}$ est une grandeur vectorielle, alors sa norme est une grandeur scalaire objective (c'est-à-dire : $\|\tilde{\mathbf{A}}\| = \|\mathbf{A}\|$).

1. ou plus précisément : l'application de cette définition par les observateurs.

3.4 Objectivité des grandeurs physiques tensorielles du second ordre

DÉFINITION : Soit $\mathbf{A}$ une grandeur physique tensorielle d'ordre 2 dont la définition est universelle. L'application de cette définition avec l'observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel tensoriel $\mathbf{A}(P, t)$ et l'application de cette même définition avec l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel tensoriel $\tilde{\mathbf{A}}(P, t)$. On dit que la grandeur tensorielle d'ordre 2 $\mathbf{A}$ est objective si :

$$(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \quad \forall P \forall P^{(i)} \forall t \quad (3.7)$$

Autrement dit, « l'action de $\mathbf{A}$ sur tout couple de vecteurs matériels » est un scalaire objectif.

Comme précédemment, on déduit de (3.7) la formule de changement d'observateur de toute grandeur tensorielle du second ordre objective par la suite d'équivalences suivantes (toutes valables $\forall P \forall P^{(i)} \forall t$) :

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)})) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)})) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{Q}_t^T \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t = \mathbf{A}(P, t) \\ \Leftrightarrow & \tilde{\mathbf{A}}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t^T. \end{aligned}$$

On en déduit une caractérisation des grandeurs tensorielles du second ordre objectives :

THÉORÈME : Une grandeur tensorielle du second ordre $\mathbf{A}$ est objective si et seulement si sa formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\mathbf{A}}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t^T = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{A}(P, t)) \quad (\text{rotation par } \mathbf{Q}_t \text{ du tenseur } \mathbf{A}(P, t)) \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) et les propriétés algébriques des tenseurs orthogonaux permettent d'affirmer que, si la grandeur $\mathbf{A}$ est une grandeur tensorielle du second ordre objective, on a les résultats suivants :

- les valeurs propres de $\tilde{\mathbf{A}}(P, t)$ et de $\mathbf{A}(P, t)$ sont les mêmes, ce sont donc des grandeurs scalaires objectives ; il en est de même pour les invariants ;
- les vecteurs propres unitaires de $\tilde{\mathbf{A}}(P, t)$ et de $\mathbf{A}(P, t)$ sont liés par la relation $\tilde{\mathbf{u}}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}(P, t)$, ce sont donc des grandeurs vectorielles objectives ;
- on représente plus efficacement les directions propres non orientées par des tenseurs du second ordre uniaxiaux unitaires ($\mathbf{U} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}$) ; on montre facilement que la relation de changement d'observateur est : $\tilde{\mathbf{U}}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{U}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t^T$, c'est-à-dire que les tenseurs uniaxiaux définissant les directions propres sont des grandeurs tensorielles du second ordre objectives (l'« orientation des directions propres par rapport à la position actuelle de la matière du milieu continu » est la même pour tous les observateurs à tout instant).

À partir de la définition (3.7), par la suite des équivalences suivantes (toutes valables $\forall P \forall P^{(i)} \forall t$), on va donner une définition équivalente de l'objectivité d'une grandeur tensorielle du second ordre :

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)})) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)})) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{Q}_t^T \cdot \tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t = \mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}(P, t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)})}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_t \cdot \underbrace{(\mathbf{A}(P, t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}))}_{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

On peut donc poser la définition équivalente suivante pour l'objectivité des grandeurs tensorielles du second ordre :

DÉFINITION ÉQUIVALENTE : *Un grandeur tensorielle du second ordre est objective si et seulement si son produit contracté simple avec tout vecteur matériel est une grandeur vectorielle objective.*

3.5 Objectivité des grandeurs physiques tensorielles d'ordre p

La définition équivalente de l'objectivité des grandeurs tensorielles d'ordre 2 donnée dans la fin de la section précédente permet de généraliser par récurrence la définition de l'objectivité des grandeurs tensorielles de tous ordres :

DÉFINITION : *Une grandeur tensorielle d'ordre p est une grandeur objective si son produit contracté simple avec tout vecteur matériel est une grandeur tensorielle d'ordre $p - 1$ objective :*

$$\mathcal{A}^{(p)} \text{ est objectif} \Leftrightarrow \mathcal{A}^{(p)} \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \text{ est objectif } \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)} \forall t \quad (3.9)$$

En remarquant que la formule de changement d'observateurs pour un tenseur du second ordre $\mathcal{A}^{(2)}$ peut se récrire avec le produit tensoriel de Kronecker² :

$$\tilde{\mathcal{A}}^{(2)}(P, t) = \mathbf{Q}_t^T \cdot \mathcal{A}^{(2)}(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{(2)}(P, t) = (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \mathcal{A}^{(2)}(P, t)$$

on montre facilement que la formule de changement d'observateur pour les grandeurs tensorielles objectives d'ordre p s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{A}}^{(p)}(P, t) = \underbrace{(\mathbf{Q}_t \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{Q}_t)}_{p \text{ termes}} \overline{\otimes}^p \mathcal{A}^{(p)}(P, t) = \mathbf{Q}_t^{\boxtimes p} \overline{\otimes}^p \mathcal{A}^{(p)}(P, t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathcal{A}^{(p)}(P, t)) \quad (3.10)$$

3.6 Exemples de changement d'observateur

3.6.1 Changement d'observateur du champ $F(P, t)$

Le gradient lagrangien des positions actuelles a été défini en (2.10) page 14 :

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{grad}_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}_0 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (\text{notation introduite en (2.11) page 14})$$

La relation entre les représentations actuelles d'un vecteur matériel par deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ a été donnée en (3.3) page 23 :

$$d\tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t$$

En particulier, à l'instant $t = t_0$, on a :

$$d\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (3.11)$$

où $\mathbf{Q}_0$ est le tenseur de changement d'observateur à l'instant t_0 .

La définition universelle du gradient lagrangien des positions actuelles, pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$d\tilde{\mathbf{x}}_t = \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 \Rightarrow \mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot d\mathbf{x}_0 \Rightarrow d\mathbf{x}_t = \underbrace{\mathbf{Q}_t^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0}_{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{x}_0$$

La formule de changement d'observateur pour le gradient lagrangien des positions actuelles est donc :

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}_t^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T \quad (3.12)$$

2. Voir la définition dans l'annexe B.1 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur.

Cette formule est différente de la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre objective donnée en (3.8) page 25.

Le gradient lagrangien des positions actuelles, traditionnellement noté $\mathbf{F}$, est un champ de grandeurs tensorielles du second ordre non objectif.

REMARQUE : Le gradient eulérien des positions actuelles est défini par $d\mathbf{x}_t = \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t \cdot d\mathbf{x}_t$, c'est-à-dire $\mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t = \mathbf{G}$. C'est un champ de tenseurs (uniforme) qui est évidemment objectif.

3.6.2 Changement d'observateur des opérateurs différentiels eulériens d'une grandeur objective

Gradient eulérien d'un champ scalaire objectif

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur scalaire objective. L'application de sa définition avec un observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel $\mathcal{A}(P,t)$ et cette même définition avec un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel $\tilde{\mathcal{A}}(P,t)$. L'objectivité de cette grandeur implique que la formule de changement d'observateur est (voir (3.4) page 23) :

$$\tilde{\mathcal{A}}(P,t) = \mathcal{A}(P,t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{A}}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t,t) = \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t,t)$$

La définition du gradient eulérien (vecteur) pour l'observateur $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t \\ d\tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t && \text{(objectivité de } \mathcal{A} \text{)} \\ d\tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(d'après (3.3) page 23)} \\ \mathbf{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(définition du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}} \text{)} \\ \mathbf{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_t \text{)} \\ \mathbf{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathcal{A} && \text{(} \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \text{ est un vecteur)} \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateurs pour les grandeurs vectorielles objectives (voir (3.6) page 24).

Le gradient eulérien d'un champ de grandeurs scalaires objectives est un champ de grandeurs vectorielles objectif.

Gradient eulérien d'un champ vectoriel objectif

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur vectorielle objective. L'application de sa définition avec un observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel vectoriel $\mathcal{A}(P,t)$ et cette même définition avec un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel vectoriel $\tilde{\mathcal{A}}(P,t)$. L'objectivité de cette grandeur implique que la formule de changement d'observateur est (voir (3.6) page 24) :

$$\tilde{\mathcal{A}}(P,t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A}(P,t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{A}}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t,t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t,t)$$

3. OBJECTIVITÉ

La définition du gradient eulérien (tenseur d'ordre 2) pour l'observateur $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{A} &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathcal{A}} &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t && \text{(objectivité de } \mathcal{A} \text{)} \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathcal{A}} &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(d'après (3.3) page 23)} \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot \text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(définition du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}} \text{)} \\
 \text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t \\
 \text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_t \text{)}
 \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateurs pour les grandeurs tensorielles d'ordre 2 objectives (voir (3.8) page 25).

Le gradient eulérien d'un champ de grandeurs vectorielles objectives est un champ de grandeurs tensorielles d'ordre 2 objectif.

Gradient eulérien d'un champ tensoriel du second ordre objectif

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur tensorielle objective du second ordre . L'application de sa définition avec un observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel tensoriel d'ordre 2 $\mathcal{A}(P,t)$ et cette même définition avec un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel tensoriel d'ordre 2 $\tilde{\mathcal{A}}(P,t)$. L'objectivité de cette grandeur implique que la formule de changement d'observateur est (voir (3.8) page 25):

$$\tilde{\mathcal{A}}(P,t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A}(P,t) \cdot \mathbf{Q}_t^T \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{A}}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t,t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A}_E(\mathbf{x}_t,t) \cdot \mathbf{Q}_t^T$$

La définition du gradient eulérien (tenseur d'ordre 3) pour l'observateur $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{A} &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{Q}_t &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_t && \text{(objectivité de } \mathcal{A} \text{)} \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{Q}_t &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(d'après (3.3) page 23)} \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot (\text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t) \cdot \mathbf{Q}_t &= \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(définition du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}} \text{)} \\
 \text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot (\text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t) \cdot \mathbf{Q}_t^T \\
 \text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= [(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \boxtimes^3 \text{grad}_E \mathcal{A}] \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && (\boxtimes \text{ est le produit tensoriel de Kronecker)} \\
 \text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} &= (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \boxtimes^3 \text{grad}_E \mathcal{A} && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_t \text{)}
 \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateurs pour les grandeurs tensorielles d'ordre 3 objectives (voir (3.10) page 26).

Le gradient eulérien d'un champ de grandeurs tensorielles d'ordre 2 objectives est un champ de grandeurs tensorielles d'ordre 3 objectif.

On généralise sans difficulté aux champs de tenseurs de grandeurs objectives d'ordre supérieur.

Autres opérateurs eulériens sur des champs de grandeurs objectives

Les versions eulériennes des opérateurs différentiels divergence, rotationnel et laplacien ont été définis en (2.17) page 15. À partir des formules de changement d'observateur du gradient eulérien d'une grandeur objective, on montre facilement que :

L'application des opérateurs différentiels eulériens à des champs matériels objectifs engendre des champs matériels objectifs.

EXEMPLE : Si $\mathcal{A}$ est une grandeur vectorielle objective, on a

$$\mathbf{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T \Rightarrow \mathbf{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} : \mathbf{G} = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T) : \mathbf{G} = \mathbf{grad}_E \mathcal{A} : \mathbf{G} \Rightarrow \text{div}_E \tilde{\mathcal{A}} = \text{div}_E \mathcal{A}$$

On montre de même que si $\mathcal{A}$ est une grandeur vectorielle objective, on a :

$$\mathbf{rot}_E \tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{rot}_E \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \Delta_E \tilde{\mathcal{A}} = \Delta_E \mathcal{A}$$

Opérateurs eulériens sur des champs de grandeurs non objectives

La formule de changement d'observateur des grandeurs non objectives étant spécifique à chaque grandeur, il faut donc établir une formule de changement d'observateur au cas par cas.

Toutefois, il se peut que l'application d'opérateurs eulériens à des grandeurs non objectives conduise à une grandeur objective. Par exemple, on verra plus loin (voir (5.28) page 66) que la divergence eulérienne du champ des vitesses (champ vectoriel non objectif) est néanmoins une grandeur objective.

3.6.3 Changement d'observateur des opérateurs différentiels lagrangiens

Cas d'un champ scalaire objectif

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur scalaire objective. L'application de sa définition avec un observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel scalaire $\mathcal{A}(P, t)$ et cette même définition avec un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel scalaire $\tilde{\mathcal{A}}(P, t)$. L'objectivité de cette grandeur implique que la formule de changement d'observateur est (voir (3.4) page 23) :

$$\tilde{\mathcal{A}}(P, t) = \mathcal{A}(P, t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{A}}_L(\tilde{\mathbf{x}}_t, t) = \mathcal{A}_L(\mathbf{x}_t, t)$$

La définition du gradient lagrangien (vecteur) pour l'observateur $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_0 \\ d\tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_0 && \text{(objectivité de } \mathcal{A} \text{)} \\ d\tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 && \text{(d'après (3.11) page 26)} \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 && \text{(définition du gradient lagrangien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}} \text{)} \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_0^T && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_0 \text{)} \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{grad}_L \mathcal{A} && \text{(grad}_L \mathcal{A} \text{ est un vecteur)} \end{aligned}$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateurs pour les grandeurs vectorielles objectives (voir (3.6) page 24).

Le gradient lagrangien d'un champ de grandeurs scalaires objectives est un champ de grandeurs vectorielles non objectif.

Cas d'un champ vectoriel objectif

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur vectorielle objective. L'application de sa définition avec un observateur $\mathcal{R}$ conduit au champ matériel vectoriel $\mathcal{A}(P, t)$ et cette même définition avec un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au champ matériel vectoriel $\tilde{\mathcal{A}}(P, t)$. L'objectivité de cette grandeur implique que la formule de changement d'observateur est (voir (3.6) page 24) :

$$\tilde{\mathcal{A}}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A}(P, t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{A}}_L(\tilde{\mathbf{x}}_t, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A}_L(\mathbf{x}_t, t)$$

La définition du gradient lagrangien (tenseur d'ordre 2) pour l'observateur $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{A} &= \text{grad}_L \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathcal{A}} &= \text{grad}_L \mathcal{A} \cdot d\mathbf{x}_0 && \text{(objectivité de } \mathcal{A} \text{)} \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot d\tilde{\mathcal{A}} &= \text{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 && \text{(d'après (3.11) page 26)} \\
 \mathbf{Q}_t^T \cdot \text{grad}_L \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 &= \text{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 && \text{(définition du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}} \text{)} \\
 \text{grad}_L \tilde{\mathcal{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 \\
 \text{grad}_L \tilde{\mathcal{A}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_L \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_0^T && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_0 \text{)}
 \end{aligned}$$

ce qui n'est pas la formule de changement d'observateurs pour les grandeurs tensorielles d'ordre 2 objectives (voir (3.10) page 26).

Le gradient lagrangien d'un champ de grandeurs vectorielles objectives est un champ de grandeurs tensorielles d'ordre 2 non objectif.

D'une manière générale, le gradient lagrangien d'un champ matériel de grandeurs objectives n'est pas un champ matériel de grandeurs objectives. Ceci provient du fait que la formule de changement d'observateur d'une grandeur objective s'écrit avec le tenseur $\mathbf{Q}_t$ alors que la formule de changement d'observateur des variations arbitraires de la variable $\mathbf{x}_0$ s'écrit : $d\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot d\mathbf{x}_0$.

Il s'en suit que *l'application des opérateurs différentiels lagrangiens à des champs matériels objectifs engendre des champs matériels non objectifs.*

EXEMPLE : On a donné en (2.18) page 15 l'expression de la divergence lagrangienne d'un champ matériel pour un observateur quelconque $\mathcal{R}$. Si le champ matériel $\mathcal{A}$ est une grandeur vectorielle objective, sa divergence s'écrit : $\text{div}_L \mathcal{A} = \text{grad}_E \mathcal{A} : \mathbf{F}^T$. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\text{div}_L \tilde{\mathcal{A}} = \text{grad}_E \tilde{\mathcal{A}} : \tilde{\mathbf{F}}^T = (\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T) : (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T)^T = (\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T) : (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Q}_t^T) \neq \text{grad}_E \mathcal{A} : \mathbf{F}^T$$

3.6.4 Changement d'observateur de la dérivée particulaire d'une grandeur objective

La définition (universelle) de la dérivée particulaire d'un champ matériel $\mathcal{A}(P, t)$ a été donnée en (2.22) page 15 :

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}(P, t)$$

Dérivée particulaire d'une grandeur scalaire objective

Soit $\mathcal{A}(P, t)$ un champ matériel d'une grandeur scalaire objective. Sa formule de changement d'observateur est donc : $\tilde{\mathcal{A}}(P, t) = \mathcal{A}(P, t)$.

L'application de la définition universelle de la dérivée particulaire pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{\mathcal{A}}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \dot{\mathcal{A}}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

La dérivée particulaire d'un champ matériel scalaire objectif est un champ scalaire objectif.

Dérivée particulière d'une grandeur vectorielle objective

La formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective est : $\tilde{\mathcal{A}}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A}(P, t)$.

L'application de la définition universelle de la dérivée particulière pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{\mathcal{A}}} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}}{\partial t} = \frac{\partial(\mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A})}{\partial t} = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A} + \mathbf{Q}_t \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A} + \mathbf{Q}_t \cdot \dot{\mathcal{A}} \neq \mathbf{Q}_t \cdot \dot{\mathcal{A}}$$

La dérivée particulière d'un champ matériel vectoriel objectif est un champ vectoriel non objectif.

Il en est de même pour la dérivée particulière de tout champ matériel non scalaire, car la formule de changement d'observateur contient $\mathbf{Q}_t$ et la relation entre les dérivées particulières contient nécessairement des $\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t$.

3.7 En bref ...

L'objectivité est une propriété des grandeurs physiques.

Une grandeur physique scalaire $\mathcal{A}$ est objective si l'application de la définition (universelle) de cette grandeur pour tous les observateurs donne le même scalaire. Sa formule de changement d'observateur est : $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Si on note $\mathbf{Q}_t$ le tenseur de changement d'observateur (une rotation) entre deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$:

- une grandeur physique $\mathcal{A}$ vectorielle est objective si et seulement si sa formule de changement d'observateur est : $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathcal{A})$.
- une grandeur physique $\mathcal{A}$ tensorielle d'ordre 2 est objective si et seulement si sa formule de changement d'observateur est : $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{Q}_t^T = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathcal{A})$.
- d'une manière générale, une grandeur tensorielle d'ordre p est objective si $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathcal{A})$.

On a donné quelques exemples de champs de grandeurs objectives et non objectives. D'une manière générale, les opérateurs eulériens appliqués à des champs de grandeurs objectives engendrent des champs objectifs. Il se peut que les opérateurs eulériens appliqués à des champs de grandeurs non objectifs engendrent des champs objectifs. En revanche, les opérateurs lagrangiens appliqués à des champs objectifs n'engendrent jamais de champs objectifs.

Seules les dérivées particulières de champs *scalaires* sont des champs scalaires objectifs.

Chapitre 4

Déformation d'un milieu continu

4.1 Introduction

Un solide, tel qu'il est défini en mécanique générale, est un milieu continu réputé indéformable, c'est-à-dire que la distance entre tout couple de particules est constante dans le temps. Pour analyser la déformation à un instant t dans un mouvement de milieu continu *a priori* déformable, il faudrait comparer les distances actuelles entre tout couple de particules avec les distances de ces mêmes couples à un instant t_0 de référence *arbitrairement choisi*. À l'instant t_0 le milieu continu est donc déclaré non déformé !

REMARQUE : Le choix d'un instant de référence est arbitraire mais important car la valeur de la grandeur tensorielle *déformation actuelle* qui va être définie dans ce chapitre dépend évidemment du choix de cet instant de référence. Le concept de déformation actuelle n'a de sens que quand on a choisi un instant de référence t_0 , la position de la matière à cet instant servant de position de référence pour comparer les distances actuelles des couples de particules avec les distances de référence de ces mêmes couples.

Pour l'étude des mouvements de milieux continus solides déformables, on choisit généralement un instant de référence t_0 physiquement significatif ; le plus souvent, t_0 est choisi quand le solide déformable n'a jamais été sollicité par le milieu extérieur : on décide donc qu'à cet instant le solide déformable est non déformé.

En revanche, en mécanique des milieux continus fluides (liquides et gaz), le choix d'un instant de référence est plus difficile à motiver physiquement : un milieu continu fluide n'a pas de forme propre particulière à laquelle on ait envie de se référer. Même si le concept de déformation actuelle par rapport à un instant de référence arbitrairement choisi peut parfaitement être défini pour un fluide, on comprendra que le concept de déformation n'a que très peu d'intérêt pour les mécaniciens des fluides.

Observer les changements de distance de tous les couples de particules d'un milieu continu en mouvement est redondant. D'un point de vue strictement logique, pour savoir si un milieu continu en mouvement se déforme, il suffit de trouver un couple de particules dont les distances varient dans le temps. Cependant, cette information ne donne aucun renseignement sur ce qui se passe pour un autre couple de particules. Pour donner une description plus complète de la déformation, on procède de la manière suivante : pour chaque particule, on n'observe des variations de distance qu'avec les particules voisines. La notion floue de « particule voisine » dans un milieu continu sera précisée. Ce n'est qu'après un certain passage à la limite que l'on verra apparaître la notion de tenseur de déformation en une particule.

La déformation actuelle (à l'instant t) d'un milieu continu par rapport à la position du milieu continu à l'instant de référence t_0 se décrira donc avec un *champ matériel*¹ de tenseurs du second ordre.

1. voir la définition (1.1) page 2

4.2 Direction matérielle

Considérons un milieu continu en mouvement par rapport à un observateur $\mathcal{R}$. À un instant t quelconque, qu'on appellera *instant actuel*, les particules ont chacune un vecteur position actuelle pour cet observateur.

Considérons une particule P dont la position actuelle pour un observateur $\mathcal{R}$ est le vecteur $\mathbf{x}_t$.

DÉFINITION : On appelle *chemin matériel issu de P* , un ensemble de particules noté C , dont les positions actuelles forment une courbe continue C_t passant par la position actuelle $\mathbf{x}_t$ de P .

La différentiabilité de la description de Lagrange du mouvement $\mathbf{f}$ garantit qu'un chemin matériel issu de P défini à un instant t quelconque, reste un chemin matériel issu de P à tout autre instant, mais la courbe $C_{t'}$ dessinée par les positions des particules de C à un instant t' a une forme différente. En particulier, c'est encore vrai, pour l'instant de référence t_0 ; la courbe formée par les positions de référence des particules du chemin matériel C sera notée C_0 .

Soit P' une particule courante d'un chemin matériel C . Les deux particules P et P' définissent un vecteur matériel $\{P, P'\}$.

DÉFINITION : Soit C un chemin matériel issu d'une particule P . On appelle *direction matérielle issue de P* la direction unitaire limite du vecteur matériel $\{P, P'\}$ quand la particule courante P' tend vers la particule P en suivant ce chemin matériel.

Rapidement dit, une direction matérielle issue de P est la tangente unitaire en P au chemin matériel C .

ATTENTION : La locution « quand la particule P' tend vers la particule P » n'a aucune signification cinématique : à un instant t donné toutes les particules ont une position bien définie. Cette locution signifie qu'on considère tous les vecteurs matériels $\{P, P'\}$ où les particules P' sont des particules du chemin, toutes différentes, et de plus en plus proches de la particule P .

En considérant tous chemins matériels issus de P , on définit toutes les directions matérielles issues de P .

Si on utilise la méthode de Lagrange pour identifier les particules, les particules du chemin matériel C ont leur position de référence sur la courbe C_0 et le vecteur matériel $\{P, P'\}$ est représenté par le vecteur $d\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0$. La direction matérielle issue de la particule P est alors représentée par le vecteur unitaire $\mathbf{u}_0$ défini par :

$$\mathbf{u}_0 = \lim_{d\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}_0}{\|d\mathbf{x}_0\|} \quad (4.1)$$

Le vecteur $\mathbf{u}_0$ est bien un vecteur unitaire car il est la limite des vecteurs unitaires $\frac{d\mathbf{x}_0}{\|d\mathbf{x}_0\|}$.

DÉFINITION : Soit un chemin matériel C définissant une direction matérielle issue de la particule P , dont la représentation de Lagrange est la courbe C_0 . Le vecteur unitaire $\mathbf{u}_0$ tangent en $\mathbf{x}_0$ à la courbe C_0 est appelé *direction de référence de la direction matérielle issue de P* .

Si on utilise la méthode d'Euler pour identifier les particules, les particules du même chemin matériel C ont leur position actuelle sur la courbe C_t et le vecteur matériel $\{P, P'\}$ est représenté par le vecteur $d\mathbf{x}_t = \mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t$. La même direction matérielle issue de la même particule P est alors représentée par le vecteur unitaire $\mathbf{u}_t$ défini par :

$$\mathbf{u}_t = \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}_t}{\|d\mathbf{x}_t\|} \quad (4.2)$$

Le vecteur $\mathbf{u}_t$ est bien un vecteur unitaire pour la même raison que précédemment.

DÉFINITION : Soit un chemin matériel C définissant une direction matérielle issue de la particule P , dont la représentation d'Euler est la courbe C_t . Le vecteur unitaire $\mathbf{u}_t$ tangent en $\mathbf{x}_t$ à la courbe C_t est appelé *direction actuelle de la direction matérielle issue de P* .

On se propose de chercher la relation entre ces deux représentations de la direction matérielle issue de P .

La cinématique nous apprend que la relation entre les représentations de Lagrange et d'Euler du vecteur matériel $\{P, P'\}$ est (voir (2.10) et (2.11) page 14) :

$$\mathbf{dx}_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{dx}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx}_t$$

Ces relations montrent que $P' \rightarrow P \Leftrightarrow \mathbf{dx}_t \rightarrow \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{dx}_0 \rightarrow \mathbf{0}$

De la définition (4.2), il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \lim_{\mathbf{dx}_t \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|} = \lim_{\mathbf{dx}_t \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0\|} = \lim_{\mathbf{dx}_0 \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0\|} = \lim_{\mathbf{dx}_0 \rightarrow \mathbf{0}} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|} \frac{1}{\|\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|}\|} \right) \\ \mathbf{u}_t &= \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \end{aligned} \quad (4.3)$$

On obtient la relation inverse, $\mathbf{u}_0$ en fonction de $\mathbf{u}_t$, en multipliant à gauche (4.3) par $\mathbf{F}^{-1}$:

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_0 = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t \\ \text{et} \\ \|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\| = \frac{1}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (4.4)$$

Les relations (4.3) et (4.4) permettent de passer de la représentation de référence à la représentation actuelle d'une direction matérielle issue d'une particule P et inversement.

4.3 Voisinages d'une particule

Pour définir le voisinage d'une particule P , il faut désigner les particules P' qui appartiennent à ce voisinage. Suivant qu'on utilise la méthode de Lagrange ou la méthode d'Euler pour identifier les particules, on définit deux sortes de voisinages :

DÉFINITION : On appelle *voisinage de référence de la particule P* , l'ensemble des particules P' dont les positions de référence $\mathbf{x}'_0$ sont dans un voisinage géométrique du point $\mathbf{x}_0$. Il sera noté $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$

Le voisinage $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ est engendré par les vecteurs arbitraires $\mathbf{dx}_0$:

$$\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}_0 \quad (4.5)$$

Les vecteurs arbitraires $\mathbf{dx}_0$ peuvent prendre une valeur quelconque, mais dans certaines limites : il faut évidemment que les positions de référence $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}_0 \in \mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ soient dans le domaine de milieu continu étudié quand il est dans sa position de référence (c'est-à-dire à l'instant t_0).

DÉFINITION : On appelle *voisinage actuel de la particule P* , l'ensemble des particules P' dont les positions actuelles $\mathbf{x}'_t$ sont dans un voisinage géométrique du point $\mathbf{x}_t$. Il sera noté $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$.

Le voisinage $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ est engendré par les vecteurs arbitraires $\mathbf{dx}_t$:

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{dx}_t \quad (4.6)$$

De même que pour un voisinage de référence, les vecteurs arbitraires $\mathbf{dx}_t$ peuvent prendre une valeur quelconque, mais dans certaines limites : il faut que les positions actuelles $\mathbf{x}'_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{dx}_t \in \mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ soient dans le domaine de milieu continu étudié quand il est dans sa position actuelle (c'est-à-dire à l'instant t).

Les deux voisinages $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ et $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ sont *a priori* différents : ils ne contiennent pas les mêmes particules.

Selon que l'on raisonne avec un voisinage de référence ou avec un voisinage actuel, on obtient différentes manières de mesurer la déformation actuelle en une particule P . Quand on utilise un voisinage de référence, on aboutit aux tenseurs de déformation dits lagrangiens et quand on utilise un voisinage actuel, on aboutit aux tenseurs de déformation dits eulériens. Dans ce qui suit, on expose les deux démarches.

4.4 Tenseurs de déformation lagrangiens

Dans cette section, on observe les déformations actuelles, c'est-à-dire les changements de distance qui se sont produits entre un instant de référence t_0 choisi arbitrairement et l'instant actuel t , au voisinage d'une particule P , en définissant ce voisinage par un voisinage de référence.

4.4.1 Dilatation linéique dans une direction matérielle

Pour savoir si, à l'instant t , le voisinage d'une particule P a subi des déformations, il faut observer les distances actuelles de la particule P avec ses voisines, et les comparer avec les distances à l'instant de référence, c'est à dire comparer les normes des vecteurs $\|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|$ et $\|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\| = \|\mathbf{dx}_0\|$ pour tous les vecteurs arbitraires $\mathbf{dx}_0$ du voisinage.

À partir de la description de Lagrange du mouvement $\mathbf{f}$, on sait écrire la relation entre le vecteur arbitraire $\mathbf{dx}_0$ arbitraire et la différentielle $\mathbf{dx}_t$ (voir (2.10) et (2.11) page 14), représentant tous les deux le même vecteur matériel $\{P, P'\}$ à des instants différents² :

$$\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P = \mathbf{dx}_t + \dots = \mathbf{grad}_L \mathbf{f} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots \quad (4.7)$$

Cependant, l'équation (4.7) ne traduit pas forcément des déformations. En effet, il peut exister des mouvements de milieux continus dans lesquels les deux vecteurs $\mathbf{dx}_0$ et $\mathbf{dx}_t$ sont différents mais de même longueur. Il faut comparer leurs normes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{dx}_t\|^2 &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots) = \mathbf{dx}_0 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots \\ \frac{\|\mathbf{dx}_t\|^2}{\|\mathbf{dx}_0\|^2} &= \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|} + \dots = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 + \dots \quad \text{où le vecteur } \bar{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|} \text{ est unitaire.} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lorsqu'on fait tendre la particule P' vers la particule P en suivant un certain chemin matériel, le vecteur $\mathbf{dx}_0$ vers $\mathbf{0}$, sa norme tend aussi vers 0, le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|}$ tend vers une direction matérielle, identifiée ici par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$ (voir (4.1) page 34) et les termes notés $+\dots$ tendent vers 0. Il est remarquable de constater que dans l'équation (4.8) la limite du rapport $\frac{\|\mathbf{dx}_t\|^2}{\|\mathbf{dx}_0\|^2}$ à l'instant t ne dépend que de la direction matérielle. On peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION : On appelle *dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$* , notée K_l , la limite du rapport $\frac{\|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_0\|}$ quand le vecteur $\mathbf{dx}_0 \rightarrow \mathbf{0}$:

$$K_l = \lim_{\mathbf{dx}_0 \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_0\|} \quad (4.9)$$

L'équation (4.8) montre que cette limite est :

$$K_l = [\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0]^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = [(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) : (\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0)]^{\frac{1}{2}} = [(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{U}_0]^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

où le tenseur du second ordre $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ est symétrique défini positif et où $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0$ est un tenseur du second ordre uniaxial représentant la direction de référence non orientée d'une direction matérielle.

La dilatation linéique dans une direction matérielle est donc un nombre sans dimension strictement positif. Si $0 < K_l < 1$, il y a contraction dans la direction matérielle ; si $K_l > 1$, il y a élongation dans la direction matérielle.

La dilatation linéique K_l varie avec la direction matérielle considérée. On ne peut pas parler de dilatation linéique en une particule sans préciser dans quelle direction matérielle cette dilatation linéique a lieu. Au

2. Pour alléger les notations, on n'écrit pas les termes qui tendent vers 0 qui vont disparaître quand on fera tendre $P' \rightarrow P$. Rigoureusement on devrait écrire : $\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P = \mathbf{dx}_t + \|\mathbf{dx}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{dx}_t)$, qu'on écrit : $\mathbf{dx}_t + \dots$.

voisinage d'une particule, il peut y avoir élongation dans une certaine direction matérielle et contraction dans une autre. Pour décrire toutes les dilatations linéiques dans toutes les directions matérielles autour de P , il faut un tenseur du second ordre.

DÉFINITION : Le tenseur du second ordre symétrique défini positif $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ est appelé tenseur de déformation de Cauchy-Green droit.

L'équation (4.10) montre que ce tenseur de déformation, permet de calculer les dilatations linéiques actuelles en une particule P de position de référence $\mathbf{x}_0$ dans toutes les directions matérielles issues de P identifiées par leur direction de référence :

$$K_l = [\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_0]^{\frac{1}{2}} = [\mathbf{C} : \mathbf{U}_0]^{\frac{1}{2}}$$

Dans un mouvement de milieu continu, le tenseur $\mathbf{C}$ est une fonction de la particule P et du temps, c'est-à-dire un champ matériel tensoriel du second ordre.

4.4.2 Tenseurs de déformation lagrangiens

Suivant les habitudes des auteurs, on trouve dans la littérature spécialisée de nombreux tenseurs de déformation³ qui peuvent tous s'exprimer les uns en fonction des autres. On se contente d'en donner ici quelques uns parmi les plus couramment rencontrés. La liste qui suit n'est donc pas exhaustive.

- Le tenseur $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ défini précédemment. Il est généralement appelé *tenseur de Cauchy-Green droit*. Ce tenseur est symétrique défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence est donnée par :

$$K_l = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{C} : \mathbf{U}_0} \quad (4.11)$$

- Le tenseur $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$. Ce tenseur est la partie symétrique définie positive de la décomposition polaire à droite du tenseur $\mathbf{F}$ (c'est-à-dire $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ où $\mathbf{R}$ est orthogonal). La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence est donnée par :

$$K_l = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{U}^2 : \mathbf{U}_0} = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0\| \quad (4.12)$$

- Le tenseur $\mathbf{L} = \mathbf{L} \mathbf{u}$. Le tenseur $\mathbf{U}$ étant symétrique défini positif, son logarithme népérien est réel et symétrique mais non défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence est donnée par :

$$K_l = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{e}^{2\mathbf{L}} : \mathbf{U}_0} = \|\mathbf{e}^{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u}_0\| \quad (4.13)$$

- Le tenseur $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$ est généralement appelé *tenseur de Green-Lagrange droit*. Ce tenseur est symétrique non défini positif.

JUSTIFICATION : Ce tenseur est introduit par les auteurs qui décrivent le mouvement au moyen du champ de déplacement (définition en (2.8) page 13) au lieu d'utiliser la description de Lagrange des positions actuelles. La démarche est exposée en détail dans la section 4.12 page 46. En comparant les longueurs d'un segment matériel $\{P, P'\}$ aux instants t_0 et t des particules du voisinage de référence $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ d'une particule P , on trouve que la variation relative du carré des distances est :

$$\frac{\|\mathbf{dx}_t\|^2 - \|\mathbf{dx}_0\|^2}{\|\mathbf{dx}_0\|^2} = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \underbrace{(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u})}_{2\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 \quad \text{où } \bar{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|}$$

3. Dans la littérature spécialisée, les noms propres attribués à chaque tenseur sont largement divers et ne paraissent pas faire l'objet d'un consensus. Il semble à l'auteur que les quelques noms qu'il ose proposer dans ce cours sont relativement consensuels. Seule importe leur définition à partir du tenseur $\mathbf{F}$. Dans la suite, ils seront simplement désignés par leur symbole.

Après le passage à la limite $P' \rightarrow P$, qui comme précédemment implique $\mathbf{dx}_0 \rightarrow \mathbf{0}$, $\|\mathbf{dx}_0\| \rightarrow 0$, $\|\mathbf{dx}_t\| \rightarrow 0$ et $\bar{\mathbf{u}}_0 \rightarrow \mathbf{u}_0$, on trouve :

$$\lim_{\mathbf{dx}_0 \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{dx}_t\|^2 - \|\mathbf{dx}_0\|^2}{\|\mathbf{dx}_0\|^2} = K_I^2 - 1 = 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_0 \quad \Rightarrow \quad K_I = \sqrt{1 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_0} \quad (4.14)$$

Le tenseur $\mathbf{E}$ ainsi défini est bien égal à $\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$. En effet, $\mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{G} + 2\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$$

La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence est donnée par (voir (4.14) page 38) :

$$K_I = \sqrt{1 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{1 + 2\mathbf{E} : \mathbf{U}_0}$$

Les tenseurs $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{E}$ sont tous symétriques et ont les mêmes directions propres. Leurs valeurs propres sont donc réelles et les espaces propres associés orthogonaux entre eux. Les valeurs propres de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{U}$ sont strictement positives.

4.4.3 Dilatations linéiques principales

Soit une direction matérielle dont la direction de référence coïncide avec une direction propre du tenseur de déformation $\mathbf{U}$. Il est facile de vérifier, avec l'équation (4.12) page 37, que la dilatation linéique dans cette direction matérielle est la valeur propre $\lambda_i > 0$ du tenseur $\mathbf{U}$ associée à cette direction propre. On pose donc la définition suivante :

DÉFINITION : Les valeurs propres λ_i du tenseur de déformation $\mathbf{U}$ sont appelées dilatations linéiques principales actuelles.

Les valeurs propres de $\mathbf{C}$ sont $\{\lambda_i^2\}$, celles de $\mathbf{L}$ sont $\{\ln \lambda_i\}$, celles de $\mathbf{E}$ sont $\{\frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)\}$.

4.5 Tenseurs de déformation eulériens

Dans cette section, le voisinage d'une particule est défini par un *voisinage actuel*, mais on analyse toujours les changements de distance qui se sont produits entre une particule P et ses voisines entre les instants t_0 et t . Il s'agit donc toujours de définir la déformation actuelle en une particule, ici identifiée par sa position actuelle $\mathbf{x}_t$. La position de référence de cette particule est donc :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t)$$

Or, on a vu en (2.13) page 14 que $\mathbf{grad}_E(\mathbf{f}^{-1}) = \mathbf{F}^{-1}$. On peut donc écrire⁴ :

$$\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P = \mathbf{dx}_0 + \dots = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx}_t + \dots \quad (4.15)$$

où, cette fois-ci, ce sont les vecteurs $\mathbf{dx}_t$ qui peuvent prendre une valeur quelconque pour définir le voisinage actuel.

4. Voir note 2 page 36.

4.5.1 Dilatation linéique dans une direction matérielle

On utilise la même démarche que pour les tenseurs de déformation lagrangiens. L'équation (4.15) montre qu'il suffit d'échanger les rôles des vecteurs $\mathbf{dx}_0$ et $\mathbf{dx}_t$ et de remplacer $\mathbf{F}$ par $\mathbf{F}^{-1}$. On trouve donc l'équivalent de l'équation (4.8) page 36 :

$$\frac{\|\mathbf{dx}_0\|^2}{\|\mathbf{dx}_t\|^2} = \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|} + \dots = \bar{\mathbf{u}}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_t + \dots$$

DÉFINITION : On appelle *dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle $\mathbf{u}_t$* , la limite du rapport $\frac{\|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_0\|}$ quand le vecteur $\mathbf{dx}_t \rightarrow \mathbf{0}$:

$$K_l = \lim_{\mathbf{dx}_t \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_0\|} \quad (4.16)$$

DÉFINITION : Le tenseur du second ordre symétrique défini positif $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ est appelé *tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche*.

La dilatation linéique dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle $\mathbf{u}_t$ est donc :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{U}_t}}$$

Soit une direction matérielle. On peut l'identifier aussi bien par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$ que par sa direction actuelle $\mathbf{u}_t$. La relation entre ces deux directions est :

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \quad (\text{voir (4.3) page 35})$$

La dilatation linéique dans cette direction matérielle calculée avec le tenseur de déformation $\mathbf{B}$ et celle calculée avec le tenseur de déformation $\mathbf{C}$ sont bien identiques. En effet :

$$\frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} = \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}\|} = \frac{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0)\|} = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \quad (4.17)$$

Les deux définitions de la dilatation linéique dans une direction matérielle données en (4.9) page 36 et en (4.16) page 39 sont donc équivalentes.

- Si la direction matérielle est identifiée par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$ (ou $\mathbf{U}_0$), la dilatation linéique dans cette direction matérielle est donnée par les tenseurs de déformation lagrangiens avec les formules (4.11) et suivantes page 37.
- Si la direction matérielle est identifiée par sa direction actuelle $\mathbf{u}_t$ (ou $\mathbf{U}_t$), la dilatation linéique dans cette direction matérielle est donnée par les tenseurs de déformation eulériens avec les formules (4.18) et suivantes page 39.

4.5.2 Tenseurs de déformation eulériens

Comme pour les tenseurs de déformation lagrangiens on trouve dans la littérature spécialisée d'autres tenseurs de déformation définis à partir du tenseur $\mathbf{B}$. On en donne ici quelques exemples non exhaustifs.

- Le tenseur $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ précédemment défini. Il est généralement appelé *tenseur de Cauchy-Green gauche*. Ce tenseur est symétrique défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle est donnée par :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{U}_t}} \quad (4.18)$$

- Le tenseur $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$. Ce tenseur est la partie symétrique définie positive de la décomposition polaire à gauche du tenseur $\mathbf{F}$ (c'est-à-dire $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ est orthogonal). La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle est donnée par :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{V}^{-2} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{V}^{-2} : \mathbf{U}_t}} = \frac{1}{\|\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (4.19)$$

- Le tenseur $\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{V}$. Le tenseur $\mathbf{V}$ étant symétrique défini positif, son logarithme népérien est réel et symétrique mais non défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle est donnée par :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{e}^{-2\mathbf{M}} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}^{-2\mathbf{M}} : \mathbf{U}_t}} = \frac{1}{\|\mathbf{e}^{-\mathbf{M}} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (4.20)$$

Les tenseurs $\mathbf{B}$, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{M}$ sont tous réels symétriques et ont les mêmes directions propres. Leurs valeurs propres sont donc réelles et les espaces propres orthogonaux entre eux. Les valeurs propres de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{V}$ sont strictement positives.

De plus, en considérant les deux décompositions polaires à gauche et à droite du tenseur $\mathbf{F}$, on obtient la relation entre les tenseurs de déformation $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

Ces relations permettent d'exprimer n'importe quel tenseur de déformation lagrangien ou eulérien en fonction de n'importe quel autre.

Les propriétés des tenseurs orthogonaux impliquent que :

1. Les valeurs propres des tenseurs de déformation $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont les mêmes. On les appelle *dilatations linéiques principales* actuelles. Les invariants fondamentaux de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont donc aussi les mêmes.
2. Si $\mathbf{u}_{0\lambda_i}$ est une direction propre du tenseur $\mathbf{U}$ associée à la valeur propre λ_i , alors $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_{0\lambda_i}$ est une direction propre de $\mathbf{V}$ associée à la même valeur propre λ_i .

On peut résumer ces deux propriétés en disant que le tenseur $\mathbf{V}$ est le transformé de $\mathbf{U}$ par la rotation $\mathbf{R}$: les valeurs propres sont inchangées et les directions propres sont tournées par la rotation $\mathbf{R}$. Il en est de même entre tenseurs $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}$, ainsi qu'entre les tenseurs $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$.

Les valeurs propres de $\mathbf{B}$ sont $\{\lambda_i^2\}$ et celles de $\mathbf{M}$ sont $\{\ln \lambda_i\}$.

4.5.3 Directions matérielles propres à un instant donné

Considérons une direction matérielle identifiée par sa direction de référence $\mathbf{u}_{0\lambda_i}$ où $\mathbf{u}_{0\lambda_i}$ est une direction propre du tenseur de déformation actuel $\mathbf{U}(P,t)$ associée à la dilatation linéique principale actuelle $\lambda_i(t)$. La direction actuelle de cette direction matérielle est donnée par l'équation (4.3) page 35 :

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{0\lambda_i}}{\lambda_i} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_{0\lambda_i}}{\lambda_i} = \frac{\mathbf{R} \cdot (\lambda_i \mathbf{u}_{0\lambda_i})}{\lambda_i} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_{0\lambda_i}$$

La direction actuelle de cette direction matérielle est donc une direction propre de $\mathbf{V}$.

DÉFINITION : On appelle *direction matérielle propre à un instant t* , une direction matérielle dont la direction de référence coïncide avec une direction propre d'un tenseur de déformation lagrangien actuel, ou bien dont la direction actuelle coïncide avec une direction propre d'un tenseur de déformation eulérien actuel.

Il faut bien noter que les directions matérielles propres à un autre instant sont d'autres directions matérielles car le tenseur de déformation (quel que soit celui choisi) évolue, ses directions propres sont donc différentes à chaque instant et elles coïncident avec des directions matérielles différentes.

REMARQUE : On lit parfois une interprétation douteuse et peu utile, à propos de la partie orthogonale $\mathbf{R}$ des décompositions polaires $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$: le tenseur orthogonal $\mathbf{R}$ est quelquefois interprété comme une « rotation de la matière » avant ou après une « déformation pure » $\mathbf{V}$ ou $\mathbf{U}$.

D'une part, dans un mouvement de milieu continu entre les instants t_0 et t , le mouvement n'est pas une succession de deux mouvements l'un rigide et l'autre déformant. Pendant un mouvement entre t_0 et t_1 , pour $t \in [t_0, t_1]$, on peut faire toutes les décompositions polaires locales intermédiaires : $\mathbf{F}(P, t) = \mathbf{V}(P, t) \cdot \mathbf{R}(P, t) = \mathbf{R}(P, t) \cdot \mathbf{U}(P, t)$. La « transformation rigide locale » $\mathbf{R}$, parfois évoquée, n'existe pas car $\mathbf{R}(P, t)$ est un champ matériel en général non uniforme.

D'autre part, dans un mouvement déformant, toutes les directions matérielles issues d'une particule P ont en général une déviation différente (voir (4.37) page 46).

Enfin, les directions matérielles propres dont les positions coïncident avec les directions propres de $\mathbf{U}(t)$ et $\mathbf{V}(t)$ à un instant t ne sont plus les mêmes directions matérielles à un autre instant t' .

Il semble donc difficile de parler d'une « rotation locale de la matière ».

4.6 Comparaisons entre les différents tenseurs de déformation

Tous ces tenseurs de déformation, lagrangiens comme eulériens, sont équivalents en ce sens qu'ils permettent tous de calculer, avec des formules différentes, la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle. Pour les tenseurs lagrangiens, la direction matérielle est identifiée par sa direction de référence, alors que pour les tenseurs eulériens, cette même direction matérielle est identifiée par sa direction actuelle.

Les tenseurs de déformation eulériens se déduisent des tenseurs de déformation lagrangiens par la rotation $\mathbf{R}$ issue de la décomposition polaire du tenseur $\mathbf{F}$. On passe des tenseurs eulériens aux tenseurs lagrangiens par la rotation inverse $\mathbf{R}^T$. En effet, les propriétés algébriques des rotations permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T & \Rightarrow \mathbf{V}^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{R}^T & \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T \\ & \Rightarrow \mathbf{LnV} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{LnU} \cdot \mathbf{R}^T & \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^T \end{aligned}$$

Dans un mouvement rigide (pas de déformation), les tenseurs $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{B}$, et $\mathbf{V}$ prennent la valeur $\mathbf{G}$ (tenseur métrique) alors que les tenseurs $\mathbf{L}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{M}$ prennent la valeur $\mathbf{0}$. En revanche, dans un mouvement rigide, le tenseur $\mathbf{F}$ est une rotation uniforme quelconque.

La direction de référence des *directions matérielles propres actuelles* sont les directions propres des tenseurs de déformation lagrangiens actuels. Leur direction actuelle sont les directions propres des tenseurs de déformation eulériens actuels.

Les dilatations linéiques actuelles dans ces directions matérielles propres sont appelées *dilatations linéiques principales* actuelles ; ce sont les valeurs propres actuelles communes aux tenseurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$.

On peut facilement inventer quantité d'autres tenseurs de déformation⁵. Ceux qui sont basés sur le produit $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ sont lagrangiens (ils identifient une direction matérielle par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$) et ceux qui sont basés sur $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ sont eulériens (ils identifient une direction matérielle par sa direction actuelle $\mathbf{u}_t$).

4.7 Dilatation volumique

Considérons trois particules P' , P'' et P''' d'un voisinage de référence $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ de la particule P . Les trois vecteurs matériels $\{P, P'\}$, $\{P, P''\}$ et $\{P, P'''\}$, issus de la particule P , ont respectivement les positions de référence suivantes :

$$d\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0 \qquad d\mathbf{x}''_0 = \mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0 \qquad d\mathbf{x}'''_0 = \mathbf{x}'''_0 - \mathbf{x}_0$$

5. On trouve dans la littérature des tenseurs de Hill, de Henky, de Finger, d'Euler-Almansi, de Pirot ...

et leurs positions actuelles sont⁶ (voir (4.7) page 36) :

$$\mathbf{dx}'_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}'_0 \quad \mathbf{dx}''_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}''_0 \quad \mathbf{dx}'''_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}'''_0$$

Le volume engendré par les trois vecteurs matériels (supposés non coplanaires) dans leur position de référence est le produit mixte :

$$dv_0 = [\mathbf{dx}'_0, \mathbf{dx}''_0, \mathbf{dx}'''_0]$$

À l'instant t , ce volume matériel est devenu (voir (2.10) et (2.11) page 14):

$$dv_t = [\mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t, \mathbf{dx}'''_t] = [\mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}'_0, \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}''_0, \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}'''_0] = (\det \mathbf{F}) [\mathbf{dx}'_0, \mathbf{dx}''_0, \mathbf{dx}'''_0] = (\det \mathbf{F}) dv_0$$

Le rapport de ces deux volumes est :

$$\frac{dv_t}{dv_0} = \det \mathbf{F} \quad (4.21)$$

Quand on fait tendre les trois particules P' , P'' et P''' vers la particule P (chacune avec son propre chemin matériel), les volumes dv_0 et dv_t tendent vers 0. Il est remarquable de constater que le rapport $\frac{dv_t}{dv_0}$ est indépendant du choix des vecteurs matériels. On peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION : On appelle *dilatation volumique actuelle en P dans un mouvement entre l'instant de référence et l'instant actuel*, notée K_v , la limite du rapport $\frac{dv_t}{dv_0}$ quand $d\mathbf{v}_0 \rightarrow 0$:

$$K_v = \lim_{dv_0 \rightarrow 0} \frac{dv_t}{dv_0} \quad (4.22)$$

L'équation (4.21) montre que la dilatation volumique actuelle en P est :

$$K_v = \det \mathbf{F} \quad (4.23)$$

La dilatation volumique est un nombre sans dimension positif car $\det \mathbf{F} > 0$ (voir (2.12) page 14). Pour $0 < K_v < 1$ il y a contraction volumique et pour $K_v > 1$ il y a extension volumique.

La dilatation volumique actuelle en une particule P peut s'exprimer aussi bien avec les tenseurs de déformation lagrangiens que les tenseurs de déformation eulériens⁷ :

$$K_v = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} > 0 \quad (4.24)$$

4.8 Distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales

Considérons trois directions matérielles issues d'une particule P initialement orthogonales. Le produit mixte de leurs directions de référence est $[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0] = \pm 1$.

La variation du produit mixte de trois vecteurs unitaires reflète la variation de l'angle solide formé par les trois directions matérielles initialement orthogonales.

On note $\mathbf{u}_t$, $\mathbf{u}'_t$ et $\mathbf{u}''_t$ les directions actuelles de ces directions matérielles. En utilisant (4.3) page 35, il vient :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] &= \left[\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{K_l}, \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0}{K'_l}, \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0}{K''_l} \right] = \frac{[\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0, \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0, \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0]}{K_l K'_l K''_l} = \frac{\det \mathbf{F}}{[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0] K_l K'_l K''_l} > 0 \\ [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0] &= \frac{\det \mathbf{F}}{K_l K'_l K''_l} = \frac{\det \mathbf{U}}{K_l K'_l K''_l} = \frac{\det \mathbf{V}}{K_l K'_l K''_l} = \frac{K_v}{K_l K'_l K''_l} > 0 \end{aligned}$$

6. Dans la suite, pour alléger les écritures, on ne fait plus apparaître les $+$ et $-$ qui disparaissent dans les passages à la limite (voir note 2 page 36).

7. On rappelle que $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ avec $\det \mathbf{R} = 1$

On constate que dans une déformation entre les instants t_0 et t , le signe du produit mixte ne change pas. D'autre part, la valeur maximale d'un produit mixte de trois vecteurs unitaires est ± 1 . On a donc toujours :

$$0 < \frac{K_v}{K_l K'_l K''_l} \leq 1$$

DÉFINITION : On appelle *distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales* la quantité :

$$\delta_s = \frac{K_l K'_l K''_l}{K_v} = \frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} \quad (4.25)$$

δ_s reflète la diminution de l'angle solide formé par les trois directions matérielles non orientées initialement orthogonales.

La distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales est donc comprise entre 1 (pas de distorsion stérique) et l'infini. Elle peut être calculée avec n'importe quel tenseur de déformation.

La distorsion stérique actuelle en une particule dépend du choix des trois directions initialement orthogonales issues de P . On montre en annexe (voir (A.5) page 79) que dans une déformation donnée, il existe une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion stérique est maximale. Le maximum est :

$$\delta_{s \max} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.26)$$

REMARQUE : En chaque particule et à chaque instant, il existe des triplets de directions matérielles sans distorsion stérique ($\delta_s = 1$) : ce sont les triplets de directions matérielles propres. En effet, les dilatations linéiques dans les directions matérielles propres sont les dilatations linéiques principales λ_i dont le produit est K_v . La démonstration en annexe A.2 page 77 montre qu'il n'en existe pas d'autre.

4.9 Dilatation surfacique

4.9.1 Facette matérielle

Soit une particule P et son voisinage de référence $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$. Dans ce voisinage, on considère deux particules P' et P'' . Les deux vecteurs matériels $\{P, P'\}$ et $\{P, P''\}$, issus de la particule P , ont les positions de référence $\mathbf{dx}'_0 = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{dx}''_0 = \mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0$, et leurs positions actuelles sont notées $\mathbf{dx}'_t = \mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t$ et $\mathbf{dx}''_t = \mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t$.

Avec le gradient lagrangien des positions actuelles $\mathbf{F}$, on sait écrire la relation entre le vecteur $\mathbf{dx}_0$ arbitraire et sa position actuelle $\mathbf{dx}_t$ (voir (2.10) et (2.11) page 14) :

$$\mathbf{dx}'_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{dx}''_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}''_0$$

où les vecteurs $\mathbf{dx}_0$ et $\mathbf{dx}''_0$ sont arbitraires mais non colinéaires.

Ces deux vecteurs matériels définissent, par leur position de référence et par leur position actuelle, deux facettes planes d'aire positive de normales unitaires respectives $\bar{\mathbf{n}}_0$ et $\bar{\mathbf{n}}_t$ définies par :

$$\bar{\mathbf{n}}_0 ds_0 = \mathbf{dx}_0 \wedge \mathbf{dx}''_0 \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{n}}_t ds_t = \mathbf{dx}_t \wedge \mathbf{dx}''_t$$

REMARQUE : Bien noter que les deux facettes planes sont chacune géométriquement définies par trois points qui sont respectivement $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \mathbf{x}''_0)$ et $(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}'_t, \mathbf{x}''_t)$. En général, une facette matérielle plane à l'instant t_0 se transforme en une surface non plane à l'instant t . On ne pourra parler de dilatation surfacique qu'après la définition correcte d'une limite.

On a donc :

$$\bar{\mathbf{n}}_t d\mathbf{s}_t = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}'_0) \wedge (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}''_0) = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot (d\mathbf{x}_0 \wedge d\mathbf{x}'_0) = (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) ds_0 \quad (4.27)$$

En prenant la norme de l'égalité précédente, il vient :

$$ds_t = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0\| ds_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ds_t}{ds_0} = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0\| \quad (4.28)$$

Quand on fait tendre les deux particules P' et P'' vers la particule P (chacune avec son propre chemin matériel), elles définissent deux directions matérielles dont les directions de référence sont $\mathbf{u}'_0$ et $\mathbf{u}''_0$. La normale unitaire $\bar{\mathbf{n}}_0$ commune aux deux vecteurs $d\mathbf{x}'_0$ et $d\mathbf{x}''_0$ tend vers la normale unitaire $\mathbf{n}_0$ commune aux deux directions matérielles $\mathbf{u}'_0$ et $\mathbf{u}''_0$; et enfin, les aires ds_0 et ds_t tendent vers 0.

DÉFINITION : On appelle *facette matérielle* le plan engendré par deux directions matérielles. Ce plan est identifié par la normale commune aux deux directions matérielles.

4.9.2 Dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle

Il est remarquable de constater que dans l'équation (4.28), le rapport $\frac{ds_t}{ds_0}$ ne dépend pas explicitement de $d\mathbf{x}_0$ ni de $d\mathbf{x}'_0$, mais seulement de leur normale commune $\bar{\mathbf{n}}_0$. On pose donc la définition suivante :

DÉFINITION : On appelle *dilatation surfacique actuelle en P de la facette matérielle identifiée par sa normale de référence $\mathbf{n}_0$* , la limite du rapport $\frac{ds_t}{ds_0}$ quand $ds_0 \rightarrow 0$:

$$K_s = \lim_{ds_0 \rightarrow 0} \frac{ds_t}{ds_0} \quad (4.29)$$

L'équation (4.28) montre que la dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle en P identifiée par sa normale de référence $\mathbf{n}_0$ est :

$$K_s = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \quad (4.30)$$

La dilatation surfacique d'une facette matérielle est un nombre positif car $\det \mathbf{F} > 0$ (voir (2.12) page 14). Pour $0 < K_s < 1$ il y a contraction surfacique de la facette matérielle et pour $K_s > 1$ il y a extension surfacique de cette facette.

4.9.3 Mouvement d'une facette matérielle

On s'intéresse maintenant à la limite du vecteur unitaire $\bar{\mathbf{n}}_t = \frac{d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t}{\|d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t\|}$. En reprenant l'équation vectorielle (4.27) page 44 (dont on n'avait exploité que la norme), il vient :

$$\bar{\mathbf{n}}_t = \frac{ds_0}{ds_t} (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0$$

En passant à la limite dans les mêmes conditions que précédemment, on obtient :

$$\mathbf{n}_t = \lim_{ds_0 \rightarrow 0} \bar{\mathbf{n}}_t = \frac{1}{K_s} (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \quad (4.31)$$

Remarquer que la relation entre la direction actuelle $\mathbf{n}_t$ de la normale à une facette matérielle en fonction de sa direction de référence $\mathbf{n}_0$, est différente de la relation entre la direction actuelle $\mathbf{u}_t$ et la direction de référence $\mathbf{u}_0$ d'une direction matérielle (voir (4.3) page 35), que l'on rappelle ici pour comparaison : $\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}$.

Le mouvement de la normale unitaire d'une facette matérielle n'est pas le mouvement d'une direction matérielle.

On trouve la relation inverse en multipliant à gauche (4.31) par $\mathbf{F}^T$, on obtient :

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{n}_0 = \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}_t \\ \text{et} \\ \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| = \frac{1}{\|\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}_t\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}_t\|} \quad (4.32)$$

4.9.4 Calcul de la dilatation surfacique avec les tenseurs de déformation

La dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle définie en (4.30) page 44 peut s'exprimer aussi bien avec les tenseurs de déformation lagrangiens qu'eulériens :

$$K_S = \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \|(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| = \det(\mathbf{U}) \|\mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{U}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0)\| = \det(\mathbf{U}) \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\| = K_V \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\| \quad (4.33)$$

$$= \det(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}) \|(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| = (\det \mathbf{V}) \|\mathbf{V}^{-T} \cdot \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|}\| = \frac{\det \mathbf{V}}{\|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|} = \frac{K_V}{\|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|} \quad (4.34)$$

où K_V est la dilatation volumique en P (voir (4.23) page 42).

Les tenseurs de déformation lagrangiens identifient la facette matérielle par sa normale unitaire de référence alors que les tenseurs de déformation eulériens identifient cette facette matérielle par sa normale unitaire actuelle.

4.10 Distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales

Considérons deux directions matérielles issues d'une particule P initialement orthogonales. Ces deux directions matérielles déterminent une facette matérielle dont la normale de référence est $\mathbf{n}_0 = \mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{u}'_0$ et d'aire unité.

L'aire engendrée par les directions unitaires actuelles de ces deux directions matérielles ne peut qu'être inférieure ou égale à 1. La variation de cette aire reflète donc la variation de l'angle (non orienté, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$) entre les directions matérielles. En effet, l'aire actuelle engendrée par les deux directions unitaires actuelles est par définition :

$$\mathbf{n}_t \cdot (\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t) = \sin \alpha_t$$

où $\mathbf{u}_t$ et $\mathbf{u}'_t$ sont les directions actuelles des deux directions matérielles.

$$\sin \alpha_t = \mathbf{n}_t \cdot (\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t) = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \cdot (\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t) \quad (\text{voir (4.31) page 44})$$

$$= \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \cdot \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \wedge \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\|} \right) \quad (\text{voir (4.3) page 35})$$

$$= \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \cdot \frac{(\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot (\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{u}'_0)}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\|} \quad (\text{identité algébrique})$$

$$= \det \mathbf{F} \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\|}$$

$$\sin \alpha_t = \frac{\det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\|} = \frac{K_S}{K_l K'_l} \quad (\text{voir (4.30) page 44})$$

DÉFINITION : On appelle distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales la quantité :

$$\delta_a = \frac{K_l K'_l}{K_S} = \frac{1}{\sin \alpha_t} \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha_t \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.35)$$

La distorsion angulaire δ_a traduit la diminution de l'angle entre les deux directions matérielles initialement orthogonales.

La distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales est un nombre compris entre 1 (pas de distorsion angulaire) et l'infini.

La distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales dépend du choix des deux directions orthogonales initialement orthogonales issues de P . On montre en annexe (voir (A.3) page 76), que dans une déformation donnée, il existe un couple de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion angulaire est maximale, elle vaut :

$$\delta_{amax} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \quad (4.36)$$

où λ_1 et λ_3 sont les dilatations linéiques principales extrêmes.

REMARQUES : En chaque particule et à chaque instant, il existe des couples de directions matérielles sans distorsion angulaire ($\delta_a = 1$) : ce sont les couples de directions matérielles propres (voir la définition page 40). En effet, leur direction de référence sont les directions propres de $\mathbf{U}$ et leur direction actuelle sont les directions propres de $\mathbf{V}$. Ces tenseurs étant symétriques, leurs directions propres sont orthogonales. La démonstration en annexe section A.1.1 page 74 montre qu'il en existe d'autres.

D'autre part, on entend parfois parler de « distorsion dans un plan » ou de « cisaillement dans un plan ». Il est facile de vérifier que la distorsion de deux directions matérielles initialement orthogonales dépend de la position de ces deux directions matérielles dans le plan. Il semble difficile de parler de la distorsion dans un plan sans préciser de quelles directions du plan on parle.

4.11 Déviation d'une direction matérielle

DÉFINITION : On appelle *déviation actuelle d'une direction matérielle, dans un mouvement entre l'instant de référence et l'instant actuel*, l'angle entre la position de référence et la position actuelle de cette direction matérielle :

$$\delta = \text{Arccos}(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_0)$$

En utilisant les relations (4.3) et (4.4) page 35, on peut calculer la déviation actuelle d'une direction matérielle entre les instants t_0 et t en identifiant la direction matérielle aussi bien par sa position de référence que par sa position actuelle :

$$\delta = \text{Arccos}(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_0) = \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_t \cdot \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{K_l}\right) = \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_0 \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{K_l}\right) \quad (4.37)$$

$$= \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_t \cdot \frac{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{K_l}\right) = \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_0 \cdot \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0}{K_l}\right) \quad (4.38)$$

Pour déterminer la déviation actuelle d'une direction matérielle issue d'une particule P , on constate que la seule connaissance d'un tenseur de déformation (lagrangien ou eulérien) est insuffisante, il faut connaître en plus le champ de rotation $\mathbf{R}(P,t)$.

4.12 Petites déformations

En mécanique des milieux continus solides déformables, il arrive souvent que les déformations soient « petites ». En effet, dans beaucoup de dimensionnements d'objets solides déformables, le souci de l'ingénieur concepteur est que l'objet qu'il conçoit ne se déforme pas beaucoup⁸.

8. Il y a aussi des cas où on désire qu'il se déforme beaucoup comme par exemple quand on veut modéliser une mise en forme (pliage, emboutissage, forgeage, extrusion...). Dans ce cas l'hypothèse des petites déformations n'est évidemment pas admissible.

En revanche, en mécanique des milieux continus fluides (liquides ou gaz), cette hypothèse est à rejeter car la variation de la distance entre deux particules peut être très importante au cours du mouvement.

Cette section ne concerne donc que les mécaniciens des solides peu déformables.

4.12.1 Tenseur des petites perturbations

Historiquement, les déformations d'un milieu continu solide déformable ont d'abord été introduites en décrivant le mouvement des particules du solide déformable avec le champ des déplacements (voir la définition (2.8) page 13) :

$$\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x}_t = d\mathbf{x}_0 + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}_0$$

Pour étudier les variations de distance, on calcule $\|d\mathbf{x}_t\|^2$:

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{x}_t\|^2 &= (d\mathbf{x}_0 + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}_0) \cdot (d\mathbf{x}_0 + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}_0) \\ &= \|d\mathbf{x}_0\|^2 + d\mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{x}_0 \\ \frac{\|d\mathbf{x}_t\|^2 - \|d\mathbf{x}_0\|^2}{\|d\mathbf{x}_0\|^2} &= \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 \quad \text{où } \bar{\mathbf{u}}_0 = \frac{d\mathbf{x}_0}{\|d\mathbf{x}_0\|} \end{aligned}$$

En passant à la limite $d\mathbf{x}_0 \rightarrow 0$, $\|d\mathbf{x}_t\|$ et $\|d\mathbf{x}_0\|$ tendent vers 0, le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{u}}_0$ tend vers un vecteur unitaire $\mathbf{u}_0$, et il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{d\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{x}_t\|^2 - \|d\mathbf{x}_0\|^2}{\|d\mathbf{x}_0\|^2} &= \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}}_{2E}) \cdot \mathbf{u}_0 \\ K_I^2 - 1 &= \mathbf{u}_0 \cdot \underbrace{(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u})}_{2E} \cdot \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

On aboutit au tenseur de déformation de Green-Lagrange droit $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$ évoqué page 37. À ce stade, aucune approximation n'a encore été commise.

En élasticité élémentaire, le souci principal est d'obtenir une théorie *linéarisée en déplacement*. On pose l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \text{ est un infiniment petit d'ordre 1, ce qu'on notera ici : } \|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1 \quad (4.39)$$

Le terme $\mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ est alors un infiniment petit d'ordre 2, qui est déclaré négligeable. On aboutit alors à la définition d'un tenseur de déformation simplifié $\boldsymbol{\varepsilon}$, dit des *petites déformations* ou encore des *petites perturbations* :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u}) = \text{sym } \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \quad (4.40)$$

REMARQUE IMPORTANTE : La signification cinématique de l'hypothèse simplificatrice (4.39) n'est pas toujours perçue clairement : si $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ est un infiniment petit d'ordre 1, cela signifie que le champ de déplacement est un champ presque uniforme, c'est-à-dire voisin d'une *translation* de solide rigide. *Il s'agit d'une restriction importante des mouvements possibles*. Notamment, un mouvement de rotation sans déformation n'entre pas dans le cadre de cette hypothèse⁹.

D'autre part, si l'hypothèse (4.39) implique bien que $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ est un infiniment petit d'ordre 1 et donc que les variations

9. Il suffit pour s'en convaincre de calculer le champ des déplacements des particules d'un solide indéformable dans une rotation (par exemple d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour simplifier les écritures). On verra clairement que dans ce mouvement, $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ n'est pas un infiniment petit du premier ordre et que le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ calculé avec la définition (4.40) n'est pas une bonne mesure des déformations dans un tel mouvement car il est loin d'être nul bien que les déformations le soient de manière certaine.

relatives des longueurs dans une direction matérielle sont petites, la réciproque n'est pas vraie : si les déformations sont petites, $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ n'est pas nécessairement petit. En effet,

$$\mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A} \quad (4.41)$$

où le tenseur antisymétrique $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$ et où le vecteur $\mathbf{a}$ est solution de l'équation différentielle¹⁰ $\mathbf{grad}_L \mathbf{a} = -\mathbf{rot}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}$. La condition $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ n'implique rien sur la norme du vecteur $\mathbf{a}$ ¹¹ et donc rien sur $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$. L'équation (4.41) montre que le tenseur $\mathbf{A}$, qui est la partie antisymétrique du tenseur $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$, doit avoir une norme infiniment petite d'ordre 1 pour satisfaire l'hypothèse simplificatrice posée en (4.39) :

$$\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A}\| \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{a}\| \ll 1$$

On peut donner une interprétation cinématique de la condition $\|\mathbf{A}\| \ll 1$. Il découle de la définition du champ de déplacement que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \mathbf{A}^2 \quad (4.42)$$

La déviation d'une direction matérielle est donnée par (voir la définition en (4.37) page 46) :

$$\cos \delta = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} = \frac{1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0}{\sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \mathbf{A}^2) \cdot \mathbf{u}_0 + 1}}$$

Puisque $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ et $\|\mathbf{A}\| \ll 1$, il reste au second ordre près :

$$\cos \delta \simeq \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 + 1}{\sqrt{2\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + 1}} \simeq \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 + 1}{\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + 1} = 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_0$$

où $\|\mathbf{A}\| \ll 1$. Le tenseur $\mathbf{G} + \mathbf{A}$ est donc une petite rotation¹². La condition $\|\mathbf{A}\| \ll 1$ impliquée par l'hypothèse simplificatrice (4.39) page 47 signifie donc que $\cos \delta$ doit être proche de 1, c'est-à-dire que la déviation de toute direction matérielle identifiée par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$ doit être un angle nul au second ordre près.

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ devrait donc être appelé honnêtement « tenseur des petites déformation et des petites déviations » ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ et $\|\mathbf{A}\| \ll 1$). C'est pourquoi on l'appelle souvent le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ *tenseur des petites perturbations*, une « petite perturbation » étant à la fois une petite variation des distances et une petite déviation des directions matérielles. En revanche, les déplacements n'ont pas à être « petits » (on peut ajouter un champ de déplacement de translation de solide aussi grand que l'on veut sans rien changer à $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$).

Compte tenu des conditions $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ et $\|\mathbf{A}\| \ll 1$ impliquées par l'hypothèse simplificatrice (4.39) page 47, le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{sym} \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ permet de calculer une approximation des dilatations linéique, surfacique et volumique lorsque le champ de déplacement est proche d'une translation de solide rigide.

Petit allongement relatif dans une direction matérielle :

La dilatation linéique (définition en (4.10) page 36) dans une direction matérielle de position de référence $\mathbf{u}_0$ est :

$$\begin{aligned} K_l &= \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \mathbf{A}^2) \cdot \mathbf{u}_0} && \text{(voir (4.42) page 48)} \\ &\simeq \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{u}_0} \simeq \sqrt{1 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0} \simeq 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 && \text{(car } \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \text{ et } \|\mathbf{A}\| \ll 1) \end{aligned}$$

DÉFINITION : On appelle petit allongement relatif dans la direction matérielle identifiée par sa position de référence $\mathbf{u}_0$, la quantité :

$$K_l - 1 = \lim_{d\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{x}_t\| - \|d\mathbf{x}_0\|}{\|d\mathbf{x}_0\|} \simeq \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0$$

10. Voir les conditions de compatibilité d'un tenseur symétrique et la méthode d'intégration. L'auteur donne une démonstration de ces équations en section 4.4 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*.

11. la valeur de $\|\mathbf{a}\|$ dépend des constantes d'intégration de l'équation différentielle $\mathbf{grad}_L \mathbf{a} = -\mathbf{rot}_L^T \boldsymbol{\varepsilon}$.

12. voir *Algèbre et analyse tensorielle pour la mécanique des milieux continus*, section 1.6.10, du même auteur.

Petite dilatation volumique relative

La dilatation volumique (définition en (4.22) page 42) est : $K_v = \det \mathbf{F} \simeq \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}) \simeq 1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}$

DÉFINITION : On appelle *petite dilatation volumique relative*, la quantité :

$$K_v - 1 = \lim_{d\nu_0 \rightarrow 0} \frac{\|d\nu_t\| - \|d\nu_0\|}{\|d\nu_0\|} \simeq \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Petite distorsion stérique

La distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales (définition en (4.25) page 43) est :

$$\delta_s = \frac{K_l K_l' K_l''}{K_v} \simeq \frac{(1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0)(1 + \mathbf{u}_0' \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0')(1 + \mathbf{u}_0'' \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0'')}{1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}} \simeq 1$$

En petites perturbations, il n'y a pas de distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales, au second ordre près.

Petite dilatation surfacique relative d'une facette matérielle

La dilatation surfacique d'une facette matérielle repérée par sa normale unitaire de référence $\mathbf{n}_0$ (définition (4.30) page 44) est :

$$\begin{aligned} K_s &= (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \simeq \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}) \sqrt{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{n}_0} \simeq (1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \sqrt{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{G} - 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}_0} \\ &\simeq (1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \sqrt{1 - 2\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0} \simeq (1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}) (1 - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0) \simeq 1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

DÉFINITION : On appelle *petite dilatation surfacique relative d'une facette matérielle identifiée par sa normale de référence $\mathbf{n}_0$* , la quantité :

$$K_s - 1 = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{ds_t - ds_0}{ds_0} = \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0$$

Petite distorsion angulaire

Soient $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_0'$ deux directions matérielles initialement orthogonales. Leur normale commune est $\mathbf{n}_0$. Ces trois vecteurs forment une base orthonormée. La distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales (définition en (4.35) page 45) est :

$$\delta_a = \frac{K_l K_l'}{K_s} \simeq \frac{(1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0)(1 + \mathbf{u}_0' \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0')}{1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0} \simeq 1$$

En petites perturbations, il n'y a pas de distorsion angulaire de deux directions initialement orthogonales, au second ordre près.

Conditions de compatibilité en petites perturbations traditionnelles

Pour résoudre certains problèmes en élasticité classique, on est parfois amené à formuler des hypothèses sur le champ inconnu $\boldsymbol{\varepsilon}^{13}$. Ces hypothèses ne peuvent être quelconques, elles doivent satisfaire des conditions

13. En fait, on formule plutôt des hypothèses sur le champ du tenseur des contraintes, ce qui revient (en élasticité classique) à faire des hypothèses sur le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$.

dites de compatibilité (ou d'intégrabilité) pour qu'il existe un champ de déplacements dont $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la partie symétrique du gradient lagrangien :

$$\mathbf{0} = \text{rot}_L \text{rot}_L^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = 2 \text{sym grad}_L \text{div}_L \boldsymbol{\varepsilon} - \text{grad}_L \text{grad}_L \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta_L \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.43)$$

La démonstration de ces conditions¹⁴ fournit la méthode pour trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_L$ quand le champ $\boldsymbol{\varepsilon}$ satisfait à ces conditions. Il faut procéder en deux étapes :

1. Intégrer l'équation $\text{grada} = \text{rot}^T \boldsymbol{\varepsilon}$, ce qui donne toutes les parties antisymétriques possibles de $\text{grad}_L \mathbf{u}$: ces sont les tenseurs $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$. Les solutions $\mathbf{a}$ sont donc déterminées à un champ vectoriel uniforme $\mathbf{a}_0$ près. Il y a donc 3 « petites » constantes d'intégration, car le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'a de sens que si $\|\mathbf{A}\| \ll 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\| \ll 1$. Dans ces conditions, le tenseur $\mathbf{G} + \mathbf{A}$ peut être interprété comme une petite rotation.
2. Intégrer l'équation $\text{grad}_L \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}$. Les champs de déplacement $\mathbf{u}_L$ sont déterminés à un champ de déplacement uniforme $\mathbf{u}_0$ près (les trois constantes d'intégration sont des translations arbitraires).

Tous les champs de déplacement solutions diffèrent donc d'un champ de déplacement de solide restreint (translation quelconque mais petite rotation).

4.12.2 Petites déformations sans restrictions sur le mouvement

Il est possible de définir deux tenseurs de petites déformation sans restriction sur les déviations, l'un est lagrangien et l'autre eulérien :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_U = \mathbf{U} - \mathbf{G} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_V = \mathbf{V} - \mathbf{G} \quad (4.44)$$

Les tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}_U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_V$ sont symétriques non définis positifs.

Lorsque les déformations sont petites, on pose :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_U\| \ll 1 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}_V\| \ll 1 \quad (\text{infiniments petits du second ordre}) \quad (4.45)$$

On vérifie aisément la relation entre ces deux tenseurs : $\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_V = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_U \cdot \mathbf{R}^T$.

Les petites dilatations linéiques surfaciques et volumiques peut être calculées au second ordre près avec ces deux tenseurs. On obtient des formules linéarisées semblables à celles du tenseur des petites perturbations traditionnel $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} K_l &= \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0\| \simeq 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_U \cdot \mathbf{u}_0 & &= \frac{1}{\|\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_1\|} \simeq 1 - \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_V \cdot \mathbf{u}_t \\ K_s &= \det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\| \simeq 1 - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_U \cdot \mathbf{n}_0 & &= \frac{\det \mathbf{V}}{\|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|} \simeq 1 + \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_V \cdot \mathbf{n}_t \\ K_v &= \det \mathbf{U} \simeq 1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}_U & &= \det \mathbf{V} \simeq 1 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}_V \\ \delta_s &= \frac{K_l K'_l K''_l}{K_v} \simeq 1 & &\delta_a = \frac{K_l K'_l}{K_s} \simeq 1 \end{aligned}$$

Aucun de ces deux tenseurs des petites déformations n'est la partie symétrique du gradient d'un champ de déplacement. En revanche il n'y a aucune limitation sur les déviations des directions matérielles.

REMARQUE : Le gradient lagrangien des positions actuelles est $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$. On en déduit des expressions approchées des autres tenseurs de déformation dans le cas de petites déformations (au sens de (4.45)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}_V) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\varepsilon}_V \cdot \mathbf{R} & \mathbf{F} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}_U) = \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_U \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}_V + \boldsymbol{\varepsilon}_V^2 \simeq \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}_V & \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}_U + \boldsymbol{\varepsilon}_U^2 \simeq \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}_U \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{V} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}_V & \mathbf{L} &= \mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{U} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}_U \end{aligned} \quad (4.46)$$

14. La démonstration des conditions d'intégrabilité est donnée en section 4.4 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus* du même auteur. Dans les cours d'élasticité classique, on rencontre les deux formes équivalentes données en (4.43).

Les formules (4.46) montrent que lorsque les déformations sont petites, le gradient lagrangien des positions actuelles $\mathbf{F}$ est voisin d'une rotation $\mathbf{R}$ quelconque ; alors que quand on utilise le tenseur des petites perturbations classique $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$), le tenseur $\mathbf{F}$ est restreint à être voisin de $\mathbf{G}$.

4.13 Changements d'observateur

Toutes les grandeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles qui ont été introduites dans ce chapitre ont une définition qui est universelle¹⁵. On se propose d'établir les relations entre les valeurs de ces grandeurs pour des observateurs différents.

Considérons deux observateurs $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ *a priori* en mouvement relatif. On convient d'accentuer avec un « $\sim$ » les grandeurs relatives à l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$. Considérons un vecteur matériel $\{P, P'\}$ d'un milieu continu en mouvement. On note $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{x}'_t$ les vecteurs positions actuelles de ces deux particules pour l'observateur $\mathcal{R}$ et on note $\tilde{\mathbf{x}}_t$ et $\tilde{\mathbf{x}}'_t$ les vecteurs positions actuelles de ces deux mêmes particules pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$. Le tenseur de changement d'observateur à l'instant t est la rotation $\mathbf{Q}_t$ telle que (voir (1.7) page 5) :

$$\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t \quad (\text{quand } P' \text{ est dans un voisinage de } P.) \quad (4.47)$$

En particulier, à l'instant de référence t_0 , le tenseur de changement d'observateur est la rotation $\mathbf{Q}_0$ telle que :

$$\tilde{\mathbf{x}}'_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (\text{quand } P' \text{ est dans un voisinage de } P.)$$

4.13.1 Changement d'observateur des directions matérielles

Comme on l'a vu en (4.1) et (4.2) page 34, une direction matérielle peut être identifiée par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$ ou par sa direction actuelle $\mathbf{u}_t$. On se propose de chercher les formules de changement d'observateur de ces deux représentations d'une direction matérielle.

La définition de la direction actuelle de la direction matérielle est la même pour les deux observateurs :

$$\mathbf{u}_t = \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}_t}{\|d\mathbf{x}_t\|} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{u}}_t = \lim_{d\tilde{\mathbf{x}}_t \rightarrow 0} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_t}{\|d\tilde{\mathbf{x}}_t\|}$$

Les égalités (4.47) montrent qu'à l'instant actuel t , lorsque $d\tilde{\mathbf{x}}_t \rightarrow 0$, on a $d\mathbf{x}_t \rightarrow 0$, $\|d\tilde{\mathbf{x}}_t\| \rightarrow 0$ et $\|d\mathbf{x}_t\| \rightarrow 0$. On a donc :

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \lim_{d\tilde{\mathbf{x}}_t \rightarrow 0} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_t}{\|d\tilde{\mathbf{x}}_t\|} = \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t}{\|\mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t\|} = \mathbf{Q}_t \cdot \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{x}_t}{\|d\mathbf{x}_t\|} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t$$

La formule de changement d'observateur pour la direction actuelle d'une direction matérielle est donc :

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{U}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \quad (4.48)$$

En particulier, pour $t = t_0$ il vient :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{Q}_0^T \quad (4.49)$$

REMARQUE : La formule de changement d'observateur de la direction actuelle d'une direction matérielle est la même que celle d'une grandeur vectorielle objective (voir (3.6) page 24). En revanche, il n'en est rien pour la direction de référence $\mathbf{u}_0$. En effet, les vecteurs $\mathbf{u}_0$ et $\tilde{\mathbf{u}}_0$ n'ont pas la même orientation par rapport à la position actuelle de la matière, car les deux observateurs sont en mouvement relatif (la déviation de la direction matérielle identifiée par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$ est différente pour les deux observateurs, voir (4.52) page 54).

15. Sauf le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (voir section 4.13.10 page 54).

4.13.2 Changement d'observateur des normales à une facette matérielle

La définition universelle de la direction actuelle de la normale à une facette matérielle est :

$$\mathbf{n}_t = \lim_{\substack{\mathbf{dx}_t \rightarrow 0 \\ \mathbf{dx}'_t \rightarrow 0}} \frac{\mathbf{dx}_t \wedge \mathbf{dx}'_t}{\|\mathbf{dx}_t \wedge \mathbf{dx}'_t\|}$$

La direction actuelle de la normale à une facette matérielle pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{n}}_t &= \lim_{\substack{\tilde{\mathbf{dx}}_t \rightarrow 0 \\ \tilde{\mathbf{dx}}'_t \rightarrow 0}} \frac{\tilde{\mathbf{dx}}_t \wedge \tilde{\mathbf{dx}}'_t}{\|\tilde{\mathbf{dx}}_t \wedge \tilde{\mathbf{dx}}'_t\|} = \lim_{\substack{\mathbf{dx}_t \rightarrow 0 \\ \mathbf{dx}'_t \rightarrow 0}} \frac{(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{dx}_t) \wedge (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{dx}'_t)}{\|(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{dx}_t) \wedge (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{dx}'_t)\|} = \lim_{\substack{\mathbf{dx}_t \rightarrow 0 \\ \mathbf{dx}'_t \rightarrow 0}} \frac{\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{dx}_t \wedge \mathbf{dx}'_t)}{\|\mathbf{Q}_t^T \cdot (\mathbf{dx}_t \wedge \mathbf{dx}'_t)\|} \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot \lim_{\substack{\mathbf{dx}_t \rightarrow 0 \\ \mathbf{dx}'_t \rightarrow 0}} \frac{(\mathbf{dx}_t \wedge \mathbf{dx}'_t)}{\|\mathbf{dx}_t \wedge \mathbf{dx}'_t\|} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t \end{aligned}$$

La formule de changement d'observateur pour la direction actuelle de la normale à une facette matérielle est donc :

$$\tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{N}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \quad (4.50)$$

En particulier, pour $t = t_0$, la formule est :

$$\tilde{\mathbf{n}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{N}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{Q}_0^T \quad (4.51)$$

REMARQUE : Comme pour les directions matérielles, la formule de changement d'observateur pour la direction actuelle de la normale à une facette matérielle est la même que celle d'une grandeur vectorielle objective, alors qu'il n'en est rien pour la direction de référence de la normale à cette même facette matérielle.

4.13.3 Changement d'observateur des tenseurs de déformation

La formule de changement d'observateur du gradient lagrangien des positions actuelles a été établie en (3.12) page 26 : $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T$. On en déduit que :

$$\tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{Q}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{Q}_t$$

Les propriétés des rotations¹⁶ permettent d'en déduire les formules de changement d'observateur pour les différents tenseurs mesurant la déformation actuelle :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}_0^T & \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}_t^T \\ \tilde{\mathbf{U}} &= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}_0^T & \tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}_t^T \\ \tilde{\mathbf{L}} &= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}_0^T & \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_t^T \\ \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_0^T & & \end{aligned}$$

Ces formules montrent que seuls les tenseurs de déformation eulériens sont des grandeurs tensorielles du second ordre objectives (voir (3.8) page 25).

En revanche, on vérifie aisément à l'aide des propriétés des rotations, que les dilatations linéiques principales¹⁷ ordonnées sont des grandeurs scalaires objectives ($\hat{\lambda}_i = \lambda_i$). Il en est donc de même pour les invariants des tenseurs de déformations lagrangiens comme eulériens (exemples: $\tilde{C}_{II} = C_{II}$, $\tilde{M}_{III} = M_{III}$).

16. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus* du même auteur, section 1.6.10.

17. On rappelle que ce sont les valeurs propres communes des tenseurs de déformation $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$.

On en déduit aisément que la formule de changement d'observateur de la direction actuelle des directions matérielles propres (c'est-à-dire les directions propres des tenseurs de déformation eulériens) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{t\lambda_i} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_{t\lambda_i} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{U}}_{t\lambda_i} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{U}_{t\lambda_i} \cdot \mathbf{Q}_t^T$$

alors que la formule de changement d'observateur de la direction de référence des directions matérielles propres (c'est-à-dire les directions propres des tenseurs de déformation lagrangiens) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{0\lambda_i} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_{0\lambda_i} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{U}}_{0\lambda_i} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U}_{0\lambda_i} \cdot \mathbf{Q}_0^T$$

Les directions actuelles des directions matérielles propres sont des champs objectifs.

4.13.4 Changement d'observateur de la dilatation linéique

La définition universelle de la dilatation linéique est $K_l = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|$ (voir (4.10) page 36). Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\tilde{K}_l = \|\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0\| = \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = K_l$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

La dilatation linéique actuelle d'une direction matérielle est une grandeur scalaire objective.

4.13.5 Changement d'observateur de la dilatation volumique

La définition universelle de la dilatation volumique est : $K_v = \det \mathbf{F}$ (voir (4.23) page 42). Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\tilde{K}_v = \det \tilde{\mathbf{F}} = \det(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T) = \det \mathbf{F} = K_v$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

Le champ des dilatations volumiques actuelles est un champ de grandeurs scalaires objectives.

4.13.6 Changement d'observateur de la distorsion stérique

La définition universelle de la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales est $\delta_s = K_l K_l' K_l'' K_v^{-1}$ (voir (4.25) page 43). Elle est donc le produit de grandeurs scalaires objectives.

La distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

4.13.7 Changement d'observateur de la dilatation surfacique

La définition universelle de la dilatation surfacique est $K_s = \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|$ (voir (4.29) page 44). Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_s &= \det \tilde{\mathbf{F}} \|\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0\| = \det(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T) \|(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T)^{-T} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{n}_0\| \\ &= \det \mathbf{F} \|(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{Q}_0^T) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{n}_0\| = \det \mathbf{F} \|\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0)\| = \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| = K_s \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

La dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle est une grandeur scalaire objective.

4.13.8 Changement d'observateur de la distorsion angulaire

La définition universelle de la distorsion angulaire de deux directions matérielle initialement orthogonales est $\delta_a = K_l K_l' K_s^{-1}$ (voir (4.35) page 45). Elle est donc le produit de grandeurs scalaires objectives.

La distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

4.13.9 Changement d'observateur des déviations

La définition universelle de la déviation d'une direction matérielle unitaire est $\cos \delta = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_t$ (voir (4.37) page 46). Pour un observateurs $\mathcal{R}$, elle s'écrit :

$$\cos \tilde{\delta} = \tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t = (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{Q}_0^T \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \neq \cos \delta \quad (4.52)$$

La déviation actuelle d'une direction matérielle est *différente* pour les deux observateurs.

La déviation actuelle d'une direction matérielle est une grandeur scalaire non objective.

4.13.10 Changement d'observateur du tenseur des petites perturbations

L'hypothèse simplificatrice $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$, utilisée pour définir le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ (voir (4.40) page 47), n'est pas consistante vis à vis de l'universalité. En effet, dans un mouvement de milieu continu, si cette hypothèse est vraie pour un observateur $\mathcal{R}$, elle n'est en général pas vraie pour un autre observateur $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T - \mathbf{G} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Q}_0^T - \mathbf{G} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_0^T + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^T - \mathbf{G} \\ \|\mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}}\| &\leq \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_0^T\| + \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^T - \mathbf{G}\| = \|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| + \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^T - \mathbf{G}\| \end{aligned}$$

Ce résultat montre que l'hypothèse simplificatrice $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ n'implique pas $\|\mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}}\| \ll 1$, sauf si $\|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^T - \mathbf{G}\| \ll 1$, c'est-à-dire sauf si le mouvement relatif des deux observateurs est proche d'une translation ($\mathbf{Q}_t \simeq \mathbf{Q}_0$ au second ordre près).

La définition du tenseur des petites perturbations n'est pas universelle.

On peut néanmoins écrire une relation de changement d'observateur entre les parties symétriques du gradient lagrangien du champ de déplacement mesurées par deux observateurs :

$$\begin{aligned} \text{sym } \mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}} &= \text{sym } (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}) = \text{sym } \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G} = \text{sym } (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T) - \mathbf{G} \quad (\text{voir (3.12) page 26}) \\ &= \text{sym } (\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Q}_0^T) - \mathbf{G} \quad (\text{voir (4.42) page 48}) \\ &= \text{sym } (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_0^T) + \text{sym } (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^T) - \mathbf{G} \\ &\neq \mathbf{Q}_t \cdot \text{sym } \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_t^T \end{aligned} \quad (4.53)$$

La partie symétrique du gradient lagrangien des déplacements n'est pas une grandeur tensorielle objective.

4.13.11 Changement d'observateur des tenseurs de petites déformations

La définition universelle des tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}_U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_V$ a été donnée en (4.44) page 50 : $\boldsymbol{\varepsilon}_U = \mathbf{U} - \mathbf{G}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_V = \mathbf{V} - \mathbf{G}$. On déduit aisément des formules de changement d'observateur des tenseurs de déformation données en section 4.13.3 page 52 que les formules de changement d'observateur des tenseurs de petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_V$ sont :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_U = \mathbf{Q}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_U \cdot \mathbf{Q}_0^T \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_V = \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_V \cdot \mathbf{Q}_t^T$$

Le champ de tenseurs des petites déformations $\mathbf{\epsilon}_V$ est un champ de grandeurs tensorielles du second ordre objectif, alors que $\mathbf{\epsilon}_U$ ne l'est pas.

REMARQUE : Avec ces formules de changement d'observateur, on vérifie aisément que si les déformations sont petites pour un observateur, elles le sont pour tout autre :

$$\mathbf{\epsilon}_U \ll 1 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{\epsilon}}_U \ll 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{\epsilon}_V \ll 1 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{\epsilon}}_V \ll 1$$

4.14 En bref...

L'étude des déformations d'un milieu continu est l'étude de la variation des distances de particules dans un mouvement : on compare les distances entre les particules à un instant t aux distances entre les mêmes particules à un instant de référence arbitraire t_0 .

On a défini différents champs matériels de tenseurs de déformation pour évaluer en chaque particule P la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle. Les tenseurs de déformation lagrangiens identifient la direction matérielle issue de P par sa direction de référence, alors que les tenseurs de déformation eulériens l'identifient par sa direction actuelle.

Les tenseurs de déformation lagrangiens sont des grandeurs tensorielles du second ordre non objectives, alors que les tenseurs de déformation eulériens sont des grandeurs tensorielles du second ordre objectives.

En outre, avec ces tenseurs de déformation (lagrangiens comme eulériens), on peut évaluer les grandeurs scalaires *objectives* suivantes :

- la dilatation volumique actuelle en une particule,
- la distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles issues d'une particule et initialement orthogonales,
- la dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle,
- la distorsion actuelle de deux directions matérielles issues d'une particule, et initialement orthogonales.

En revanche, la déviation d'une direction matérielle entre les instants t_0 et t est une grandeur scalaire non objective.

La définition du tenseur des petites perturbations $\mathbf{\epsilon}$ n'est valable que pour des mouvements voisins d'une translation de solide rigide, et de plus, cette définition n'est pas universelle (sauf si le mouvement relatif des deux observateurs est voisin d'une translation). On peut définir des tenseurs de petites déformations sans ces restrictions.

Chapitre 5

Vitesse de déformation

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la vitesse actuelle de déformation d'un milieu continu en mouvement, c'est-à-dire qu'on étudie la dérivée temporelle des distances actuelles entre les particules.

Comme pour les déformations, on va définir un tenseur du second ordre appelé *tenseur des taux de déformation* qui permettra de calculer la vitesse de déformation dans toutes les directions matérielles issues d'une particule P après un certain passage à la limite.

On peut définir le tenseur des taux de déformation de deux manières : suivant un point de vue eulérien en évaluant les vitesses de déformation actuelles à partir du champ des vitesses actuelles, ou bien suivant un point de vue lagrangien où les vitesses de déformation sont vues comme des dérivées temporelles des déformations actuelles mesurées par rapport à la position de référence de la matière.

Le résultat remarquable est que, quel que soit le point de vue envisagé, le tenseur des taux de déformation ne dépend pas d'un instant de référence t_0 arbitraire : on peut évaluer une vitesse de déformation sans savoir par rapport à quel instant on mesure cette déformation. Pour satisfaire les préférences de tous les lecteurs, on envisage systématiquement les deux points de vue.

5.2 Taux de dilatation linéique dans une direction matérielle

Point de vue eulérien

Considérons une particule P et un voisinage actuel de cette particule $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ (voir la définition en (4.6) page 35). Les positions actuelles des particules P' du voisinage sont :

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{x}_t + d\mathbf{x}_t \quad (5.1)$$

où le vecteur $d\mathbf{x}_t$ est un vecteur arbitraire représentant la position actuelle du vecteur matériel $\{P, P'\}$ pour un observateur $\mathcal{R}$.

Pour calculer la dérivée temporelle de sa norme, on dérive le carré de sa norme $\|d\mathbf{x}_t\|^2 = d\mathbf{x}_t \cdot d\mathbf{x}_t$:

$$2 \|d\mathbf{x}_t\| \frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}_t\| = 2 d\mathbf{x}_t \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{x}_t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}_t\| = \frac{d\mathbf{x}_t}{\|d\mathbf{x}_t\|} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{x}_t \quad (5.2)$$

où d'après (5.1) et la définition du gradient eulérien :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{dx}_t = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) = \mathbf{v}(P', t) - \mathbf{v}(P, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}'_t, t) - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}_t + \|\mathbf{dx}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{dx}_t) \quad (5.3)$$

La dérivée temporelle de la longueur actuelle du vecteur matériel $\{P, P'\}$ est donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{dx}_t\| &= \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{dx}_t = \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|} \cdot [\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}_t + \|\mathbf{dx}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{dx}_t)] \\ \frac{\frac{d}{dt} \|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_t\|} &= \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|} \cdot [\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|} + \mathcal{O}(\mathbf{dx}_t)] = \bar{\mathbf{u}}_t \cdot [\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}}_t + \mathcal{O}(\mathbf{dx}_t)] \end{aligned} \quad (5.4)$$

où le vecteur $\bar{\mathbf{u}}_t = \frac{\mathbf{dx}_t}{\|\mathbf{dx}_t\|}$ est un vecteur unitaire. Lorsque $P' \rightarrow P$ en suivant un certain chemin matériel $\mathcal{C}$ (voir section 4.2 page 34), alors $\mathbf{dx}_t \rightarrow 0$, $\|\mathbf{dx}_t\| \rightarrow 0$ et le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{u}}_t$ tend vers une direction matérielle $\mathbf{u}_t$.

DÉFINITION : On appelle *taux de dilatation linéique actuel dans la direction matérielle actuelle $\mathbf{u}_t$* la limite de la dérivée temporelle logarithmique de $\|\mathbf{dx}_t\|$ quand $\mathbf{dx}_t \rightarrow 0$:

$$d_l = \lim_{\mathbf{dx}_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_t\|} \quad (5.5)$$

L'équation (5.4) montre que cette limite est :

$$d_l = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t + \underbrace{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{antisym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t}_0 = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t$$

DÉFINITION : On appelle *tenseur des taux de déformation, noté $\mathbf{D}$* , la partie symétrique du gradient eulérien des vitesses :

$$\mathbf{D} = \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \quad (5.6)$$

Le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ permet de calculer le taux de dilatation linéique d_l dans une direction matérielle repérée par sa direction actuelle $\mathbf{u}_t$:

$$d_l = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{D} : \mathbf{U}_t \quad (5.7)$$

où $\mathbf{U}_t = \mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t$ est le tenseur uniaxial représentant la direction matérielle actuelle non orientée.

Point de vue lagrangien

On a vu que la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle repérée par sa direction de référence $\mathbf{u}_0$ est (voir (4.10) page 36) :

$$K_l = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \quad \Rightarrow \quad \frac{dK_l}{dt} = \frac{d}{dt} \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|$$

Pour calculer $\frac{d}{dt} \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|$ on calcule la dérivée temporelle de $\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|^2 = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0)$

$$\begin{aligned} 2 \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \frac{d\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}{dt} &= 2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_0 \\ &= \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \frac{dK_l}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0).$$

Or on a vu en (4.3) page 35 que la direction actuelle de la direction matérielle est $\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}$ et en (2.25) page 16 que $\mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$. Il vient donc :

$$\frac{\frac{d}{dt} K_l}{K_l} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{D} : \mathbf{U}_t$$

Le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ permet de calculer la dérivée temporelle logarithmique de la dilatation linéique actuelle (entre les instants t_0 et t).

La dérivée temporelle logarithmique de la dilatation linéique actuelle $\frac{d}{dt} \frac{K_l}{K_l}$ est aussi le taux de dilatation linéique d_l défini en (5.5). En effet :

$$d_l = \lim_{\mathbf{dx}_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_t\|} = \lim_{\mathbf{dx}_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \frac{\|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_0\|}}{\frac{\|\mathbf{dx}_t\|}{\|\mathbf{dx}_0\|}} = \frac{\frac{d}{dt} K_l}{K_l}$$

Le point de vue lagrangien comme le point de vue eulérien conduisent au même tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$.

REMARQUE : Contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer, le tenseur $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v} = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})$ n'est pas la dérivée particulière d'un tenseur de déformation eulérien ou lagrangien. Les dérivées particulières des tenseurs de déformation sont calculées en annexe B page 81.

5.3 Taux de dilatation volumique

Point de vue eulérien

Considérons le voisinage actuel $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ d'une particule P , et trois particules de ce voisinage dont les positions actuelles sont $\mathbf{x}_t + \mathbf{dx}_t$, $\mathbf{x}_t + \mathbf{dx}'_t$ et $\mathbf{x}_t + \mathbf{dx}''_t$. L'élément de volume actuel engendré par les trois segments matériels est le produit mixte : $dv_t = [\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t]$.

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dv_t) &= \left[\frac{d}{dt} \mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t \right] + \left[\mathbf{dx}_t, \frac{d}{dt} \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t \right] + \left[\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \frac{d}{dt} \mathbf{dx}''_t \right] \\ &= [\text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}_t + \dots, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t] + [\mathbf{dx}_t, \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}'_t + \dots, \mathbf{dx}''_t] + [\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}''_t + \dots] \\ &\quad \text{(voir (5.2) page 57, on a remplacé } \|\mathbf{dx}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{dx}_t) \text{ par } \dots) \\ \frac{\frac{d}{dt}(dv_t)}{dv_t} &= \frac{[\text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}_t + \dots, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t] + [\mathbf{dx}_t, \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}'_t + \dots, \mathbf{dx}''_t] + [\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}''_t + \dots]}{[\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t]} \\ &= \text{Tr grad}_E \mathbf{v} + \frac{[\|\mathbf{dx}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{dx}_t), \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t]}{[\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t]} + \frac{[\mathbf{dx}_t, \|\mathbf{dx}'_t\| \mathcal{O}(\mathbf{dx}'_t), \mathbf{dx}''_t]}{[\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t]} + \frac{[\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \|\mathbf{dx}''_t\| \mathcal{O}(\mathbf{dx}''_t)]}{[\mathbf{dx}_t, \mathbf{dx}'_t, \mathbf{dx}''_t]} \\ &\quad \text{(on rappelle que } \text{Tr } \mathbf{T} = \frac{[\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]} \quad \forall \mathbf{u}_1 \forall \mathbf{u}_2 \forall \mathbf{u}_3) \\ &= \text{Tr grad}_E \mathbf{v} + \frac{[\mathcal{O}(\mathbf{dx}_t), \bar{\mathbf{u}}'_t, \bar{\mathbf{u}}''_t]}{[\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}'_t, \bar{\mathbf{u}}''_t]} + \frac{[\bar{\mathbf{u}}_t, \mathcal{O}(\mathbf{dx}'_t), \bar{\mathbf{u}}''_t]}{[\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}'_t, \bar{\mathbf{u}}''_t]} + \frac{[\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}'_t, \mathcal{O}(\mathbf{dx}''_t)]}{[\bar{\mathbf{u}}_t, \bar{\mathbf{u}}'_t, \bar{\mathbf{u}}''_t]} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Lorsque les trois particules voisines de P tendent vers P (chacune avec son propre chemin), $dv_t \rightarrow 0$ et les trois vecteurs unitaires $\bar{\mathbf{u}}_t$, $\bar{\mathbf{u}}'_t$ et $\bar{\mathbf{u}}''_t$ tendent respectivement vers les directions matérielles $\mathbf{u}_t$, $\mathbf{u}'_t$ et $\mathbf{u}''_t$.

DÉFINITION : On appelle *taux de dilatation volumique* la limite de la dérivée temporelle logarithmique de l'élément de volume dv_t quand $dv_t \rightarrow 0$:

$$d_v = \lim_{dv_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(dv_t)}{dv_t} \quad (5.9)$$

L'équation 5.8 montre que cette limite est :

$$d_v = \text{Tr grad}_E \mathbf{v} = \text{Tr } \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} \quad (5.10)$$

Point de vue lagrangien

La dilatation volumique actuelle a été définie en (4.23) page 42 : $K_v = \det \mathbf{F}$. Sa dérivée temporelle est¹ :

$$\dot{K}_v = (\det \mathbf{F})' = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = K_v \text{Tr}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = K_v \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = K_v \text{Tr} \mathbf{D}$$

La dérivée temporelle logarithmique de la dilatation volumique actuelle mesurée entre les instants t_0 et t est donc :

$$\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \text{Tr} \mathbf{D}$$

La dérivée temporelle logarithmique de la dilatation volumique actuelle est aussi le taux de dilatation volumique défini en (5.9) page 59 car :

$$d_v = \lim_{dv_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(dv_t)}{dv_t} = \lim_{dv_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \frac{dv_t}{dv_0}}{\frac{dv_t}{dv_0}} = \frac{\dot{K}_v}{K_v}$$

5.4 Taux de dilatation surfacique

Point de vue eulérien

Considérons le voisinage actuel $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ d'une particule P , et deux particules de ce voisinage dont les positions actuelles sont $\mathbf{x}_t + d\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{x}_t + d\mathbf{x}'_t$. L'élément de surface engendré par les deux segments matériels est défini par :

$$ds_t \bar{\mathbf{n}}_t = d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t \quad \Rightarrow \quad ds_t = \|d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t\| = [\mathbf{n}_t, d\mathbf{x}_t, d\mathbf{x}'_t]$$

La dérivée temporelle de l'aire ds_t est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ds_t &= \frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t\| = \frac{d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t}{\|d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t\|} \cdot \frac{d}{dt} (d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t) = \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \left(\frac{d}{dt} d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t \right) + \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \left(d\mathbf{x}_t \wedge \frac{d}{dt} d\mathbf{x}'_t \right) \\ &= [\bar{\mathbf{n}}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}_t + \|d\mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}_t), d\mathbf{x}'_t] + [\bar{\mathbf{n}}_t, d\mathbf{x}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}'_t + \|d\mathbf{x}'_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}'_t)] \\ \frac{\frac{d}{dt} ds_t}{ds_t} &= \frac{[\bar{\mathbf{n}}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}_t + \|d\mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}_t), d\mathbf{x}'_t] + [\bar{\mathbf{n}}_t, d\mathbf{x}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}'_t + \|d\mathbf{x}'_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}'_t)]}{[\mathbf{n}_t, d\mathbf{x}_t, d\mathbf{x}'_t]} \\ &= \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \frac{[\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t, d\mathbf{x}_t, d\mathbf{x}'_t]}{[\mathbf{n}_t, d\mathbf{x}_t, d\mathbf{x}'_t]} + \frac{[\bar{\mathbf{n}}_t, \|d\mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}_t), d\mathbf{x}'_t] + [\bar{\mathbf{n}}_t, d\mathbf{x}_t, \|d\mathbf{x}'_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}'_t)]}{[\mathbf{n}_t, d\mathbf{x}_t, d\mathbf{x}'_t]} \\ &\quad \text{(on rappelle que } \text{Tr} \mathbf{T} = \frac{[\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]} \quad \forall \mathbf{u}_1 \forall \mathbf{u}_2 \forall \mathbf{u}_3) \\ &= \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t) \cdot (d\mathbf{x}_t \wedge d\mathbf{x}'_t)}{ds_t} + \frac{[\bar{\mathbf{n}}_t, \|d\mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}_t), d\mathbf{x}'_t] + [\bar{\mathbf{n}}_t, d\mathbf{x}_t, \|d\mathbf{x}'_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}'_t)]}{ds_t} \\ &= \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t + \frac{[\bar{\mathbf{n}}_t, \|d\mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}_t), d\mathbf{x}'_t] + [\bar{\mathbf{n}}_t, d\mathbf{x}_t, \|d\mathbf{x}'_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}'_t)]}{ds_t} \\ &= \text{Tr} \mathbf{D} - \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t + \frac{[\bar{\mathbf{n}}_t, \|d\mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}_t), d\mathbf{x}'_t] + [\bar{\mathbf{n}}_t, d\mathbf{x}_t, \|d\mathbf{x}'_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}'_t)]}{ds_t} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Lorsque les deux particules voisines tendent vers P (chacune avec son propre chemin), $ds_t \rightarrow 0$ et le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{n}}_t$ tend vers une direction unitaire $\mathbf{n}_t$.

DÉFINITION : On appelle *taux de dilatation surfacique* d'une facette matérielle de normale unitaire actuelle $\mathbf{n}_t$ la limite de la dérivée temporelle logarithmique de l'aire ds_t quand $ds_t \rightarrow 0$:

$$d_s = \lim_{ds_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} ds_t}{ds_t} \quad (5.12)$$

1. Dans les égalités qui suivent, on utilise des propriétés de « dérivation par rapport à un tenseur » montrées dans *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 2.3.1

L'équation (5.11) montre que cette limite est :

$$d_s = \text{Tr} \mathbf{D} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \quad (5.13)$$

Point de vue lagrangien

La dilatation surfacique actuelle a été définie en (4.30) page 44 : $K_s = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|$. Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \frac{dK_s}{dt} &= (\det \mathbf{F})' \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| + \det \mathbf{F} \frac{d}{dt} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \\ &= \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| (\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}}) + \det \mathbf{F} \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \\ &= \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \text{Tr}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) + \det \mathbf{F} \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} \cdot (\mathbf{F}^{-T})' \cdot \mathbf{n}_0 \\ &= K_s \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \det \mathbf{F} \mathbf{n}_t \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{n}_0 \quad (\text{voir (4.31) page 44}) \\ \frac{\frac{d}{dt} K_s}{K_s} &= \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \frac{\det \mathbf{F}}{K_s} \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 \\ &= \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_t = \text{Tr} \mathbf{D} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \end{aligned}$$

La dérivée temporelle logarithmique de la dilatation surfacique entre les instants t_0 et t est donc :

$$\frac{\frac{d}{dt} K_s}{K_s} = \text{Tr} \mathbf{D} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t$$

La dérivée temporelle logarithmique de la dilatation surfacique actuelle est aussi le taux de dilatation surfacique actuel défini en (5.9) page 59 car :

$$d_s = \lim_{ds_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}(ds_t)}{ds_t} = \lim_{ds_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \frac{ds_t}{ds_0}}{\frac{ds_t}{ds_0}} = \frac{\frac{d}{dt} K_s}{K_s}$$

5.5 Vitesse de rotation d'une direction matérielle

Point de vue eulérien

On calcule maintenant la dérivée temporelle de la direction actuelle d'une direction matérielle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t &= \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}_t}{\|d\mathbf{x}_t\|} \right) = \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{d}{dt} d\mathbf{x}_t}{\|d\mathbf{x}_t\|} - d\mathbf{x}_t \frac{\frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}_t\|}{\|d\mathbf{x}_t\|^2} \right) = \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{v}_E(\mathbf{x}'_t, t) - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)}{\|d\mathbf{x}_t\|} - d\mathbf{x}_t \frac{\frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}_t\|}{\|d\mathbf{x}_t\|^2} \right) \\ &= \lim_{d\mathbf{x}_t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}_t + \|d\mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(d\mathbf{x}_t)}{\|d\mathbf{x}_t\|} - d\mathbf{x}_t \frac{\frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}_t\|}{\|d\mathbf{x}_t\|} \right) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t &= \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t d_l = (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} - d_l \mathbf{G}) \cdot \mathbf{u}_t \quad (5.14) \end{aligned}$$

REMARQUE : Le vecteur $\mathbf{u}_t$ est unitaire. Sa dérivée temporelle lui est donc perpendiculaire². On vérifie bien que :

$$\mathbf{u}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l = d_l - d_l = 0$$

2. Pour s'en convaincre, il suffit de dériver l'égalité $\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t = 1$.

Le vecteur vitesse de rotation de la direction matérielle de direction actuelle $\mathbf{u}_t$ est donc :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t} = \mathbf{u}_t \wedge \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \wedge (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t d_l) = \mathbf{u}_t \wedge \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t \quad (5.15)$$

REMARQUES : Le tenseur $\mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}$ est d'ordre 3 et est antisymétrique sur ses deux derniers indices. Le module de $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}$ est la vitesse angulaire (rd.s^{-1}) :

$$\|\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}\| = \sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l^2} \quad (5.16)$$

L'axe instantané de rotation est le vecteur unitaire : $\frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}}{\|\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}\|} = \frac{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l^2}}$

On constate que chaque direction matérielle issue de P a une vitesse de rotation différente (axe et module) ; on ne peut donc pas parler de « vitesse de rotation locale de la matière ». En particulier, il existe à chaque instant des directions matérielles issues de P dont la vitesse de rotation est nulle : ce sont celles qui sont actuellement confondues avec des directions propres de $\mathbf{grad}_E \mathbf{v}$. En effet, si $\mathbf{u}_t$ est une direction propre³ de $\mathbf{grad}_E \mathbf{v}$ de valeur propre associée k :

$$\|\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}\|^2 = \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_t - d_l^2 = \underbrace{(\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t)}_{k\mathbf{u}_t} \cdot \underbrace{(\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t)}_{k\mathbf{u}_t} - (\underbrace{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t}_{k\mathbf{u}_t})^2 = 0$$

Point de vue lagrangien

La direction actuelle d'une direction matérielle en fonction de sa direction de référence a été donnée en (4.3) page 35 : $\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}$. Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t &= \frac{\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \frac{\frac{d}{dt} \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} = \frac{\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} - \mathbf{u}_t \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|^2} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}_0 \\ &= \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t) = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l \mathbf{u}_t \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat donné en (5.14) page 61.

5.6 Taux de distorsion angulaire

Point de vue lagrangien

Le taux actuel de distorsion angulaire n'a de sens *a priori* que d'un point de vue lagrangien. En effet, la distorsion angulaire actuelle n'est définie que pour deux directions matérielles *initialement orthogonales* (voir (4.35) page 45). Sa valeur est :

$$\delta_a = \frac{1}{\sin \alpha_t} = \frac{1}{\|\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t\|} = \frac{K_l K'_l}{K_s} \in [1, \infty[$$

Le taux actuel de distorsion angulaire est donc :

$$\frac{\frac{d}{dt} \delta_a}{\delta_a} = \frac{\frac{d}{dt} K_l}{K_l} + \frac{\frac{d}{dt} K'_l}{K'_l} - \frac{\frac{d}{dt} K_s}{K_s} = d_l + d'_l - d_s = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \text{Tr} \mathbf{D} + \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \quad (5.17)$$

$$= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \text{Tr} \mathbf{D} + \frac{\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t}{\|\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t\|} \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t}{\|\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t\|} \quad (5.18)$$

3. Le tenseur $\mathbf{grad}_E \mathbf{v}$ est réel non symétrique en général, il a une ou trois valeurs propres réelles.

En partant de la définition $\delta_a = \frac{1}{\sin \alpha_t}$, il vient :

$$\frac{\frac{d}{dt} \delta_a}{\delta_a} = -\frac{\frac{d}{dt} \sin \alpha_t}{\sin \alpha_t} = -\frac{\frac{d}{dt} \alpha_t}{\tan \alpha_t} = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \text{Tr} \mathbf{D} + \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \quad (\text{d'après (5.17) page 62})$$

On en déduit la dérivée temporelle de l'angle actuel des directions matérielles initialement orthogonales :

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = \tan \alpha_t (\text{Tr} \mathbf{D} - \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t) \quad \text{où} \quad \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t}{\|\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t\|} \quad (5.19)$$

REMARQUE : Si les directions matérielles $\mathbf{u}_t$ et $\mathbf{u}'_t$ sont non seulement initialement orthogonales mais aussi actuellement orthogonales, alors le taux de distorsion angulaire est nul. En effet, dans ce cas, le trièdre $\{\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{n}_t\}$ est orthonormé, et donc :

$$\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t = \text{Tr} \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{d}{dt} \delta_a}{\delta_a} = 0 \quad (\text{d'après (5.17) page 62})$$

Toutefois, ce résultat ne permet pas de conclure sur la valeur actuelle de $\frac{d\alpha_t}{dt}$ lorsque les directions matérielles sont actuellement orthogonales. En effet, l'équation (5.19) conduit à une forme indéterminée $\infty \times 0$.

Point de vue eulérien

Sans parler de distorsion angulaire de deux directions initialement orthogonales, on peut néanmoins calculer la dérivée temporelle de l'angle actuel α_t de deux directions matérielles sans se soucier de savoir si elles étaient orthogonales à un quelconque instant de référence.

Soient deux directions matérielles sont les directions actuelles sont $\mathbf{u}_t$ et $\mathbf{u}'_t$. Leur angle actuel α_t est défini par $\cos \alpha_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}'_t$. La dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \alpha_t &= \mathbf{u}'_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}'_t = \mathbf{u}'_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t d_I) + \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{u}'_t d'_I) \quad (\text{voir (5.14) page 61}) \\ &= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t - (d_I + d'_I) \cos \alpha_t \\ - \sin \alpha_t \frac{d\alpha_t}{dt} &= 2 \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - (d_I + d'_I) \cos \alpha_t \\ \frac{d\alpha_t}{dt} &= -\frac{2 \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t}{\sin \alpha_t} + \frac{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t}{\tan \alpha_t} \end{aligned} \quad (5.20)$$

En particulier, pour deux directions matérielles *actuellement orthogonales* ($\alpha_t = \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}'_t = 0$), il reste :

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = -2 \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{sph} \mathbf{D} + \mathbf{dev} \mathbf{D}) \cdot \mathbf{u}'_t = -2 \frac{\text{Tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}'_t - 2 \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{dev} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t = -2 \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{dev} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t \quad (5.21)$$

REMARQUE : On peut montrer à la suite d'un calcul pénible⁴, que les deux évaluations de $\frac{d\alpha_t}{dt}$ données en (5.20) et en (5.19) sont égales quand $\alpha_t \neq \frac{\pi}{2}$. Ce résultat remarquable signifie que quand on observe la variation actuelle de l'angle de deux directions matérielles actuelles, on peut toujours supposer qu'il existe un instant où ces directions matérielles sont orthogonales et considérer une distorsion angulaire par rapport à cet instant.

5.7 Taux de distorsion stérique

Point de vue lagrangien

Tout comme le taux de distorsion angulaire, le taux de distorsion stérique n'a de sens *a priori* que d'un point de vue lagrangien. En effet, la distorsion stérique n'est définie que pour trois directions matérielles

4. Il vaut mieux s'aider d'un logiciel ce calcul formel.

initialement orthogonales (voir (4.25) page 43). Sa valeur est :

$$\delta_s = \frac{K_l K'_l K''_l}{K_v} = \frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} \in [1, \infty[$$

Le taux de distorsion stérique est :

$$\frac{d}{dt} \delta_s = \frac{\frac{d}{dt} K_l}{K_l} + \frac{\frac{d}{dt} K'_l}{K'_l} + \frac{\frac{d}{dt} K''_l}{K''_l} - \frac{\frac{d}{dt} K_v}{K_v} = d_l + d'_l + d''_l - d_v \quad (5.22)$$

$$= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t - \text{Tr} \mathbf{D} \quad (5.23)$$

En partant de la définition $\delta_s = \frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}$, on en déduit la dérivée temporelle du produit mixte actuel des trois directions matérielles initialement orthogonales :

$$\frac{\frac{d}{dt} \delta_s}{\delta_s} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}}{\frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}} = - \frac{\frac{d}{dt} |[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}$$

on a donc :

$$\frac{\frac{d}{dt} |[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} = \text{Tr} \mathbf{D} - \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t \quad (5.24)$$

REMARQUE : En particulier, si les trois directions matérielles sont non seulement initialement orthogonales mais aussi actuellement orthogonales, alors le taux de distorsion stérique est nul. En effet, le trièdre $\{\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t\}$ est orthonormé et

$$\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t = \text{Tr} \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \delta_s = 0 \quad (\text{d'après (5.23)})$$

Le taux de distorsion stérique de trois directions actuellement orthogonales est nul.

Point de vue eulérien

Sans parler de distorsion stérique de directions matérielles initialement orthogonales, on peut toujours calculer la dérivée temporelle du produit mixte de trois directions matérielles actuelles sans se soucier si elles étaient orthogonales à un quelconque instant de référence.

Soient trois directions matérielles de direction actuelles $\mathbf{u}_t$, $\mathbf{u}'_t$ et $\mathbf{u}''_t$. La dérivée temporelle de leur produit mixte est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] &= \left[\frac{d}{dt} \mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t \right] + [\mathbf{u}_t, \frac{d}{dt} \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] + [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \frac{d}{dt} \mathbf{u}''_t] \\ &= [\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l \mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] + [\mathbf{u}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t - d'_l \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] + [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}''_t - d''_l \mathbf{u}''_t] \\ &\quad (\text{voir (5.14) page 61}) \\ &= [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] \text{Tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] (d_l + d'_l + d''_l) \\ \frac{\frac{d}{dt} [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]}{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]} &= \text{Tr} \mathbf{D} - \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t \end{aligned} \quad (5.25)$$

REMARQUE : Il est remarquable de constater que ce résultat est identique à celui obtenu dans le point de vue lagrangien en (5.24), où les directions matérielles étaient initialement orthogonales. Quand on observe le produit mixte actuel de trois directions matérielles, on peut toujours supposer qu'il existe un instant où elles sont orthogonales et considérer la distorsion stérique par rapport à cet instant.

5.8 Tenseur tourbillon

DÉFINITION : On appelle tenseur tourbillon la partie antisymétrique du gradient eulérien du champ des vitesses actuelles :

$$\mathbf{W} = \text{antisym grad}_E \mathbf{v} \quad (5.26)$$

Le tenseur tourbillon étant antisymétrique, on peut lui associer son vecteur adjoint :

$$\mathbf{w} = \text{adj} \mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{H} : \mathbf{W} = -\frac{1}{2} \mathbf{W} : \mathbf{H} = -\frac{1}{2} \text{antisym grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{H} = -\frac{1}{2} \text{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{H} = \frac{1}{2} \text{rot}_E \mathbf{v}$$

DÉFINITIONS : Le vecteur $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot}_E \mathbf{v}$ est appelé vecteur tourbillon.

On appelle lignes tourbillons à l'instant t , les lignes de champ du champ des vecteurs tourbillons à l'instant t .

On appelle tube tourbillon à l'instant t , la surface engendrée par les lignes tourbillon à l'instant t s'appuyant sur une courbe fermée C_0 donnée.

REMARQUE : Le tenseur tourbillon $\mathbf{W} = \text{antisym grad}_E \mathbf{v}$ est parfois improprement appelé tenseur des « taux de rotation » ou des « vitesses de rotation ». Ces dénominations peuvent induire en erreur: le vecteur vitesse de rotation des directions matérielles a été donné en (5.15) page 62 : $\boldsymbol{\omega}_{u_t} = \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t$. Comme on peut le constater, la seule connaissance de $\mathbf{W}$ est insuffisante pour calculer la vitesse de rotation actuelle des directions matérielles.

5.9 Compatibilité des taux de déformation

Si l'on se donne *a priori* un champ de tenseurs symétriques comme champ de tenseurs des taux de déformation dans un milieu continu, il doit satisfaire à des équations de compatibilité⁵ pour qu'il soit la partie symétrique d'un gradient eulérien de vitesse. On peut les écrire de deux manières :

$$\text{rot}_E \text{rot}_E^T \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \text{sym grad}_E \text{div}_E \mathbf{D} - \text{grad}_E \text{grad}_E \text{Tr} \mathbf{D} - \Delta_E \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

La recherche des champs de vitesses solutions se fait en deux temps :

1. On cherche d'abord le champ des vecteurs tourbillon $\mathbf{w}_E$ solution des 9 équations aux dérivées partielles : $\text{grad}_E \mathbf{w} = -\text{rot}_E^T \mathbf{D}$.
Les solutions $\mathbf{w}_E$ sont définies à un champ $\mathbf{w}_0$ uniforme près, c'est-à-dire à un champ de vitesses à rotationnel uniforme près⁶. Contrairement aux conditions de compatibilité pour le tenseur des petites perturbations, il n'y aucune restriction sur $\|\mathbf{w}\|$.
2. On cherche ensuite le champ de vecteurs $\mathbf{v}_E$ solution des 9 équations aux dérivées partielles : $\text{grad}_E \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}_E = \mathbf{D} + \mathbf{W}$.
Les solutions sont à un champ de vitesses uniforme $\mathbf{v}_0$ près, c'est-à-dire à un champ de vitesses de translation de solide près.

5. Voir la démonstration dans *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 4.4

6. Ce n'est pas nécessairement un champ de vitesses de solide. Par exemple, le champ donné en coordonnées cartésiennes ortho-normées : $\mathbf{v} = 2x(y+z)\mathbf{e}_x + (z+x^2)\mathbf{e}_y + x^2\mathbf{e}_z$ a un rotationnel uniforme ($\text{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{e}_x$) mais n'est pas un champ de vitesses de solide : on vérifie aisément que le taux de dilatation linéique dans la direction $\mathbf{e}_x$ est $2(y+z) \neq 0$.

5.10 Changements d'observateur

5.10.1 Changement d'observateur du gradient eulérien des vitesses et des opérateurs dérivés

Gradient eulérien des vitesses

On a vu en (2.25) page 16 que pour tout observateur on a la relation $\mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$. En particulier, pour l'observateur $\mathcal{R}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} &= \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T)^{-1} & (\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T, \text{ voir (3.12) page 26}) \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^T + \mathbf{Q}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0^T \right) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_t^T & (\mathbf{Q}_0 \text{ est la valeur de } \mathbf{Q}_t \text{ pour } t = t_0) \\
 &= \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \mathbf{Q}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_t^T \\
 &= \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T & (\text{définition pour } \mathcal{R} \text{ de } \mathbf{grad}_E \mathbf{v}) \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

où le tenseur $\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T$ est antisymétrique et vaut $-\mathbf{H} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}}$ (voir (1.12) et (1.13) page 7). Cette formule n'est pas la formule de changement d'observateur des grandeurs tensorielles du second ordre objectives.

Le gradient eulérien du champ des vitesses est un champ de grandeurs tensorielles du second ordre non objectif.

Divergence eulérienne des vitesses

On déduit de (5.27) la formule de changement d'observateur de la divergence eulérienne du champ des vitesses :

$$\text{div}_E \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{G} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) : \mathbf{G}}_0 + (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T) : \mathbf{G} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{G} = \text{div}_E \mathbf{v} \quad (5.28)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire.

La divergence eulérienne du champ des vitesses est un champ scalaire objectif.

REMARQUE : Bien que le champ des vitesses soit non objectif, sa divergence eulérienne est objective.

Rotationnel eulérien des vitesses

On déduit de (5.27) la formule de changement d'observateur du rotationnel eulérien du champ des vitesses :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} &= -\mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{H} = -\left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) : \mathbf{H} - (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T) : \mathbf{H} \\
 &= -\mathbf{H} : \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) - \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{H}) \\
 &= -\mathbf{H} : \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{rot}_E \mathbf{v} \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

où $-\mathbf{H} : \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) = -2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}} = 2\mathbf{Q}_t \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}}$ (voir (1.12) et (1.13) page 7).

Le rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel non objectif.

Double gradient eulérien du champ des vitesses

Pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, la définition est :

$$\begin{aligned}
 \text{grad}_E \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= d(\text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}}) \\
 \text{grad}_E \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t &= d\left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T\right) + d(\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T) && \text{(d'après (5.27) page 66)} \\
 &= \mathbf{0} + \mathbf{Q}_t \cdot d(\text{grad}_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{Q}_t^T && (\mathbf{Q}_t \text{ est un champ uniforme}) \\
 &= \mathbf{Q}_t \cdot (\text{grad}_E \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{Q}_t^T && \text{(définition du double gradient pour } \mathcal{R} \text{)} \\
 &= (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \text{grad}_E \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}_t \\
 \text{grad}_E \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t &= (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \text{grad}_E \text{grad}_E \mathbf{v} \\
 \text{grad}_E \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} &= [(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \text{grad}_E \text{grad}_E \mathbf{v}] \cdot \mathbf{Q}_t^T \\
 \text{grad}_E \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} &= (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \boxtimes^3 \text{grad}_E \text{grad}_E \mathbf{v} && (5.30)
 \end{aligned}$$

Le double gradient eulérien du champ des vitesses est un champ tensoriel d'ordre 3 objectif.

REMARQUE : Bien que le gradient eulérien des vitesses ne soit pas objectif, son gradient eulérien (d'ordre 3) est objectif.

Laplacien eulérien du champ des vitesses

On déduit de (5.30) la formule de changement d'observateur du laplacien eulérien :

$$\Delta_E \tilde{\mathbf{v}} = \text{div}_E \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} = \text{grad}_E \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{G} = [(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \boxtimes^3 \text{grad}_E \text{grad}_E \mathbf{v}] : \mathbf{G} = \mathbf{Q}_t \cdot \Delta_E \mathbf{v} \quad (5.31)$$

Le laplacien eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel objectif.

REMARQUE : Bien que le champ des vitesses ne soit pas objectif, son laplacien eulérien est objectif.

Gradient eulérien du rotationnel eulérien du champ des vitesses

La définition du gradient du rotationnel pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
 \text{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= d(\text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}}) \\
 &= d\left(-\mathbf{H} : \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T\right) + \mathbf{Q}_t \cdot \text{rot}_E \mathbf{v}\right) && \text{(voir (5.29) page 66)} \\
 \text{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t &= \mathbf{0} + \mathbf{Q}_t \cdot d(\text{rot}_E \mathbf{v}) && (\mathbf{Q}_t \text{ est un champ uniforme}) \\
 &= \mathbf{Q}_t \cdot (\text{grad}_E \text{rot}_E \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x}_t \\
 \text{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot (\text{grad}_E \text{rot}_E \mathbf{v}) \\
 \text{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{Q}_t \cdot (\text{grad}_E \text{rot}_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{Q}_t^T && (5.32)
 \end{aligned}$$

Le gradient eulérien du rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ tensoriel du second ordre objectif.

REMARQUE : Bien que le rotationnel eulérien des vitesses ne soit pas objectif, son gradient eulérien est objectif.

Double rotationnel eulérien du champ des vitesses

En utilisant l'identité : $\underbrace{\Delta_E \mathbf{v}}_{\text{objectif}} = \underbrace{\text{grad}_E \text{div}_E \mathbf{v}}_{\text{objectif}} - \text{rot}_E \text{rot}_E \mathbf{v}$, on en déduit que :

Le double rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel objectif.

REMARQUE : Bien que le rotationnel eulérien des vitesses ne soit pas objectif, son rotationnel eulérien est objectif.

5.10.2 Changement d'observateur du tenseur des taux de déformation

La définition du tenseur des taux de déformation pour tout observateur est $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v}$ (voir (5.6) page 58) :

En utilisant (5.27), il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} &= \text{sym grad}_E \tilde{\mathbf{v}} = \text{sym} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) && \left(\frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \text{ est antisymétrique} \right) \\ &= \text{sym} (\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T) = \mathbf{Q}_t \cdot \text{sym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^T && \text{(propriété des rotations)} \end{aligned} \quad (5.33)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur des grandeurs tensorielles du second ordre objectives.

Le champ du tenseur des taux de déformation est un champ de grandeurs tensorielles du second ordre objectif.

Il s'ensuit que ses invariants⁷ et ses valeurs propres ordonnées sont des champs scalaires objectifs, et que les vecteurs propres unitaires (ou les tenseurs uniaxiaux associés) sont aussi des tenseurs objectifs (pour tous les observateurs, ils ont la même orientation par rapport à la position actuelle de la matière).

5.10.3 Changement d'observateur du tenseur tourbillon :

La définition du tenseur des taux de déformation pour tout observateur est $\mathbf{W} = \text{antisym grad}_E \mathbf{v}$ (voir (5.26) page 65). En particulier, pour l'observateur $\mathcal{R}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}} &= \text{antisym grad}_E \tilde{\mathbf{v}} = \text{antisym} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) && \text{(voir (5.27) page 66)} \\ &= \text{antisym} (\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T) + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T = \mathbf{Q}_t \cdot \text{antisym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \end{aligned} \quad (5.34)$$

ce qui n'est pas la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre.

Le champ tensoriel des tenseurs tourbillons est une grandeur tensorielle du second ordre non objective.

On en déduit la formule de changement d'observateur pour les vecteurs tourbillon $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}} &= \text{adj} \tilde{\mathbf{W}} = \text{adj} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) = \text{adj} (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^T) + \text{adj} \left(\frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{adj} \mathbf{W} + \text{adj} \left(\frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \right) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}} \quad \text{(voir (1.11) page 7)} \end{aligned}$$

ce qui n'est pas la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective⁸.

Le champ des vecteurs tourbillons est un champ de grandeurs vectorielles non objectives.

REMARQUE : En mécanique des fluides, on considère des écoulements particuliers dits irrotationnels ($\text{rot}_E \mathbf{v} = \mathbf{0}$). La formule ci-dessus montre que si un écoulement est irrotationnel pour un observateur, il n'est pas irrotationnel pour un autre. L'irrotationnalité d'un écoulement n'est donc pas une caractéristique universelle de l'écoulement. Si $\text{rot}_E \mathbf{v}$ est nul pour un observateur, il est non nul mais *uniforme* pour les autres. Le gradient eulérien du rotationnel eulérien étant un champ tensoriel d'ordre 2 objectif (voir (5.32) page 67), il pourrait servir à une définition universelle de « vorticité ».

7. notamment, l'objectivité de $\text{Tr} \mathbf{D}$ a été démontrée en (5.28).

8. Ce résultat a déjà été montré en (5.29) page 66.

5.10.4 Changement d'observateur du taux de dilatation linéique

La définition du taux de dilatation linéique pour les deux observateurs est donnée en (5.7) page 58 :

$$d_l = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t \quad \text{et} \quad \tilde{d}_l = \tilde{\mathbf{u}}_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t$$

En utilisant la formule de changement d'observateur du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ (voir (5.33) page 68), on trouve que le taux de dilatation linéique d'une direction matérielle actuelle pour un observateur $\mathcal{R}$ est :

$$\tilde{d}_l = \tilde{\mathbf{u}}_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^T) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t = d_l \quad (5.35)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

Le taux de dilatation linéique actuel dans une direction matérielle est une grandeur scalaire objective.

5.10.5 Changement d'observateur de la vitesse de rotation d'une direction matérielle

La dérivée temporelle de la direction actuelle d'une direction matérielle a été établie en (5.14) page 61 : $\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l \mathbf{u}_t$. Pour un observateur $\mathcal{R}$ elle est :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_t}{dt} &= \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t - \tilde{d}_l \tilde{\mathbf{u}}_t = [\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^T] \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t - d_l \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \quad (\text{voir (5.27) page 66 et (5.35)}) \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot [\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l \cdot \mathbf{u}_t] + \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \neq \mathbf{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} \end{aligned}$$

La dérivée temporelle de la direction actuelle d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective.

La définition de la vitesse de rotation de cette direction actuelle est $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_t \wedge \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}$ (voir (5.15) page 62). Pour un observateur $\mathcal{R}$ elle est :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{u}}_t \wedge \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_t}{dt} = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \wedge (\mathbf{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \wedge \left(\mathbf{Q}_t \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \right) \\ &= \underbrace{(\det \mathbf{Q})}_1 \mathbf{Q}_t \cdot \left(\mathbf{u}_t \wedge \left(\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \right) = \mathbf{Q}_t \cdot \left(\mathbf{u}_t \wedge \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} \right) + \mathbf{Q}_t \cdot \left(\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{Q}_t^T \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \neq \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

La vitesse de rotation actuelle d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective.

5.10.6 Changement d'observateur du taux de dilatation volumique

La définition universelle du taux de dilatation volumique est (voir (5.9) page 59) : $d_v = \text{Tr} \mathbf{D}$. On vérifie aisément, en utilisant (5.33) page 68, que : $\tilde{d}_v = d_v$.

Le taux de dilatation volumique actuel est un champ de grandeurs scalaires objectif.

5.10.7 Changement d'observateur du taux de dilatation surfacique

La définition universelle du taux de dilatation surfacique actuel d'une facette matérielle est (voir (5.12) page 60) : $d_s = d_v - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t$. Pour un observateur $\mathcal{R}$ il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{d}_s &= \tilde{d}_v - \tilde{\mathbf{n}}_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t = d_v - (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^T) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t) \quad (\text{voir (4.51) page 52 et (5.33) page 68}) \\ &= d_v - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t = d_s \end{aligned}$$

Le taux de dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle est une grandeur scalaire objective.

5.10.8 Changement d'observateur du taux de distorsion angulaire

Le taux de distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales a été défini en (5.17) page 62 :

$$\frac{\frac{d}{dt}\delta_a}{\delta_a} = d_l + d_l' - d_s$$

Étant la somme de grandeurs scalaires objectives, on en déduit que :

Le taux actuel de distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

REMARQUE : La dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles a été calculé en (5.20) page 63 :

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = -\frac{2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t'}{\sin \alpha_t} + \frac{d_l + d_l'}{\tan \alpha_t}$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{\alpha}_t = \alpha_t \Rightarrow \frac{d\tilde{\alpha}_t}{dt} = \frac{d\alpha_t}{dt}$.

La dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles est une grandeur scalaire objective.

5.10.9 Changement d'observateur du taux de distorsion stérique

Le taux de distorsion stérique a été défini en (5.22) page 64 : $\frac{\frac{d}{dt}\delta_s}{\delta_s} = d_l + d_l' + d_l'' - d_v$. C'est une somme de scalaires objectifs.

Le taux de distorsion stérique actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

5.11 En bref...

Le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v}$ est un tenseur du second ordre objectif qui permet de calculer le taux de dilatation linéique actuel d'une direction matérielle, le taux de dilatation surfacique actuel d'une facette matérielle, le taux de distorsion angulaire actuel, le taux de dilatation volumique actuel et le taux de distorsion stérique actuel en une particule de milieu continu en mouvement. Toutes ces grandeurs scalaires sont objectives.

En revanche, la vitesse de rotation d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective. De même, le tenseur tourbillon $\mathbf{W} = \text{antisym grad}_E \mathbf{v}$ et son vecteur adjoint le vecteur tourbillon $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot}_E \mathbf{v}$ sont des grandeurs non objectives.

Bien que le champ des vitesses ne soit pas objectif, certains opérateurs différentiels eulériens appliqués à ce champ conduisent à des champs objectifs.

Chapitre 6

Conclusion

La cinématique des milieux continus permet d'analyser les mouvements d'un milieu continu par rapport à un observateur.

Elle a permis de définir un certain nombre de concepts dont on a pu analyser les changements quand on change d'observateur. Les grandeurs vectorielles ou tensorielles objectives sont celles pour lesquelles la valeur actuelle du vecteur ou du tenseur a la même disposition par rapport à la position actuelle de la matière pour tous les observateurs. Pour les grandeurs scalaires (tenseurs d'ordre 0), la question de l'orientation par rapport à la matière ne se pose pas : l'objectivité se réduit à l'égalité de la valeur scalaire pour tous les observateurs.

Le vecteur position actuelle, le vecteur vitesse actuelle, le vecteur accélération actuelle ne sont pas des champs vectoriels objectifs. Il s'ensuit que les trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission sont des courbes différentes d'un observateur à l'autre.

L'analyse des déformations entre un instant de référence et l'instant actuel, qui n'intéresse *a priori* que les mécaniciens des solides déformables, a permis de définir des tenseurs de déformations (lagrangiens ou eulériens) permettant de calculer (chacun avec des formules différentes) en une particule : les dilatations linéiques, les dilatations surfaciques, les distorsions angulaires de deux directions matérielles initialement orthogonales (et leur maximum), la dilatation volumique et les distorsions stériques de trois directions matérielles initialement orthogonales (et leur maximum). Bien que seuls les tenseurs de déformation eulériens soient objectifs, les différentes dilatations et distorsions sont des grandeurs scalaires objectives. Il mettent aussi en évidence l'existence à chaque instant de directions matérielles principales actuelles.

L'analyse des vitesses de déformation a permis de définir un tenseur des taux de déformation objectif qui permet d'évaluer en une particule : les taux de dilatation linéique, les taux de dilatation surfacique, les taux de distorsion angulaire, le taux de dilatation sphérique et les taux de distorsion stérique, qui sont tous des grandeurs scalaires objectives (le mot « taux » signifiant ici : dérivée temporelle logarithmique).

La cinématique ne fait que décrire les mouvements sans se préoccuper des causes de ce mouvement. La relation entre le mouvement et les sollicitations extérieures qui le provoquent est l'objet du cours suivant : *Équations générales des milieux continus*, du même auteur.

Annexe A

Distorsions maximales

A.1 Distorsion angulaire maximale

Soit $\mathbf{U}$ le tenseur de déformation actuel¹ en une particule. Le tenseur de déformation $\mathbf{U}$ étant symétrique, on peut toujours écrire :

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

où les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ sont les dilatations linéiques principales de cette déformation et où les trois vecteurs $\{\mathbf{u}_i\}$ sont une base propre orthonormée directe du tenseur $\mathbf{U}$.

Soit un couple de deux directions matérielles *initialement orthogonales* $\{\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}\}$. La distorsion angulaire actuelle de ce couple de directions matérielles a été définie en (4.35) page 45 :

$$\delta_a = \frac{K_l^{(1)} K_l^{(2)}}{K_s} \in [1, \infty[$$

Chaque couple de directions matérielles initialement orthogonales a sa propre distorsion angulaire, car les dilatations linéiques $K_l^{(1)}$ et $K_l^{(2)}$ dépendent des directions matérielles et la dilatation surfacique K_s dépend de la normale unitaire au plan des deux directions matérielles :

$$K_l^{(1)} = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)}\| \qquad K_l^{(2)} = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0^{(2)}\| \qquad \text{(voir (4.12) page 37)}$$

$$K_s = \det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot (\mathbf{u}_0^{(1)} \wedge \mathbf{u}_0^{(2)})\| \qquad \text{(voir (4.33) page 45)}$$

On se propose de rechercher quelle est la valeur maximale de la distorsion angulaire dans cette déformation sur l'ensemble des couples de directions matérielles initialement orthogonales, et accessoirement pour quels couples de directions matérielles on atteint cette distorsion angulaire maximale.

Pour envisager tous les couples de vecteurs orthogonaux $\{\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}\}$, on pose :

$$\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{u}_0^{(2)} = \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2$$

où $\mathbf{Q}(\mu)$ est une rotation, fonction quelconque d'un paramètre μ et où $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont les deux premiers vecteurs de base de la base propre orthonormée de $\mathbf{U}$. Les propriétés des tenseurs orthogonaux garantissent que $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont orthogonaux quelle que soit la rotation $\mathbf{Q}$.

1. On choisit d'utiliser ici le tenseur de déformation $\mathbf{U}$ car il donne lieu à des écritures un peu plus simples. On verra dans la suite que c'est sans importance, car les résultats sont des fonction des valeurs propres λ_i qui sont les dilatations linéiques principales, communes à tous les tenseurs de déformation.

La distorsion angulaire du couple de vecteurs $(\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)})$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta_a &= \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot (\mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2)\|} = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2)\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_3\|}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Comme on peut le constater, la distorsion angulaire couple de vecteurs $(\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)})$ dépend de la rotation $\mathbf{Q}(\mu)$.

A.1.1 Recherche de la distorsion angulaire maximale

Pour rechercher les distorsions angulaires extrêmes, il suffit d'annuler la dérivée $\frac{d}{d\mu} \delta_a$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu} \delta_a &= \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\|} + \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|} - \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_3\|}{\|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_3\|} \\ &= \frac{(\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{U} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1)}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|^2} + \frac{(\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{U} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2)}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|^2} - \frac{(\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3) \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3)}{\|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|^2} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|^2} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|^2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|^2} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u}_3}\end{aligned}$$

où on a posé dans la dernière ligne :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}^T}(\mathbf{U}^2) && \text{symétrique défini positif} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{Q}^T \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} && \text{antisymétrique quelle que soit la fonction } \mathbf{Q}(\mu)\end{aligned}$$

Lorsque la rotation $\mathbf{Q}(\mu)$ varie, le tenseur antisymétrique $\mathbf{A}$ prend une valeur quelconque².

La distorsion angulaire δ_a est donc extrême quand :

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u}_3} = 0 \quad \forall \mathbf{A} \text{ antisymétrique} \quad (\text{A.2})$$

Posons $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j$ avec $T_{ij} = T_{ji}$ (composantes de $\mathbf{T}$ sur la base propre orthonormée $\{\mathbf{u}_i\}$ de $\mathbf{U}$) et $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$ avec $\mathbf{a} = a_i \mathbf{u}_i$ (tenseur antisymétrique quelconque)

L'équation scalaire (A.2) s'écrit alors³ :

$$\frac{a_3 T_{12} (T_{11} - T_{22})}{T_{11} T_{22}} + \frac{a_2 T_{12} (T_{11} T_{23} - T_{12} T_{13})}{T_{11} (T_{11} T_{22} - T_{12}^2)} - \frac{a_1 T_{12} (T_{13} T_{22} - T_{12} T_{23})}{T_{22} (T_{11} T_{22} - T_{12}^2)} = 0 \quad \forall a_1 \forall a_2 \forall a_3$$

2. Si μ était considéré comme un temps, son vecteur adjoint serait le vecteur vitesse de rotation du trièdre orthonormé $\{\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}, \mathbf{u}_0^{(3)}\}$ par rapport au trièdre orthonormé $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

3. Pour l'écrire, il vaut mieux s'aider d'un logiciel de calcul formel.

La résolution de ces trois équations à 6 inconnues T_{ij} impliquent que la matrice des composantes de $\mathbf{T}$ dans la base propre de $\mathbf{U}$ sont de l'une des deux formes suivantes :

$$[M_1] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad [M_2] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

On calcule les distorsions extrémales dans ces deux cas.

Cas $[M_1]$

La distorsion angulaire des deux directions initialement orthogonales $\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_0^{(2)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2$ est (voir (A.1) page 74):

$$\delta_a = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|} \Rightarrow \delta_a^2 = \frac{T_{11} T_{22}}{\det(M_1) (M_1^{-1})_{33}} = 1$$

Il n'y a donc pas de distorsion angulaire (les deux directions $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ restent orthogonales après déformation). Cet extremum est donc un minimum.

Cas $[M_2]$

Les valeurs propres de $\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q}$, c'est-à-dire celles de $[M_2]$, sont : $(T_{11} + T_{12}, T_{11} - T_{12}, T_{33})$. Les valeurs propres de $\mathbf{U}^2$ sont : $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$. Les propriétés des rotations impliquent que les valeurs propres de $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}$ sont les mêmes, mais dans un ordre éventuellement différent :

$$T_{11} + T_{12} = \lambda_i^2 \quad T_{11} - T_{12} = \lambda_j^2 \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3).$$

ce qui entraîne :

$$T_{11} = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2} \quad T_{12} = \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{2}$$

Les extrema de la distorsion angulaire des deux directions orthogonales $\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_0^{(2)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2$ sont donc (voir (A.1) page 74):

$$\delta_a = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|} \Rightarrow \delta_a^2 = \frac{T_{11} T_{22}}{\det(M_2) (M_2^{-1})_{33}} = \frac{T_{11}^2}{(T_{11} + T_{12})(T_{11} - T_{12})} = \frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)^2}{4\lambda_i^2 \lambda_j^2}$$

Les distorsions extrémales sont donc :

$$\delta_a = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2\lambda_i \lambda_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3).$$

Le tenseur de déformation $\mathbf{U}$ étant symétrique défini positif, on a $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j > 0$. On vérifie aisément que si les valeurs propres sont distinctes, alors $\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) > 1$. Ces extrema sont donc des maximums relatifs de distorsion angulaire.

Les trois distorsions angulaires maximales sont :

$$\delta_{a3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad \delta_{a1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) \quad \delta_{a2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)$$

Si on pose $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ on vérifie aisément que la distorsion angulaire maximale est celle calculée avec les valeurs propres extrêmes :

$$\delta_{a \max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \quad (\text{A.3})$$

La distorsion angulaire maximale d'une déformation est une fonction des dilatations linéiques principales. Elle peut être évaluée avec n'importe quel tenseur de déformation lagrangien ou eulérien.

A.1.2 Recherche des couples de directions de distorsion angulaire maximale

On peut préciser quelles sont les rotations $\mathbf{Q}$ qui définissent les $\mathbf{u}_0^{(i)}$ de distorsion angulaire extrême.

Les composantes dans la base $\{\mathbf{u}_i\}$ des vecteurs propres unitaires de $\mathbf{T}$ sont (par exemple) :

$$\mathbf{t}_{\lambda_i} = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{t}_{\lambda_j} = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{t}_{\lambda_k} = \mathbf{u}_3$$

Les propriétés des rotations impliquent qu'elles sont aussi $\mathbf{t}_{\lambda_k} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{u}_k$, on a donc :

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{t}_{\lambda_k} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{u}_k = Q_{jk}^T$$

Les composantes⁴ de $\mathbf{Q}$ dans la base orthonormée $\{\mathbf{u}_i\}$ sont donc : $Q_{kj} = Q_{jk}^T = \mathbf{t}_{\lambda_k} \cdot \mathbf{u}_j$ Pour toutes les permutations de (i, j, k) , on obtient les six matrices suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q^{(123)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(231)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(312)}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(132)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{Q^{(213)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(321)}} \end{array}$$

Ces six rotations s'interprètent géométriquement de la manière suivante :

(on pose $\theta_1 = \arccos(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4})$ et $\theta_2 = \arccos(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})$) :

- $\mathbf{Q}^{(123)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de $-\mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$;
- $\mathbf{Q}^{(231)}$ est une rotation d'angle θ_1 autour de $(1 - \sqrt{2})\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$;
- $\mathbf{Q}^{(312)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $\mathbf{u}_1 + (1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$;
- $\mathbf{Q}^{(132)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $(1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$;
- $\mathbf{Q}^{(213)}$ est une rotation d'angle π autour de $(-1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$;
- $\mathbf{Q}^{(321)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $\mathbf{u}_1 - (1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

Les rotations $\mathbf{Q}$ qui définissent les vecteurs initialement orthogonaux $\mathbf{u}_0^{(i)}$ conduisant à la distorsion angulaire maximale sont les deux rotations $\mathbf{Q}^{(231)}$ ou $\mathbf{Q}^{(132)}$ et les directions de distorsion angulaire maximale sont les bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$.

4. La variance est sans importance dans une base orthonormée.

A.2 Distorsion stérique maximale

La distorsion stérique de trois directions initialement orthogonales a été définie en (4.25) page 43 :

$$\delta_s = \frac{K_l^{(1)} K_l^{(2)} K_l^{(3)}}{K_v} \in [1, \infty[$$

Chaque triplet de directions matérielles initialement orthogonales a sa propre distorsion stérique car les trois dilatations linéiques $K_l^{(1)}$, $K_l^{(2)}$ et $K_l^{(3)}$ dépendent de l'orientation de référence des directions matérielles. En revanche, la dilatation volumique K_v n'en dépend pas (voir (4.24) page 42). La recherche de la distorsion stérique maximale en une particule revient donc à rechercher la valeur maximale du produit $K_l^{(1)} K_l^{(2)} K_l^{(3)}$.

Comme dans la section précédente, on utilise le tenseur $\mathbf{U}$ pour évaluer les trois dilatations linéiques, et on utilise une rotation $\mathbf{Q}(\mu)$ quelconque pour engendrer tous les triplets de directions matérielles initialement orthogonales à partir d'une base orthonormée de vecteurs propres du tenseur de déformation $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{u}_0^{(i)} = \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_i$$

La distorsion stérique est alors :

$$\delta_s = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|}{\det \mathbf{U}}$$

A.2.1 Recherche de la distorsion stérique maximale

Pour rechercher la distorsion stérique maximale, il suffit d'annuler la dérivée $\frac{d}{d\mu} \delta_s$.

$$\frac{\frac{d}{d\mu} \delta_s}{\delta_s} = \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|} + \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|} + \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|}$$

Avec des calculs similaires à la section précédente, on obtient :

$$\frac{\frac{d}{d\mu} \delta_s}{\delta_s} = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} + \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3}$$

où on a posé :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}^T}(\mathbf{U}^2) \quad \text{symétrique défini positif}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \quad \text{antisymétrique quelle que soit la fonction } \mathbf{Q}(\mu)$$

Lorsque la rotation $\mathbf{Q}(\mu)$ varie, le tenseur antisymétrique $\mathbf{A}$ prend une valeur quelconque.

La distorsion stérique δ_s est donc extrême quand :

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} + \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3} = 0 \quad \forall \mathbf{A} \text{ antisymétrique} \quad (\text{A.4})$$

En écrivant les composantes de $\mathbf{T}$ et de $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$ sur la base propre orthonormée de $\mathbf{U}$, il vient :

$$\frac{a_3 T_{12} (T_{11} - T_{22})}{T_{11} T_{22}} + \frac{a_2 T_{13} (T_{33} - T_{11})}{T_{33} T_{11}} + \frac{a_1 T_{23} (T_{22} - T_{33})}{T_{22} T_{33}} = 0 \quad \forall a_1 \forall a_2 \forall a_3$$

où les termes diagonaux T_{11} , T_{22} et T_{33} sont respectivement les carrés des dilatations linéiques dans les directions $\mathbf{u}_0^{(1)}$, $\mathbf{u}_0^{(2)}$ et $\mathbf{u}_0^{(3)}$. Ils ne sont donc jamais nuls.

La solution de ce système de trois équations à six inconnues implique que la matrice des composantes de $\mathbf{T}$ dans la base propre orthonormée de $\mathbf{U}$ a l'une des cinq formes suivantes :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}}_{\text{cas n}^\circ 1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x & T_{12} & 0 \\ T_{12} & x & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & 0 \\ T_{13} & 0 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x & T_{23} \\ 0 & T_{23} & x \end{bmatrix}}_{\text{cas n}^\circ 2, 3, 4}, \underbrace{\begin{bmatrix} x & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & x & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & x \end{bmatrix}}_{\text{cas n}^\circ 5}$$

Cas numéro 1 :

Les tenseurs $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}$ ont même base propre. On a donc

$$T_{11} = \lambda_i^2 \quad T_{22} = \lambda_j^2 \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3)$$

La distorsion stérique pour cet extremum est alors :

$$\delta_s = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_k}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = 1$$

Cet extremum est donc un minimum de la distorsion stérique.

Cas numéros 2, 3 et 4

Ces trois cas sont similaires : le tenseur $\mathbf{T}$ a une direction propre commune avec $\mathbf{U}^2$.

Par exemple, pour la matrice numéro 2, les valeurs propres de $\mathbf{T}$ sont aussi celles de $\mathbf{U}^2$:

$$x + T_{12} = \lambda_i^2 \quad x - T_{12} = \lambda_j^2 \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3)$$

ce qui implique : $x = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2}$.

La distorsion stérique pour cet extremum est donc :

$$\delta_s^2 = \frac{x^2 T_{33}}{K_v^2} = \frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)^2 \lambda_k^2}{4 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2} \Rightarrow \delta_s = \frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \lambda_k}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

Pour toutes les permutations de (i, j, k) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_{s3} &= \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = \delta_{a3} > 1 \\ \delta_{s2} &= \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \lambda_2}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) = \delta_{a2} > 1 \\ \delta_{s1} &= \frac{(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \lambda_1}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) = \delta_{a1} > 1 \end{aligned}$$

Pour les matrices n° 2 et 3, les calculs sont semblables et conduisent aux mêmes maximums relatifs.

D'autre part, on sait de la démonstration précédente que δ_{a2} est la plus grande distorsion angulaire. δ_{s2} est donc la plus grande distorsion stérique.

REMARQUE : Il n'est pas étonnant de retrouver que les extrema relatifs de la distorsion stérique trouvés ici soient aussi des extrema de la distorsion angulaire : les extrema de la distorsion angulaire sont obtenus quand les directions $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont les bissectrices des plans $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ (voir A.1.2 page 76). La troisième direction $\mathbf{u}_0^{(3)}$ est donc la direction propre $\mathbf{u}_k$.

Cas numéro 5

Dans ce dernier cas, le tenseur $\mathbf{T}$ et le tenseur $\mathbf{U}^2$ n'ont aucune direction propre commune. En revanche, les $K^{(i)} = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0^{(i)}\| = \sqrt{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_i} = \sqrt{x}$ sont égaux. On a donc $K^{(1)} K^{(2)} K^{(3)} = x^{\frac{3}{2}}$.

D'autre part, les propriétés des rotations impliquent que $\text{Tr} \mathbf{T} = \text{Tr}(\mathbf{U}^2)$, ce qui implique : $x = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3}$.

La distorsion stérique de cet extremum est donc :

$$\delta_{s4} = \frac{K^{(1)} K^{(2)} K^{(3)}}{K_v} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{K_v} = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{3 \sqrt{3} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

Conclusion

Si on pose $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, on peut prouver⁵ que $\delta_{s4} \geq \delta_{s2}$. La distorsion stérique maximale est donc :

$$\delta_{s \max} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (\text{A.5})$$

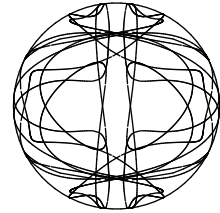
La distorsion maximale d'une déformation est une fonction des dilatations linéiques principales. Elle peut être évaluée avec n'importe quel tenseur de déformation lagrangien ou eulérien.

A.2.2 Recherche des trièdres des directions de distorsion stérique maximale

Il existe une infinité de rotations $\mathbf{Q}$ définissant les $\mathbf{u}_0^{(i)}$ et conduisant à la distorsion stérique maximale⁶. On laisse le soin au lecteur de vérifier⁷ qu'une des solutions est le tenseur $\mathbf{Q}$ dont les composantes dans la base propre orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sont :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{\frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & -\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2}{3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} \end{bmatrix}$$

Pour illustrer l'existence d'une infinité de rotations qui conduisent à la distorsion stérique maximale, la figure ci-contre montre, sur une demi-sphère unité, la trace des axes des rotations $\mathbf{Q}$ conduisant à des trièdres $\{\mathbf{u}_0^{(i)}\}$ de distorsion stérique maximale (cette figure est calculée avec $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0.75$). À chaque axe de rotation est associé un certain angle de rotation compris entre 0 et π .



5. Il vaut mieux s'aider d'un logiciel de calcul formel, en montrant que $\delta_{s4}^2 - \delta_{s2}^2 \geq 0$

6. En interprétant les composantes de $\mathbf{Q}$ dans la base $\{\mathbf{u}_i\}$ comme une matrice de changement de base entre deux bases orthonormées, on en déduit un corollaire : pour tout tenseur symétrique, il existe une infinité de bases orthonormées dans laquelle la matrice des composantes a ses termes diagonaux égaux.

7. Il est préférable de s'aider d'un logiciel de calcul formel.

Annexe B

Dérivées particulières utiles

B.1 Rappels

Les dérivées particulières des tenseurs de déformation (lagrangiens ou eulériens) ont des relations avec le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$. Comme on va le voir, ces relations ne sont pas triviales. En mécanique des milieux continus, on aura surtout besoin de la dérivée particulière des invariants (scalaires) des tenseurs de déformation¹.

Dans cette section, on ne donne que les dérivées particulières des trois invariants fondamentaux (S_I, S_{II}, S_{III}) (c'est-à-dire les coefficients du polynôme caractéristique d'un tenseur de déformation symétrique $\mathbf{S}$). S'il plait au lecteur d'utiliser (notamment pour des raisons d'interprétation physique des invariants) un autre triplet d'invariants définis par² :

$$\{S^{(1)} = f^{(1)}(S_I, S_{II}, S_{III}), S^{(2)} = f^{(2)}(S_I, S_{II}, S_{III}), S^{(3)} = f^{(3)}(S_I, S_{II}, S_{III})\}$$

il lui sera facile de trouver ses dérivées particulières par les formules :

$$\begin{aligned}\dot{S}^{(1)} &= \partial_1 f^{(1)} \dot{S}_I + \partial_2 f^{(1)} \dot{S}_{II} + \partial_3 f^{(1)} \dot{S}_{III} \\ \dot{S}^{(2)} &= \partial_1 f^{(2)} \dot{S}_I + \partial_2 f^{(2)} \dot{S}_{II} + \partial_3 f^{(2)} \dot{S}_{III} \\ \dot{S}^{(3)} &= \partial_1 f^{(3)} \dot{S}_I + \partial_2 f^{(3)} \dot{S}_{II} + \partial_3 f^{(3)} \dot{S}_{III}\end{aligned}$$

Par ailleurs, on rappelle ici un résultat d'algèbre tensorielle³ ; pour tout tenseur symétrique $\mathbf{S}$, les dérivées particulières des invariants fondamentaux s'écrivent :

$$\dot{S}_I = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{S}} \tag{B.1}$$

$$\dot{S}_{II} = (S_I \mathbf{G} - \mathbf{S}) : \dot{\mathbf{S}} \tag{B.2}$$

$$\dot{S}_{III} = (S_{II} \mathbf{G} - S_I \mathbf{S} + \mathbf{S}^2) : \dot{\mathbf{S}} = S_{III} \mathbf{S}^{-1} : \dot{\mathbf{S}} \quad (\text{si } \mathbf{S}^{-1} \text{ existe}) \tag{B.3}$$

Comme on peut le constater, il suffit de savoir évaluer les produits scalaires $\mathbf{S}^n : \dot{\mathbf{S}}$.

Enfin, on rappelle que les tenseurs de déformation eulériens $\mathbf{B}, \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{nV}$, leurs puissances, leur exponentielle et leur logarithme⁴ ont des directions propres communes, les produits contractés simples de deux d'entre eux sont donc commutatifs.

1. Voir le cours *Équations générales de la mécanique des milieux continus*, du même auteur, section 4.1.2

2. Il faut que la jacobien de la transformation $\{S_I, S_{II}, S_{III}\} \leftrightarrow \{S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}\}$ soit régulier.

3. Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur, section 2.3.1.

4. Il n'est défini que pour les tenseurs symétriques définis positifs.

B.2 Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{B}$

Sa définition est : $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$. Sa dérivée particulière est donc :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T = (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W})^T \\ \dot{\mathbf{B}} &= (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

où $\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$.

REMARQUE : Bien que le tenseur de déformation eulérien soit un tenseur objectif, le lecteur vérifiera aisément que sa dérivée particulière $\dot{\mathbf{B}}$ ne l'est pas (voir 3.6.4 page 31), notamment en raison de la présence du tenseur non objectif $\mathbf{W}$ ⁵.

Avec un peu de calcul algébrique⁶, on montre aisément que $\mathbf{B}^n : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B}^{n+1} : \mathbf{D}$, et donc en particulier que :

$$\mathbf{G} : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad \mathbf{B} : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B}^2 : \mathbf{D} \quad \mathbf{B}^2 : \dot{\mathbf{B}} = 2(\mathbf{B}_{III} \mathbf{G} - \mathbf{B}_{II} \mathbf{B} + \mathbf{B}_I \mathbf{B}^2) : \mathbf{D}$$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3) page 81, on en déduit les dérivées particulières des invariants fondamentaux du tenseur de déformation $\mathbf{B}$ en fonction de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$:

$$\dot{B}_I = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{B}_{II} = (\mathbf{B}_I \mathbf{G} - \mathbf{B}) : \dot{\mathbf{B}} = 2(\mathbf{B}_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{B}_{III} = (\mathbf{B}_{II} \mathbf{G} - \mathbf{B}_I \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B}_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (\text{B.7})$$

MÉTHODE ALTERNATIVE : Il est possible d'obtenir ces résultats sans algèbre tensorielle, en écrivant les composantes de $\mathbf{B}$ dans une base propre orthonormée eulérienne $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Par exemple, on obtient (B.5) de la manière suivante :

$$\dot{B}_I = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \cdot = 2 \left(\lambda_1^2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \lambda_3^2 \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \right) \quad \text{où } \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}_i = d_{II} \quad (\text{voir (5.7) page 58})$$

On obtient le résultat en remarquant que :

$$2 \left(\lambda_1^2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \lambda_3^2 \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \right) = 2 \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \end{bmatrix}^T \right) = 2\mathbf{B} : \mathbf{D}$$

On laisse le soin au lecteur de faire de même pour les autres dérivées particulières d'invariants.

B.3 Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$

De l'équation (B.4) page 82, il vient :

$$\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \quad (\text{B.8})$$

REMARQUE : La dérivée particulière $\dot{\mathbf{V}}$ est solution de cette équation tensorielle⁷, mais il n'est pas nécessaire de la résoudre pour calculer les dérivées particulières des invariants.

5. Sa formule de changement d'observateur est : $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t$ (voir (5.34) page 68)

6. On utilise les propriétés du « produit mixte » des tenseurs du second ordre : $\mathbf{A} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{C}$. Dans la dernière égalité, on utilise l'identité de Cayley-Hamilton : $\mathbf{T}^3 - T_I \mathbf{T}^2 + T_{II} \mathbf{T} - T_{III} \mathbf{G} = \mathbf{0}$.

7. La solution est $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{sym}(\mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})) + \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A}$, où $\mathbf{A}$ est le tenseur antisymétrique $\mathbf{A} = -\mathbf{H} \cdot ((\mathbf{H} : (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{H}))^{-1} \cdot (\mathbf{H} : (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{sym}(\mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}))))).$

Avec un peu de calcul algébrique⁸, on déduit de (B.8) que $\mathbf{V}^{n+1} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^{n+2} : \mathbf{D}$, et donc en particulier⁹ pour $n = -1$, $n = 0$ et $n = 1$:

$$\mathbf{G} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V} : \mathbf{D} \quad \mathbf{V} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^2 : \mathbf{D} \quad \mathbf{V}^2 : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^3 : \mathbf{D} = (\mathbf{V}_I \mathbf{V}^2 - \mathbf{V}_{II} \mathbf{V} + \mathbf{V}_{III} \mathbf{G}) : \mathbf{D}$$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3), page 81, il vient :

$$\dot{\mathbf{V}}_I = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V} : \mathbf{D} \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{II} = (\mathbf{V}_I \mathbf{G} - \mathbf{V}) : \dot{\mathbf{V}} = (\mathbf{V}_I \mathbf{V} - \mathbf{V}^2) : \mathbf{D} \quad (\text{B.10})$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{III} = (\mathbf{V}_{II} \mathbf{G} - \mathbf{V}_I \mathbf{V} + \mathbf{V}^2) : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (\text{B.11})$$

REMARQUE : On peut obtenir ces résultats sans calcul tensoriel par une méthode alternative similaire à celle exposée page 82.

B.4 Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{n}\mathbf{V}$

De l'équation (B.8) page 82, il vient :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' + (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{M}} + \mathbf{e}^{2\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \quad (\text{B.12})$$

REMARQUE : On rappelle que par définition $\mathbf{e}^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!} = \mathbf{G} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!}$. On a donc : $(\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{M}^k)'$ où $(\mathbf{M}^k)'$ est la somme de k termes qui ne se factorisent pas¹⁰ : $(\mathbf{M}^k)' = \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-1} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-2} + \mathbf{M}^2 \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-3} + \dots + \mathbf{M}^{k-1} \cdot \dot{\mathbf{M}}$. L'équation (B.12) est bien une équation en $\dot{\mathbf{M}}$, mais elle est compliquée¹¹.

Soit $\mathbf{S}$ un tenseur symétrique ayant une base propre commune avec $\mathbf{M}$. De l'équation (B.12) on déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : (\mathbf{e}^{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})') + \mathbf{S} : ((\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}}) &= \mathbf{S} : ((\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{M}}) + \mathbf{S} : (\mathbf{e}^{2\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})) \\ 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}})' : (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' &= 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{M}}) : \mathbf{D} \\ (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}) : \dot{\mathbf{V}} &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^2) : \mathbf{D} \quad \forall \mathbf{S} \text{ commutant avec } \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

D'autre part, si $\mathbf{S}$ est un tenseur symétrique ayant une base propre commune avec $\mathbf{M}$, le produit contracté double $\mathbf{S} : (\mathbf{M}^k)'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : (\mathbf{M}^k)' &= \mathbf{S} : (\dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) + \mathbf{S} : (\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-2}) + \dots + \mathbf{S} : (\mathbf{M}^{k-1} \cdot \dot{\mathbf{M}}) \\ &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} + \dots + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} \quad (\mathbf{S} \text{ et } \mathbf{M}^{k-1} \text{ commutent}) \\ &= k(\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

Or $\dot{\mathbf{V}} = (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{M}^k)'$; on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{V}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{S} : (\mathbf{M}^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^p) : \dot{\mathbf{M}} = \left(\mathbf{S} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^p}{p!} \right) : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}}) : \dot{\mathbf{M}} \\ \mathbf{S} : \dot{\mathbf{V}} &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}) : \dot{\mathbf{M}} \quad \forall \mathbf{S} \text{ commutant avec } \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

8. En calculant le produit scalaire ($\mathbf{V}^n$: équation(B.8))

9. On peut prendre $n = -1$ car $\mathbf{V}$ est symétrique défini positif et donc inversible.

10. La dérivée particulière $\dot{\mathbf{M}}$ ne commute pas avec $\mathbf{M}$, ni avec ses puissances entières, car elle n'a pas de base propre commune avec $\mathbf{M}^p$.

11. Contrairement au cas précédent (voir note 7 page 82), l'expression de $\dot{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ semble inaccessible. Comme précédemment, on peut heureusement s'en passer pour évaluer les produits scalaires $\mathbf{M}^n : \dot{\mathbf{M}}$.

Les deux relations (B.13) et (B.14) nous permettent d'évaluer les produits scalaires $\mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}}$, $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{M}}$ et $\mathbf{M}^2 : \dot{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{D}$ comme suit :

- la relation (B.14) avec $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1}$ conduit à : $\mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^{-1} : \dot{\mathbf{V}}$
la relation (B.13) avec $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-2}$ conduit à : $\mathbf{V}^{-1} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G} : \mathbf{D}$
On a donc : $\mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{G} : \mathbf{D}$
- la relation (B.14) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-1}$ conduit à : $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}}$
la relation (B.13) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-2}$ conduit à : $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M} : \mathbf{D}$
On a donc : $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} : \mathbf{D}$
- la relation (B.14) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}$ conduit à : $\mathbf{M}^2 : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}}$
la relation (B.13) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-2}$ conduit à : $(\mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M}^2 : \mathbf{D}$
On a donc : $\mathbf{M}^2 : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}^2 : \mathbf{D}$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3), page 81, il vient :

$$\dot{\mathbf{M}}_I = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (\text{B.15})$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{II} = (\mathbf{M}_I \mathbf{G} - \mathbf{M}) : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}_I \mathbf{G} - \mathbf{M}) : \mathbf{D} \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{III} = (\mathbf{M}_{II} \mathbf{G} - \mathbf{M}_I \mathbf{M} + \mathbf{M}^2) : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}_{II} \mathbf{G} - \mathbf{M}_I \mathbf{M} + \mathbf{M}^2) : \mathbf{D} \quad (\text{B.17})$$

REMARQUE : On peut obtenir ces résultats sans calcul tensoriel par un méthode alternative similaire à celle exposée page 82.

B.5 Tenseurs de déformation lagrangiens

On a $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ (tenseur non objectif, voir section 4.13.3 page 52). Sa dérivée particulière est :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}} &= \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{F} \\ &= 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = 2\mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Contrairement aux tenseurs de déformation eulériens, le calcul de la dérivée particulière des tenseurs de déformation lagrangiens requiert la connaissance de la rotation $\mathbf{R}$ de la décomposition polaire $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$.

Il est inutile de recommencer les calculs pour trouver les dérivées particulières (objectives) des invariants des tenseurs lagrangiens car les invariants des tenseurs lagrangiens et eulériens sont les mêmes, et donc aussi leur dérivée particulière. On a donc par exemple :

$$\dot{\mathbf{C}}_I = \dot{\mathbf{B}}_I = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T) : \mathbf{D} = \mathbf{C} : (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R})$$

Il en est de même pour les autres invariants de $\mathbf{C}$ ainsi que pour les invariants des autres tenseurs de déformation lagrangiens.

Comme on peut le constater, la dérivée particulière des invariants des tenseurs de déformation lagrangiens ne peut s'exprimer en fonction du tenseur de déformation lagrangien et de $\mathbf{D}$ que si l'on connaît en plus la rotation $\mathbf{R}$ de la décomposition polaire de $\mathbf{F}$.

Table des matières

1	Concepts fondamentaux	1
1.1	Le modèle milieu continu tridimensionnel	1
1.1.1	Milieu continu	1
1.1.2	Définition d'une particule en mécanique des milieux continus	2
1.2	Champs matériels	2
1.3	Observateurs en physique classique	3
1.4	Mouvement par rapport à un observateur	4
1.5	Tenseur de changement d'observateur	4
1.5.1	Vecteur matériel	4
1.5.2	Changement d'observateur des vecteurs matériels	5
1.6	Relation avec les concepts introduits en cinématique élémentaire	6
1.7	En bref...	8
2	Descriptions du mouvement d'un milieu continu	9
2.1	Transformation entre deux instants	9
2.2	Description de Lagrange	10
2.3	Description d'Euler	10
2.4	Equivalence des deux descriptions	11
2.4.1	Passage de la description de Lagrange du mouvement à celle d'Euler	11
2.4.2	Passage de la description d'Euler du mouvement à celle de Lagrange	11
2.4.3	Comparaison des deux descriptions	12
2.5	Champ des déplacements	13
2.6	Opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens	13
2.6.1	Rappel d'analyse tensorielle	13
2.6.2	Gradients lagrangien et eulérien	13
2.6.3	Versions lagrangienne et eulérienne des autres opérateurs différentiels	15
2.7	Dérivée particulaire	15
2.8	Accélération d'une particule	16
2.9	Outils d'analyse du mouvement	17
2.9.1	Trajectoire d'une particule	17
2.9.2	Lignes de courant à un instant t	17
2.9.3	Ligne d'émission à un instant t	18
2.9.4	Débits à travers une surface	19
2.10	Mouvement stationnaire	19
2.11	Changements d'observateur	20
2.12	En bref...	21
3	Objectivité	23
3.1	Définitions et notations	23
3.2	Objectivité des grandeurs physiques scalaires	23
3.3	Objectivité des grandeurs physiques vectorielles	24
3.4	Objectivité des grandeurs physiques tensorielles du second ordre	25

3.5	Objectivité des grandeurs physiques tensorielles d'ordre p	26
3.6	Exemples de changement d'observateur	26
3.6.1	Changement d'observateur du champ $\mathbf{F}(P,t)$	26
3.6.2	Changement d'observateur des opérateurs différentiels eulériens d'une grandeur objective	27
3.6.3	Changement d'observateur des opérateurs différentiels lagrangiens	29
3.6.4	Changement d'observateur de la dérivée particulaire d'une grandeur objective . . .	30
3.7	En bref	31
4	Déformation d'un milieu continu	33
4.1	Introduction	33
4.2	Direction matérielle	34
4.3	Voisinages d'une particule	35
4.4	Tenseurs de déformation lagrangiens	36
4.4.1	Dilatation linéique dans une direction matérielle	36
4.4.2	Tenseurs de déformation lagrangiens	37
4.4.3	Dilatations linéiques principales	38
4.5	Tenseurs de déformation eulériens	38
4.5.1	Dilatation linéique dans une direction matérielle	39
4.5.2	Tenseurs de déformation eulériens	39
4.5.3	Directions matérielles propres à un instant donné	40
4.6	Comparaisons entre les différents tenseurs de déformation	41
4.7	Dilatation volumique	41
4.8	Distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales	42
4.9	Dilatation surfacique	43
4.9.1	Facette matérielle	43
4.9.2	Dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle	44
4.9.3	Mouvement d'une facette matérielle	44
4.9.4	Calcul de la dilatation surfacique avec les tenseurs de déformation	45
4.10	Distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales	45
4.11	Déviation d'une direction matérielle	46
4.12	Petites déformations	46
4.12.1	Tenseur des petites perturbations	47
4.12.2	Petites déformations sans restrictions sur le mouvement	50
4.13	Changements d'observateur	51
4.13.1	Changement d'observateur des directions matérielles	51
4.13.2	Changement d'observateur des normales à une facette matérielle	52
4.13.3	Changement d'observateur des tenseurs de déformation	52
4.13.4	Changement d'observateur de la dilatation linéique	53
4.13.5	Changement d'observateur de la dilatation volumique	53
4.13.6	Changement d'observateur de la distorsion stérique	53
4.13.7	Changement d'observateur de la dilatation surfacique	53
4.13.8	Changement d'observateur de la distorsion angulaire	54
4.13.9	Changement d'observateur des déviations	54
4.13.10	Changement d'observateur du tenseur des petites perturbations	54
4.13.11	Changement d'observateur des tenseurs de petites déformations	54
4.14	En bref...	55
5	Vitesse de déformation	57
5.1	Introduction	57
5.2	Taux de dilatation linéique dans une direction matérielle	57
5.3	Taux de dilatation volumique	59
5.4	Taux de dilatation surfacique	60
5.5	Vitesse de rotation d'une direction matérielle	61

5.6	Taux de distorsion angulaire	62
5.7	Taux de distorsion stérique	63
5.8	Tenseur tourbillon	65
5.9	Compatibilité des taux de déformation	65
5.10	Changements d'observateur	66
5.10.1	Changement d'observateur du gradient eulérien des vitesses et des opérateurs dérivés	66
5.10.2	Changement d'observateur du tenseur des taux de déformation	68
5.10.3	Changement d'observateur du tenseur tourbillon :	68
5.10.4	Changement d'observateur du taux de dilatation linéique	69
5.10.5	Changement d'observateur de la vitesse de rotation d'une direction matérielle . . .	69
5.10.6	Changement d'observateur du taux de dilatation volumique	69
5.10.7	Changement d'observateur du taux de dilatation surfacique	69
5.10.8	Changement d'observateur du taux de distorsion angulaire	70
5.10.9	Changement d'observateur du taux de distorsion stérique	70
5.11	En bref...	70
6	Conclusion	71
A	Distorsions maximales	73
A.1	Distorsion angulaire maximale	73
A.1.1	Recherche de la distorsion angulaire maximale	74
A.1.2	Recherche des couples de directions de distorsion angulaire maximale	76
A.2	Distorsion stérique maximale	77
A.2.1	Recherche de la distorsion stérique maximale	77
A.2.2	Recherche des trièdres des directions de distorsion stérique maximale	79
B	Dérivées particulières utiles	81
B.1	Rappels	81
B.2	Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{B}$	82
B.3	Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$	82
B.4	Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{nV}$	83
B.5	Tenseurs de déformation lagrangiens	84