حل المثال رقم (03):

في حالة تحديد الدخل المخصص للإنفاق على الإستهلاك وأسعار السلع فإن تحديد الكميات التوازنية المستهلكة من السلع x، y و z والتي توصل للمستهلك أقصى إشباع يتم بتوفر الشرطين (الضروري والمتمم):

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} = \frac{MU_z}{P_z} = \lambda$$

$$140 = 10x + 15y + 20z$$

الجدول التالي يبين الشرط الأول الضروري والمتمثل في تساوي النسبة بين المنفعة الحدية المكتسبة والسعر بالنسبة للسلع x، y و z:

الكميات المستهلكة(Q)	1	2	3	4	5	6	7
$(\mathrm{MU_x}/P_x)$	1.1	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$(\mathrm{MU_y}/P_y)$	1.2	1.1	1	0.9	0.7	0.6	0.5
$(\mathrm{MU_z}/P_z)$	2	1.8	1.6	1.2	1.1	1	0.8

1. من خلال الجدول أعلاه نجد أن هناك تركيبتين يمكن أن تحققا الشرط الضروري (تعادل نسب المنافع الحدية إلى أسعارها (λ)) والتي يمكن أن تحقق للمستهلك وضع التوازن وهما:

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} = \frac{MU_z}{P_z} = \boldsymbol{\lambda = 1.1} \Rightarrow (x, y, z) = (1,2,5) \qquad (1)$$

أي إقتناءالمستهلك لوحدة واحدة من السلعة (x) و2 وحدة من السلعة (y) و5 وحدات من السلعة (z)

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} = \frac{MU_z}{P_z} = \boldsymbol{\lambda = 1} \Rightarrow (x, y, z) = (2,3,6) \qquad (2)$$

أي إقتناء المستهلك 2 وحدة من السلعة (x) و3 وحدات من السلعة (y) و6 وحدات من السلعة (z)

2. بما أن الشرط الضروري غير كاف لأنة لايأخذ بعين الإعتبار قيد الدخل المفروض على المستهلك، حيث أن الدخل المخصص للإستهلاك هو 140ون ويجب مراعاة ذلك عند سعي المستهلك لتحقيق أقصى إشباع ممكن له فهل هذا الدخل كاف لتحقيق التركيبتين التوازنيتين الموافقتين للقيمتين1 و1.1؟ وللإجابة على هذا السؤال لابد من التحقق من شرط الإنفاق (الشرط المتمم) لاختيار التركيبة التوازنية المثلى. للقيام بهذا يجب تحقق المعادلة التالية:

$$R = xP_x + yP_y + zP_z \qquad \Rightarrow 140 = 10x + 15y + 20z$$

$$(\mathbf{1})\boldsymbol{\lambda = 1.1} \Rightarrow (x, y, z) = (1,2,5) \Rightarrow 10x + 15y + 20z = 10 + 30 + 100 = \mathbf{140 = 140}$$

الشرط المتمم محقق

$$(\mathbf{2})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1} \Rightarrow (x,y,z) = (2,3,6) \Rightarrow 10x + 15y + c20z = 20 + 45 + 120 = \mathbf{185} > \mathbf{140}$$

الشرط المتمم غير محقق

شرط الإنفاق محقق عند التركيبة الأولى$(x,y,z) = (1,2,5)$ والتي تعتبر التركيبة التوازنية المثلى التي تحقق للمستهلك أقصى إشباع بإقتناء المستهلك لوحدة واحدة من السلعة (x) و2 وحدة من السلعة (y) و5 وحدات من السلعة (z) حيث يحقق مستوى إشباع يقدر بـ:

$$TU_{(x,y,z)} = \sum_{i=1}^{x=1} MU_{xi} + \sum_{i=1}^{y=2} MU_{yi} + \sum_{i=1}^{z=5} MU_{zi} = TU_X + TU_Y + TU_Z = (11) + (17+19) + (40+36+32+28+22) \Rightarrow TU_{(x,y,z)} = \mathbf{205\ UU}\ (\boldsymbol{Unite\ of\ Utility})$$

3.2 توازن المستهلك في حالة تعدد السلع باستخدام طريقة لاغرانج (Lagrange)

إذا كان في دالة المنفعة أكثر من متغيرين $\boldsymbol{TU} = \boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots \dots \dots, x_n)}$ فإن إتباع طريقة التعويض تصبح طريقة معقدة، وبالتالي نستخدم طريقة أخرى للحصول على الكميات التوازنية تعرف بطريقة مضاعف لاغرانج والتي تم إقتراحها من طرف الباحثين Tucher &Khun ، وتقوم هذه الطريقة على مبدأ تعظيم دالة المنفعة تحت قيد دخل المستهلك.

لتبسيط تطبيق هذه الطريقة نفترض أن المستهلك يستهلك سلعتين فقط لتعظيم مستوى إشباعه كالتالي:

Max TU(x,y)= f(x,y)

$$ST: R = XP_x + YP_y$$

ويتم صياغة دالة لاغرانج وفق الطريقة التالية:

$$L = f\Big(X,Y\Big) + \lambda\,(R - XP_x - YP_y)$$

حيث:

λ : مضاعف لاغرانج

حل دالة لاغرانج: يتطلب حل دالة لاغرانج لإيجاد القيم التوازنية X,Y تحقق الشرطين التاليين:

أ. الشرط الضروري(اللازم): المقصود به أن المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة لكل متغير (X,Y,λ)تساوي الصفر:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial X} - \lambda P_x = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\partial f}{\partial X}/P_x \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial Y} - \lambda P_y = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\partial f}{\partial Y} / P_y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow R - XP_x - YP_y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. (3)$$

عن طريق المساواة بين (1) و(2) ثم تعويض النتيجة في (3) نجد قيم كل من X, Y, λ

ب. الشرط الكافي: وهو أن تكون قيمة المحدد الهيسي $|H|$ أكبر من الصفر ويتم الحصول على المحدد الهيسي عن طريق حساب المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاغرانج كمايلي:

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\partial 2L}{\partial X^2} & \frac{\partial 2L}{\partial XY} & \frac{\partial 2L}{\partial X\lambda} \\ \frac{\partial 2L}{\partial YX} & \frac{\partial 2L}{\partial Y^2} & \frac{\partial 2L}{\partial Y\lambda} \\ \frac{\partial 2L}{\partial \lambda X} & \frac{\partial 2L}{\partial \lambda Y} & \frac{\partial 2L}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} > 0$$

هناك طريقتين لحساب المحدد الهيسي:

- طريقة المحددات الجزئية:

$$|H| = \frac{\partial 2L}{\partial X^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial 2L}{\partial Y^2} & \frac{\partial 2L}{\partial Y\lambda} \\ \frac{\partial 2L}{\partial \lambda Y} & \frac{\partial 2L}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix} - \frac{\partial 2L}{\partial XY} \begin{vmatrix} \frac{\partial 2L}{\partial YX} & \frac{\sigma 2L}{\sigma Y\lambda} \\ \frac{\partial 2L}{\partial \lambda X} & \frac{\sigma 2L}{\sigma \lambda^2} \end{vmatrix} + \frac{\partial 2L}{\partial X\lambda} \begin{vmatrix} \frac{\partial 2L}{\partial YX} & \frac{\partial 2L}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial 2L}{\partial \lambda X} & \frac{\partial 2L}{\partial \lambda Y} \end{vmatrix} > 0$$

- طريقة إضافة الأعمدة: