حل التمرين رقم 7:

$$TU = \sqrt{x}\sqrt{y}$$

1/ دوال الإشباع الحدي:

أ/ دالة المنفعة الحدية بالنسبة للسلعة X:

$$\mathrm{M}U_x = \frac{\partial TU}{\partial x} = \frac{\partial x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{-1}{2}}}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

ب/ دالة المنفعة الحدية بالنسبة للسلعة Y:

$$\mathrm{M}U_y = \frac{\partial TU}{\partial y} = \frac{\partial x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{\partial y} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{-1}{2}}$$

2/ حساب مقدار مضاعفة الطلب على السلعة X من أجل مضاعفة مستوى الإشباع الكلي بـ 10 مرات دون تغيير الطلب على السلعة Y:

$$TU = \sqrt{x}\sqrt{y}$$

من أجل مضاعفة الإشباع الكلي بـ 10 مرات لابد من مضاعفة الطلب على السلعة X بـ 100 مرة.

$$10\ TU = \sqrt{\alpha x}\sqrt{y}$$

$$10\ TU = \sqrt{\alpha}\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$10\ TU = \sqrt{\alpha}\ TU$$

$$\sqrt{\alpha} = 10 \Rightarrow \alpha = 10^2 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 100}$$

حل التمرين رقم 8:

$$TU = 15X + 20Y - X^2 - Y^2$$

$$\mathrm{P_y} = 2 \text{ ، } \mathrm{P_x} = 6 \text{ ،R} = 200$$

1/ الكميات المثلى من X و Y حتي يصل المستهلك الى أقصى منفعة:

حتى يكون المستهلك في الوضعية المثلى (وضعية التوازن) فلا بد من تحقق شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} & \text{الشرط الضروري} \\ R = XP_x + YP_y & \text{شرط الانفاق (المتمم)} \end{cases}$$

أولا نقوم بحساب دوال المنفعة الحدية:

$$\mathrm{MU_X} = \frac{\partial \mathrm{TU}}{\partial \mathrm{X}} = \frac{\partial(15X + 20Y - X^2 - Y^2)}{\partial \mathrm{X}} = 15 - 2\mathrm{X}$$

$$\mathrm{MU_Y} = \frac{\partial \mathrm{TU}}{\partial \mathrm{Y}} = \frac{\partial(15X + 20Y - X^2 - Y^2)}{\partial \mathrm{Y}} = 20 - 2\mathrm{Y}$$

بتعويض دوال المنفعة الحدية في شرط توازن المستهلك ينتج لدينا جملة معادلتين نقوم بحلها:

$$\begin{cases} \frac{15-2X}{6} = \frac{20-2Y}{2} \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 200 = 6X + 2Y \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد:

$$30 - 4X = 120 - 12Y \Rightarrow -4X = 90 - 12Y \Rightarrow \boldsymbol{X = 3Y - 22.5} \dots\dots (3)$$

بتعويض قيمة X أي المعادلة (3) في قيد الدخل (المعادلة (2)) نجد:

$$200 = 6\times(-22.5 + 3Y) + 2Y \quad \Rightarrow 200 = -135 + 20Y \Rightarrow \boldsymbol{Y = 16.75}$$

بتعويض Y=16.75 في المعادلة (3) نجد:

$$X = 3\times 16.75 - 22.5 \Rightarrow \boldsymbol{X = 27.75}$$

ومنه فإن التركيبة السلعية التي تحقق لهذا المستهلك أقصى مستوى اشباع ممكن تتمثل في 27.75 وحدة من السلعة X و16.75 وحدة من السلعة Y.

3/ أثبات أنه أكبر إشباع ممكن:

للتحقق من مثلوية التركيبة السلعية يكفي التحقق من أنها تحقق الشرط الثاني للتوازن (قيد الدخل):

$$XP_x + YP_y = R \Rightarrow 27.75 \times 6 + 16.75 \times 2 = 200$$

4/ التركيبة التوازنية المثلى إذا إنخفض سعر السلعة X الى 1 وحدة نقدية:

حتى يكون المستهلك في الوضعية المثلى (وضعية التوازن) فلا بد من تعويض سعر السلعة الجديد $\mathrm{P_x} = 1$ في شرطي التوازن حيث ينتج لدينا جملة معادلتين نقوم بحلها:

$$\begin{cases} \frac{15-2X}{1} = \frac{20-2Y}{2} \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 200 = 1X + 2Y \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد:

$$30 - 4X = 20 - 2Y \Rightarrow -4X = -10 - 2Y \Rightarrow \boldsymbol{X = 2.5 + 0.5Y} \dots\dots (3)$$

بتعويض قيمة X أي المعادلة (3) في قيد الدخل (المعادلة (2)) نجد:

$$200 = 1\times(2.5 + 0.5Y) + 2Y \quad \Rightarrow 200 = 2.5 + 2.5Y \Rightarrow \boldsymbol{Y = 79}$$

بتعويض Y=79 في المعادلة (3) نجد:

$$X = 2.5 + 0.5\times(79) \Rightarrow \boldsymbol{X = 42}$$

ومنه فإن التركيبة السلعية التي تحقق لهذا المستهلك أقصى مستوى اشباع ممكن في ظل إنخفاض سعر السلعة X الى 1 وحدة نقدية تتمثل في 42 وحدة من السلعة X و79 وحدة من السلعة Y.

⬅ للتحقق من مثلوية التركيبة السلعية يكفي التحقق من أنها تحقق الشرط الثاني للتوازن (قيد الدخل):

$$R = XP_x + YP_y \Rightarrow 42 \times 1 + 79 \times 2 = 200$$