- **طريقة إضافة الأعمدة:**

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial 2L}{\partial X^2} & \frac{\partial 2L}{\partial XY} & \frac{\partial 2L}{\partial X\lambda} \\ \frac{\partial 2L}{\partial YX} & \frac{\partial 2L}{\partial Y^2} & \frac{\partial 2L}{\partial Y\lambda} \\ \frac{\partial 2L}{\partial \lambda X} & \frac{\partial 2L}{\partial \lambda Y} & \frac{\partial 2L}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{\partial 2L}{\partial X^2} & \frac{\partial 2L}{\partial XY} \\ \frac{\partial 2L}{\partial YX} & \frac{\partial 2L}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial 2L}{\partial \lambda X} & \frac{\partial 2L}{\partial \lambda Y} \end{matrix} > 0$$

$$|H| = \left(\frac{\partial 2L}{\partial X^2} \times \frac{\partial 2L}{\partial Y^2} \times \frac{\partial 2L}{\partial \lambda^2}\right) + \left(\frac{\partial 2L}{\partial XY} \times \frac{\partial 2L}{\partial Y\lambda} \times \frac{\partial 2L}{\partial \lambda X}\right) + \left(\frac{\partial 2L}{\partial X\lambda} \times \frac{\partial 2L}{\partial YX} \times \frac{\partial 2L}{\partial \lambda Y}\right) - \left(\frac{\partial 2L}{\partial X\lambda} \times \frac{\partial 2L}{\partial Y^2} \times \frac{\partial 2L}{\partial \lambda X}\right) - \left(\frac{\partial 2L}{\partial X^2} \times \frac{\partial 2L}{\partial Y\lambda} \times \frac{\partial 2L}{\partial \lambda Y}\right) - \left(\frac{\partial 2L}{\partial XY} \times \frac{\partial 2L}{\partial YX} \times \frac{\partial 2L}{\partial \lambda^2}\right)$$

مثال (4): لتكن لدينا دالة المنفعة الكلية بالصيغة التالية: TU=x.y حيث أن:

$$R = 100, P_x = 1, P_y = 2$$

المطلوب:

1. ماهي التركيبة السلعية أوالتوليفة المثلى التي تحقق للمستهلك أكبر إشباع ممكن بإستعمال طريقة لاغرانج (الشرط الضروري)؟

2. تحقق من أن الثنائية التوازنية مثلوية باستعمال الشرط الكافي (المحدد الهيسي)؟

الحل:

1. التركيبة السلعية التوازنية التي تحقق للمستهلك أكبر إشباع ممكن بإستعمال طريقة مضاعف لاغرانج:

يمكن تشكيل دالة المنفعة الكلية وقيد الميزانية على النحو التالي:

$$\begin{cases} Max \quad TU = x.y \\ S.T: 100 = X + 2Y \end{cases}$$

ويتم صياغة دالة لاغرانج كالتالي: $L = x.y + \lambda\,(100 - x - y2)$

الشرط الضروري:

لتعظيم هذه الدالة لابد أن تكون المشتقات الجزئية الأولى لها معدومة:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Leftrightarrow y - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = y \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow x - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 100 - x - 2y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد $y = \frac{x}{2} \dots\dots (4)$

ثم نعوض (4) في المعادلة (3):

$$100 - x - 2y = 0 \Leftrightarrow 100 - x - 2\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 50}$$

نعوض قيمة x في المعادلة (4) فنجد: $y = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{50}{2} \Rightarrow \boldsymbol{y = 25}$

وبالتالي فإن التركيبة السلعية التي تحقق أقصى إشباع ممكن للمستهلك تتمثل في 50 وحدة من السلعة x و25 وحدة من السلعة y.

2. التحقق من مثلوية الثنائية التوازنية باستعمال الشرط الكافي (المحدد الهيسي):

الشرط الكافي: نقوم بحساب المحدد الهيسي والذي يجب أن يكون أكبر من الصفر:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

حساب المحدد الهيسي بطريقة المحددات الجزئية:

$$0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1(-2) + (-1)(-2) = 2 + 2 = 4 > 0$$

حساب المحدد الهيسي بطريقة إضافة الأعمدة:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - (0 + 0 + 0) = 4 > 0$$

بمأن $|H| > 0$ فإن التركيبة السلعية التوازنية (x,y) = (50,25) تعظم المنفعة الكلية عند مستوى إشباع يقدر بـ:

$$TU = x.y = (50)\times(25) = 1250\ uu$$

1.3.2 حالة خاصة لمضاعف لاغرانج:

يمكن أن يكون الهدف من تطبيق مضاعف لاغرانج إيجاد قيمة الدخل الواجب إنفاقه للحصول على مستوى إشباع محدد، وعليه فإن دالة التدنية وقيد دالة لاغرانج يكتب بالشكل التالي:

$$Min\ R = XP_x + YP_y$$

$$ST: \text{TU} = \text{f(x, y)}$$

ويتم صياغة دالة لاغرانج وفق الطريقة التالية:

$$L = XP_x + YP_y + \lambda\ (TU - \text{f(x, y)})$$

مثال (5): بالإعتماد على المثال السابق مع إفتراض أن المنفعة الكلية معروفة وتقدر بـ 1250 بينما الدخل المخصص للإنفاق مجهول.

المطلوب: إيجاد قيمة الدخل الواجب تخصيصه لتحقيق مستوى الإشباع UU1250؟

الحل:

قيمة الدخل الواجب تخصيصه لتحقيق مستوى الإشباع UU1250:

يتم صياغة دالة لاغرانج وفق الشكل التالي:

$$\begin{cases} Min\ R = X + 2Y \\ S.T: 1250 = x.y \end{cases} \Rightarrow L = X + 2Y + \lambda(1250 - x.y)$$

الشرط الضروري:

لتعظيم دالة لاغرانج لابد أن تكون المشتقات الجزئية الأولى للدالة معدومة:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{y} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow 2 - x\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{x} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 1250 - x.y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد $\frac{1}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{2} \dots\dots$ (4)

ثم نعوض (4) في المعادلة (3):

$$1250 - x.y = 0 \Leftrightarrow 1250 - x.\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2500 = x^2 \Rightarrow \boldsymbol{x = 50}$$

نعوض قيمة x في المعادلة (4) فنجد:

$$y = \frac{x}{2} \Leftrightarrow y = \frac{50}{2} \Rightarrow \boldsymbol{y = 25}$$

ومنه التركيبة التي تحقق التوازن للمستهلك هي بإقتناء 50 وحدة من السلعة x و 25 وحدة من السلعة y، والدخل المخصص لتحقيق هذا المستوى من الإشباع أي 1250 وحدة منفعة هو: 100 وحدة نقدية.

$$R = X + 2Y \Leftrightarrow R = 50 + 2.(25) \Leftrightarrow \boldsymbol{R = 100}$$