حل التمرين رقم 6:

1/ تحديد دوال الطلب على السلعتين X وY بدلالة الدخل والأسعار:

لتحديد دالة الطلب على السلعة نقوم بتقدير تعادل المنافع الجزئية المكتسبة ثم نعوض في دالة الإنفاق.

$$TU = \frac{1}{3}xy$$

بتطبيق شرطي التوازن نجد:

$$\begin{cases} \frac{MU_x}{P_X} = \frac{MU_y}{P_y} \\ R = xP_x + yP_y \end{cases}$$

$$MU_X = \frac{\partial TU}{\partial x} \Rightarrow MU_x = \frac{1}{3}y\,, \qquad MU_Y = \frac{\partial TU}{\partial y} \Rightarrow MU_y = \frac{1}{3}x$$

إنطلاقا من شرط توازن المستهلك الضروري:

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_Y} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{3}y}{P_x} = \frac{\frac{1}{3}x}{P_y} \Longrightarrow \frac{y}{3P_x} = \frac{x}{3P_y} \Rightarrow y3P_y = x3P_x$$

$$\Longrightarrow x = \frac{yP_y}{P_x} \ldots\ldots\ldots (1)$$

بتعويض (1) في معادلة قيد الميزانية نجد:

$$R = xP_x + yP_y \Rightarrow R = \frac{yP_y}{P_x}P_x + yP_y \Rightarrow R = yP_y + yP_y = 2yP_y$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2P_y}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$ دالة الطلب على $\boldsymbol{y}$

وبتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد:

$$x = \frac{yP_y}{P_x} = \frac{\frac{R}{2P_y}\,.P_y}{P_x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2P_x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ دالة الطلب على $\boldsymbol{x}$

2/ إيجاد كمية كل من X و Y التي تعظم إشباع المستهلك باستخدام طريقة لاغرانج:

$$\mathcal{L} = TU + \lambda(R - xP_X - yP_Y)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{3}(xy) + \lambda(360 - 6x - 18y)$$

حساب المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}y - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{18}y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x - 18\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{54}x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 360 - 6x - 18y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمساواة بين (1) و(2) نجد:

$$\frac{1}{18}y = \frac{1}{54}x \implies x = 3y \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (4)$$

بتعويض (4) في (3) نجد:

$$360 - 6\,(3y) - 18y = 0$$

$$\Rightarrow 360 - 36y = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{360}{36} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 10} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

بتعويض قيمة (x) في المعادلة (4) نجد: $x = 3y \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x = 30}$

$$R = 6(30) + 18(10) \ \Rightarrow \boldsymbol{R = 360}$$

ومنه فإن التركيبة السلعية التي تحقق لهذا المستهلك أقصى مستوى اشباع ممكن تتمثل في 10 وحدات من السلعة Y و30 وحدة من السلعة X.

3/ الشرط الكافي: التحقق من أن التركيبة (X, Y)= (30, 10) تعظم المنفعة الكلية:

نقوم بحساب المحدد الهيسي والذي يجب أن يكون موجب $|H| > 0$

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{X}^2} & \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{xy}} & \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{xL}} \\ \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{xy}} & \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{Y}^2} & \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{yL}} \\ \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{xL}} & \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \mathrm{yL}} & \frac{\partial 2\mathrm{L}}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{f}_{11} & \mathrm{f}_{12} & \mathrm{f}_{13} \\ \mathrm{f}_{21} & \mathrm{f}_{22} & \mathrm{f}_{23} \\ \mathrm{f}_{31} & \mathrm{f}_{32} & \mathrm{f}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & -6 \\ 1/3 & 0 & -18 \\ -6 & -18 & 0 \end{vmatrix}$$

يمكن حساب المحدد هنا بطريقتين:

أ/ طريقة المحددات الجزئية:

$$|H| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|\mathrm{H}| = 0\begin{vmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -18 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} = 0 + 36 + 36$$

$$= 64 > 0$$

ب/ طريقة إضافة الأعمدة:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & -6 \\ 1/3 & 0 & -18 \\ -6 & -18 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \\ -6 & -18 \end{matrix}$$

$$= \left[0 + \left(\frac{1}{3}.(-18)(-6)\right) + (-6)\left(\frac{1}{3}\right)(-18)\right] - [0+0+0]$$

$$= 36 + 36 - 0 = 64 > 0$$

بما أن إشارة المحدد الهيسي موجبة والشرط الكافي محقق فإن التوليفة السلعية (X,Y)=(30,10)

تحقق توازن المستهلك عند مستوى إشباع يقدر بـ: $\mathrm{T}U = \frac{1}{3}x.y = \frac{1}{3}.10.30 = \mathbf{100\ UU}$

4/ المعنى الاقتصادي لمضاعف لاغرانج (λ) وإيجاد تأثير زيادة الدخل بـ 2 وحدة نقدية:

🡸 **مضاعف لاغرانج (λ):** هو المنفعة الحدية للدخل (النقود)، أو منفعة آخر وحدة من الدخل منفقة: $\lambda = \frac{\partial TU}{\partial R} = \frac{\Delta TU}{\Delta R} = \mathrm{M}U_R$

ويعني أيضا مقدار مساهمة كل وحدة نقدية في المنفعة الكلية.

🡸 **تأثير زيادة الدخل بـ 2 وحدة نقدية:**

من خلال المشتقات الجزئية لدالة لاغرانج نستخرج قيمة λ

$$\lambda = \frac{1}{18}y = \frac{1}{54}x = \frac{10}{18} = \frac{30}{54} = 0{,}55$$

$$\Delta R = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta TU}{\Delta R} \Rightarrow \lambda\Delta R = \Delta TU \Rightarrow \Delta TU = 2\lambda$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Delta TU = 1,11\ UU}$$