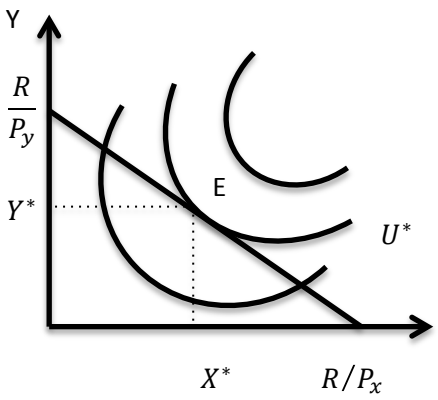
3. توازن المستهلك في ظل استخدام منحنيات السواء:

يكون المستهلك في حالة توازن رياضيا عندما يحقق أقصى إشباع في حدود دخله والأسعار السائدة في السوق، أما هندسيا فيتحقق التوازن عند النقطة التي يكون فيها خط الميزانية مماسا لأعلى منحنى سواء ممكن، وعند تلك النقطة يكون ميل خط الميزانية مساويا لميل منحنى السواء كما هو مبين في الشكل التالي:



$$\frac{MUx}{MUy} = \frac{-\Delta y}{\Delta x} = \frac{P_x}{P_y}$$

$\left(x^*.y^*\right)$ تمثل الكميات التوازنية من السلعتين التي يحقق بهما الشرطان، هذا ويمكن الوصول إلى وضع التوازن بطريقتين إما الطريقة الجبرية (الرياضية) أو الطريقة الهندسية.

لإيجاد التوليفة المثالية التي تمنح للمستهلك أقصى إشباع أو منفعة ممكن تحقيقها في ظل دخله المتاح رياضيا يمكن إما إستعمال: (1) طريقة التعويض المباشر (طريقة الإحلال) حيث نستخرج x بدلالة y أوالعكس من معادلة الدخل ونقوم بتعويضها في دالة المنفعة وللتأكد من مثلوية التوليفة السلعية نحسب المشتقة الجزئية الثانية لدالة المنفعة ويجب أن تكون سالبة للدلالة على أن المنفعة الكلية تتناقص بعد إستهلاك النقطة التي تحقق أقصى إشباع، أو(2) نستخدم طريقة مضاعف لاغرانج التي سبق وتعرضنا لها في الجزء المخصص للمنفعة القياسية. هذا ويتحقق توازن المستهلك عند تعادل ميل خط الميزانية (α) مع ميل منحنى السواء $(\frac{-\Delta y}{\Delta x})$ أي $\frac{P_x}{P_y} = \frac{-\Delta y}{\Delta x}$.

مثال (4):

لتكن لدينا دالة منفعة من الشكل التالي: $TU = 2x + 4y + xy + 8$

أوجد توازن المستهلك إذا علمت أن دخل المستهلك يقدر بـ 50 ون وسعر السلعة x هو5 ون وسعر السلعة y هو 10 ون بطريقة الإحلال ومضاعف لاغرانج؟

حل المثال (4) الخاص بتوازن المستهلك:

1/ طريقة الإحلال:

قيد الميزانية يكتب على الشكل: $R = xP_x + yP_y \Leftrightarrow 50 = 5x + 10y$

هدف المستهلك هو تعظيم منفعته في حدود دخله والإسعار السائدة في السوق:

$$\begin{cases} Max\ TU = 2x + 4y + xy + 8 \dots\dots\dots (1) \\ S.T \qquad\quad 50 = 5x + 10y \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من معادلة قيد الميزانية نستخرج قيمة (X) بدلالة (Y):

$$R = xP_x + yP_y \ \Rightarrow x = \frac{R - yP_y}{P_x} = \frac{50 - 10y}{5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x = 10 - 2y} \dots\dots\dots (3)$$

نعوض قيمة (X) في المعادلة (1) دالة المنفعة الكلية لتصبح دالة ذات مجهول واحد كالتالي:

$$TU = 2(10 - 2y) + 4y + (10 - 2y)y + 8$$

$$TU = 20 - 4y + 4y + 10y - 2y^2 + 8$$

$$TU = 28 + 10y - 2y^2$$

الهدف هو الوصول الى أقصى إشباع ممكن من السلعة(Y) ويتحقق ذلك إذا كانت المنفعة الحدية للسلعة تساوي الصفر $(\mathrm{MU}_Y = 0)$ ومنه:

$$\frac{\partial TU}{\partial y} = 10 - 4y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{5}{2}}$$

نعوض قيمة (Y) في (X) المعادلة (3):

$$x = 10 - 2y \Rightarrow x = 10 - 2\times\frac{5}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x = 5}$$

ومنه التوليفة المثلى التي تحقق توازن المستهلك أي أقصى منفعة ممكنة للمستهلك تحت قيد دخله هي $\left(x^*.y^*\right) = (5, \frac{5}{2})$ ومستوى الاشباع المحقق من هذه التركيبة التوازنية:

$$TU = 2.5 + 4.\frac{5}{2} + 5.\frac{5}{2} + 8 \Rightarrow TU = \boldsymbol{40,5\ UU}$$

للتأكد من أن المنفعة الكلية تتناقص بعد إستهلاك النقطة التي تحقق أقصى إشباع نحسب المشتقة الجزئية الثانية لدالة المنفعة بدلالة Y أي:

شرط الدرجة الثانية للتأكد من أن الثنائية $\left(\mathbf{x}^*، \mathbf{y}^*\right)$ مثلوية:

$$\frac{\partial^2 TU}{\partial^2 y} = \frac{\partial(10 - 4y)}{\partial y} = -4 < 0$$

ومنه على المستهلك شراء 5 وحدات من السلعة (X) و $5/2$ من السلعة (Y) وبذلك يحقق مستوى إشباع يقدر بـ 40.5 وحدة منفعة.

2/ طريقة مضاعف لاغرانج:

دالة هدف المستهلك هي: $\begin{cases} Max \quad TU = 2x + 4y + xy + 8 \\ S.T: 50 = 5x + 10y \end{cases}$

تبعا لدالة هدف تعظيم المنفعة تحت قيد الميزانية تأخذ معادلة لاغرانج الشكل التالي:

$$\mathcal{L} = TU + \lambda(R - xP_X - yP_Y)$$

$$\mathcal{L} = 2x + 4y + xy + 8 + \lambda(50 - 5x - 10y)$$

أ. الشرط اللازم: المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج تساوي الصفر

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2 + y - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{y+2}{5} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4 + x - 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x+4}{10} \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 50 - 5x - 10y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمساواة بين (1) و(2) نجد:

$$\frac{y+2}{5} = \frac{x+4}{10} \implies x = 2y \dots\dots\dots\dots\dots . (4)$$

بتعويض (4) في (3) نجد:

$$50 - 5(2y) - 10y = 0$$

$$\Rightarrow 50 - 20y = 0 \Rightarrow y = \frac{50}{20} \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{5}{2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

بتعويض قيمة (X) في المعادلة (4) نجد: $x = 2y \Rightarrow \boldsymbol{x = 5}$

$$R = 5(5) + 10(5/2) \Rightarrow \boldsymbol{R = 50}$$

ومنه فإن التركيبة السلعية التي تحقق لهذا المستهلك أقصى مستوى اشباع ممكن تتمثل في 5 وحدات من السلعة (X) و$5/2$ وحدة من السلعة (Y).