1. صيغ تايلور
2. النشر المحدود بجوار الصفر(dévellopement limité au voisinage de zéro)
3. النشر المحدود بجوار لانهاية (dévellopement limité au voisinage de l'infini)

1. دساتير Taylor:

هناك ثلاثة صيغ مشهور للعالم الرياضي Taylor:

تعريف:

نضرية تايلور (théorème Taylor- Lagrange) :

لتكن الدالة f معرفة على مجال $I = [a; b]$ من R بحيث تكون من الصنف C^n اي قابلة للاشتقاق من الرتبةn f^nعلى $]a: b[$.

اذن : $\forall \alpha \in]a; b[$

نستطيع تقريب الدالة f بالشكل :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

بحيث : $T_n(x)$ يسمى بمتسلسلة تايلور يساوي :

$$T_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 \dots . \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$$

اما : $R_n(x)$ الخطا الناتج عن عملية التقريب ويسمي كذلك شكل Lagrange والذي تكون عبارته بالشكل :

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}$$

باقي Lagrange يقترب من الصفر لما يقترب $n \to \infty$

1.1. دستور تايلور عند المالانهاية :

اذا اخذنا متسلسلة تايلور المنتهية وعوضنا $n = \infty$ تصبح :

$$T_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 \dots \dots \dots \dots \dots \dots .$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$$

2. دستور مكلوران (Mac laurin) :

متسلسلة Mac laurin هي متسلسلة Taylor في حالة $\alpha = 0$ اذن تصبح متسلسلة Mac laurin من الشكل :

$$T_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

مثال :

ماهي متسلسلة Ma laurin لكل من الدوال الاتية :

$$f(x) = e^x \ (\alpha = 0); \qquad g(x) = \sin x \ \ (\alpha = 0)$$

$$\begin{array}{llll}
f(x) = e^x & f(0) = 1 & g(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = e^x & f'(0) = 1 & g'(x) = \cos x & g'(0) = 1 \\
. & & g''(x) = -\sin x & g''(0) = 0 \\
. & & g'''(x) = -\cos x & g'''(0) = -1 \\
. & & . & \\
f^n(x) = e^x & f^n(0) = 1 & . &
\end{array}$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}(x-1)^2 \dots\dots\dots\dots. \frac{x^n}{n!}(x-1)^n \quad Taylor$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}(x)^2 \dots\dots\dots\dots. \frac{x^n}{n!}(x)^n \quad Mac\ laurin$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!}(x)^3 + \frac{x^5}{5!}(x)^5 - \frac{x^7}{7!}(x)^7 \dots. \quad Mac\ laurin$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. دستور تايلور (Taylor) لما يكون الباقي عبرة عن تكامل :

لتكن الدالة f المعرفة على مجال I $f: I \to R$ من الفئة C^n

اذن دستور Taylor يصبح من الشكل :

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 \dots . \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \int_a^x \frac{f^{n+1}(c)}{(n)!}(t-\alpha)^n dt$$

4. دستور تايلور يونق (Formule deTaylor-young) :

تُستخدم صيغة Taylor-Young لإيجاد كثير الحدود من الدرجة n الذي يقترب بشكل أفضل من دالة معينة بالقرب من نقطة معينة. سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية للدالة عند النقطة المعتبرة.

نضرية :

لتكن الدالة f معرفة على مجال I من R اي : $f: I \to R$ من الفئة C^n وليكن $\alpha \in I$ اذن تكون صيغة Taylor-young من الشكل :

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 \dots . \frac{f^n(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + o(x-\alpha)^n$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + o(x-\alpha)^n$$

هناك بعض صيغ Taylor-young اين يستبدل فيه الباقي بالعبرة التالية :

$$o(x-\alpha)^n = (x-\alpha)^n \varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \to \alpha} \varepsilon(x) = 0$$

حالة خاصة :

لما يكون $\alpha = 0$ تصبح صيغة Taylor-young بالشكل :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 \dots . \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n + o(x)^n$$

قبل ان نتطرق الى مفهوم النشر المحدود يجب ان نعرض مفاهيم خاصة بالدوال المتكافئة و الدوال المهملة.

5. دوال متكافئة (fonctions équivalentes) :

لدينا $f\ et\ g$ دالتين معرفتين على المجال I من R : اي $f: I \to R, g: I \to R$ نقول عن الدالتين متكافئتين بالقرب من القيمة x_0 اذا وفقط اذا كان :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad g(x) \neq 0$$

ونرمز له :

$$f(x) \sim g(x) \ \ x \to x_0$$

خواص :

- اذا كان $x_0 = \infty$ نحافض على نفس الشروط اي :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad g(x) \neq 0$$

ونرمز له :

$$f(x) \sim g(x) \ \ x \to \infty$$

- اذا كانت الدالتين $f \ et \ g$ موجبتين على مجال I من R اذن :

$$\left(f \underbrace{\sim}_{x_0} g\right) \Rightarrow \left(f^n \underbrace{\sim}_{x_0} g^n\right)$$

$$\left(f \underbrace{\sim}_{x_0} g \wedge g \underbrace{\sim}_{x_0} h\right) \Rightarrow f \underbrace{\sim}_{x_0} h$$

$$\left(f \underbrace{\sim}_{x_0} g \wedge h \underbrace{\sim}_{x_0} k\right) \Rightarrow f.h \underbrace{\sim}_{x_0} g.k$$

$$\left(f \underbrace{\sim}_{x_0} g \wedge h \underbrace{\sim}_{x_0} k\right) \Rightarrow \frac{f}{h} \underbrace{\sim}_{x_0} \frac{g}{k} \quad h \neq 0 \ et \ k \neq 0$$

الجدول التالي يوضح بعض التقريبات لبعض الدوال الاكثر استعمالا بجوار 0 :

$f(x)$	$\sin x - x$	$\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$	$e^{\sin x} - 1$	$\cos x - 1$	$\sqrt{1+x} - 1$	$\frac{1}{1-x}$	$(x+1)^{(x+1)}$
$\sim$	$-\frac{x^3}{6}$	$2x$	x	$-\frac{x^2}{2}$	$\frac{x}{2}$	x	x

المصدر :من تاليف الكاتب.

امثلة :

ادرس تكافئ الدوال في الحالات التالية :

$$f(x) = \sin(x^2) \qquad g(x) = x^2 \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = 2^x - 1 \qquad g(x) = e^x \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = x^2 - x - 1 \qquad g(x) = x^2 - 2 \quad x_0 = \infty$$

الحل :

$$\boldsymbol{f(x) = \sin(x^2) \qquad g(x) = x^2 \quad x_0 = 0}$$

$$\lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{2\,x\,cos(x^2)}{2x} = 1$$

اذن :

$$f(x) \sim g(x) \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = 2^x - 1 \qquad g(x) = e^x \quad x_0 = 0$$

$$\lim_{x_0 \to 0} \frac{2^x - 1}{e^x} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{e^{\ln 2^x} - 1}{e^x} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{e^{x \ln 2} - 1}{e^x} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{\ln 2\, e^{x \ln 2}}{e^x}$$

$$\lim_{x_0 \to 0} \frac{2^x - 1}{e^x} = \ln 2 \neq 1$$

اذن :

$$f(x) \nsim g(x) \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = x^2 - x - 1 \qquad g(x) = x^2 - 2 \quad x_0 = \infty$$

$$\lim_{x_0 \to \infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2} = 1$$

اذن :

$$f(x) \sim g(x) \quad x_0 = \infty$$

6. الدوال المهملة (fonctions négligeables) :

لدينا $f\ et\ g$ دالتين معرفتين على المجال I من R : اي $f: I \to R, g: I \to R$ نقول عن الدالة f مهملة بانسبة لدالة g بالجوار النقطة x_0 اذا وفقط اذا كان :

$$\varepsilon: V \to R$$

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon = 0$$

بحيث : $f = g.\varepsilon$

اي :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ويرمز لهذا ب :

$$f \overset{x\to x_0}{\lll} g \Leftrightarrow f = o(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \varepsilon: V \to R \\ f = \varepsilon . g \end{cases}$$

$f \overset{x\to x_0}{\lll} g$ هذه العبارة هي ترميز *Hardy*

$f = o(g)$ هذه العبارة هي ترميز *Landau*

$$x = o(x^2) \quad x_0 = \infty$$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad x_0 = \infty$$

امثلة :

لدينا الدوال المعرفة بالشكل التالي :

$$f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = e^x - 1 \quad x_0 = 1$$

بين هل :

$$f = o(g) \quad g = o(f)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{e^x-1} = 0$$

اذن : $f = o(g)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x-1}{x^2-1} = +\infty$$

اذن:

$$g \neq o(f)$$

7. النشر المحدود *(dédellopement limité :DL)* :

لتكن f دالة معرفة على المجال I من R لدينا النقطة $x_0 \in I$ نقول ان الدالة f تقبل نشرا محدودا بجوار النقطة x_0.

نقول ان الدالة f تقبل نشرا محدود من الرتبة n اذا وجد ت الاعداد الحقيقية $c_0;\ c_1; \dots .. c_n$ و الدالة $\varepsilon: V \to R$ بحيث $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

اذن $\forall x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots .. + c_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

هذا الجزء $p(x-x_0) = c_0 + {}_1(x-x_0) + \cdots .. + c_n(x-x_0)^n$ يسمى كثير حدود من الدرجة n

اما الجزء $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ فهو الباقي

دستور $Taylor$ يسمح لنا مباشرة بإجاد النشر المحدود وذلك بوضع :

$$c_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}$$

ملاحضة :

بعض الدوال لاتقبل نشرا محدود بجوار قيم معينة

مثلا :

الدالة $\ln x, \frac{1}{x}$ لا تقبل نشرا محدودا بجوار الصفر.

7.1.**النشر المحدود بجوار** ∞ :

في حالة $x_0 = \infty$ نقول ان الدالة f تقبل نشرا محدود من الرتبة n اذا امكننا كتابة كثيرا حدود السابق من الشكل :

$$f(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

خاصية :

اذا كانت الدالة f من الفئة C^n نقول ان الدالة f تقبل نشرا محدودا بجوار القيمة x_0 يعطى بالعبارة التالية :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \ldots . \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

اذا كانت قيمة $x_0 = 0$ *تصبح العبارة مبسط كما يلي* :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 \ldots . \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n + (x)^n\varepsilon(x)$$

7.2.خصائص النشر المحدود :

اذا قبلت الدالة f نشرا محدودا فهو وحيد.

النشر المحدود لدالة الزوجية (الفردية) :

اذا قبلت الدالة f نشرا محدودا بجوار الصفر نرمز له A_n

- اذا كانت الدالة f زوجية $f(-x) = f(x)$ اذن A_n **زوجي اي المعاملات الفردية** $c_1 = c_3 = \cdots .. = c_{2n+1} = 0$ **تؤول اى القيمة صفر.**
- اذا كانت الدالة f فردية $f(-x) = -f(x)$ اذن A_n **فردي اي المعاملات الزوجية** $c_2 = c_4 = \cdots .. = c_{2n} = 0$ **تؤول اى القيمة صفر.**

مثال :

اوجد النشر الحدودي لدالتين :

$$DL_0^5 : f(x) = \sin x \qquad DL_0^5 :\ g(x) = \cos x \qquad x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f''''(x) = \sin x & f''''(0) = 0 \\ f'''''(x) = \cos x & f'''''(0) = 1 \end{cases}$$

$$DL_0^5 : f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\begin{cases} g(x) = \cos x & g(0) = 1 \\ g'(x) = -\sin x & g'(0) = 0 \\ g''(x) = -\cos x & g''(0) = -1 \\ g'''(x) = \sin x & g'''(0) = 0 \\ g''''(x) = \cos x & g''''(0) = 1 \\ g'''''(x) = -\sin x & g'''''(0) = 0 \end{cases}$$

$$DL_0^5 : g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

تطبيق :

اوجد النشر المحدود لدوال المعرفة بالشكل :

$$DL_0^4 : f(x) = e^{2x} \quad DL_1^2 :\ g(x) = \sqrt{x} \quad DL_{+\infty}^1 : h(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} & f(0) = 1 \\ f'(x) = 2e^{2x} & f'(0) = 2 \\ f''(x) = 4e^{2x} & f''(0) = 4 \\ f'''(x) = 8e^{2x} & f'''(0) = 8 \\ f''''(x) = 16e^{2x} & f''''(0) = 16 \end{cases}$$

$$DL_0^4 : f(x) = 1 + 2x + 4\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^3}{3.2} + 16\frac{x^4}{4.3.2} + o(x^4)$$

$$DL_0^4 : f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

$$DL_1^2 :\ g(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \quad g(1) = 1 \\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(1) = \frac{1}{2} \\ g''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \quad g''(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$DL_1^2 :\ g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$DL_{+\infty}^1 : h(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

لايجاد النشر المحدود لهذه الدالة نتبع الخطوات التالية :

نضع :

$$\frac{1}{x} = t \quad x \to +\infty; t \to 0$$

اذن نبحث عن النشر المحدود للدالة :

$$DL_0^1 : h(t) = \frac{1}{t^2}\ln(1 + t)$$

بمان الدالة $\frac{1}{t^2}$ غير قابلة للاشتقاق عند القيمة صفر نبحث عن النشر المحدود المساعد.

اذن نستعمل فقط النشر المحدود ل $\ln(1 + t)$:

$$DL_0^3 : k(t) = \ln(1 + t)$$

$$\begin{cases} k(t) = \ln(1 + t) \quad k(0) = 0 \\ k'(t) = \frac{1}{1 + t} \quad k'(0) = 1 \\ k''(t) = -\frac{1}{(1 + t)^2} \quad k''(0) = -1 \\ k'''(t) = \frac{2}{(1 + t)^3} \quad k'''(0) = 2 \end{cases}$$

$$DL_0^3 : k(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$DL_0^1: h(t) = \frac{1}{t^2}\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right) + o(t^3)$$

$$DL_0^1: h(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{3}t + o(t^3)$$

اذن :

$$DL_{+\infty}^1: h(x) = -\frac{1}{2} + x + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

7.3.عمليات على النشر المحدود :

نفرض ان الدالتين $f\ et\ g$ تقبلان النشرالمحدود من الدرجة n بجوار الصفر بحيث :

$$f(x) = c_0 + c_1(x) + \cdots .. + c_n(x)^n + (x)^n\varepsilon(x)$$

$$g(x) = d_0 + d_1(x) + \cdots .. + d_n(x)^n + (x)^n\varepsilon(x)$$

اذن : $f + g$ تقبلان النشر المحدود من الدرجة n بجوار الصفر :

$$(f+g)(x) =$$
$$= (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)(x) + \cdots .... + (c_n + d_n)(x)^n + (x)^n\varepsilon$$

مثال :

اوجد النشر المحدود لدالة :

$$DL_0^3: f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

لدينا :

$$\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = \ln(x+1) - \ln(1-x)$$

اذن :

$$DL_0^3: \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = DL_0^3: ln(x+1) - DL_0^3: ln(1-x)$$

$$DL_0^3: ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = (x^2-1)\ \left(2x + \frac{2}{3}x^3\right) + o(x^3)$$

$$DL_0^3: (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

وكذلك : $f.g$ تقبلان النشر المحدود من الدرجة n بجوار الصفر :

$$(f.g)(x) = \big(c_0 + \ c_1(x) + \cdots .. + c_n(x)^n + (x)^n\varepsilon(x)\big).\big(d_0 + \ d_1(x) + \cdots .. + d_n(x)^n + (x)^n\varepsilon(x)\big)$$

مثال :

اوجد النشر الحدودي للدالة :

$$DL_0^2: f(x) = \cos x\,.\sqrt{x+1}$$

$$DL_0^2 : g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$DL_0^2: h(x) = \sqrt{x+1}$$

$$DL_0^2: \ h(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$DL_0^2: f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right).\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$DL_0^2: f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right).\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{16} + o(x^2)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{16} + o(x^2)$$

$$DL_0^2: f(x) = \ = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$

والباقي $R_n(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{16}$ هو الجزء المهمول .

اذا قبلت الدالة f نشرا محدودا بجوار القيمة $x = x_0$ مع $f(x_0) \neq 0$ اذن الدالة $\frac{1}{f}$ تقبل كذلك نشرا محدودا بجوار القيمة $x = x_0$

مثال :

اوجد النشر المحدود للدالة التالية :

$$DL_0^4: \frac{1}{\cos x}$$

لدينا :

$$DL_0^4: \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)}$$

نضع :

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) = t \quad si\ x \to 0\ alors\ t \to 0$$

$$DL_0^4: \frac{1}{\cos x} = DL_0^4: \frac{1}{1+t}$$

$$DL_0^4: \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(x^2)$$

$$DL_0^4: \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$DL_0^4: \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

اذا قبلت الدالة $g\ et\ f$ نشرا محدودا بجوار القيمة $x = x_0$ مع $g(x_0) \neq 0$ اذن الدالة $\frac{f}{g}$ تقبل كذلك نشرا محدودا بجوار القيمة $x = x_0$

مثال :

$$DL_0^3: \frac{\sin x}{\ln(x+1)}$$

لدينا :

$$DL_0^3: \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

اذن :

$$DL_0^3: \frac{\sin x}{\ln(x+1)} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}$$

$$DL_0^3: \frac{\sin x}{\ln(x+1)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

ملاحظة :

في عملية القسمة استعملنا طريقة (dévision par puissances croissante)

7.4.التركيب (la composition) :

$$f(x) = C(x) + (x)^n\varepsilon(x) = c_0 + c_1(x) + \cdots .. + c_n(x)^n + (x)^n\varepsilon(x)$$

$$g(x) = D(x) + (x)^n\varepsilon(x) = d_0 + d_1(x) + \cdots . + d_n(x)^n + (x)^n\varepsilon(x)$$

اذا كان : $g(0) = 0 \Rightarrow d_0 = 0$ اذن : $f \circ g$ تقبل النشر المحدود لها بجوار الصفر ونكتب $C(D(x))$

مثال :

ماهو النشر المحدود للدالة التالية :

$$DL_0^3: f(x) = \sin(\ln(x+1))$$

نضع : $\ln x + 1 = t$

$$DL_0^3: f(t) = \sin t$$

$$DL_0^3: f(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$$

من جهة اخرى لدينا :

$$DL_0^3: t = g(x) = \ln(x+1)$$

$$\begin{cases} g(x) = \ln(x+1) \quad g(0) = 0 \\ g'(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad g'(0) = 1 \\ g''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \quad g''(0) = -1 \\ g'''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \quad g'''(x) = 2 \end{cases}$$

$$DL_0^3: t = g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + -\frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + o(t^3)$$

$$\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right).\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)=$$

$$x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^4\right)+\frac{1}{3}\left(x^4-\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{3}x^6\right)+o(x^3)$$

$$=x^2-x^3+o(x^3)$$

$$\left(x^2-x^3+o(x^3)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)=x^3+o(x^3)$$

$$DL_0^3: f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

7.5.النشر المحدود لبعض الدوال الشهيرة :

$$DL_0^n: e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\ldots.\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$DL_0^n: \sin x=x-\frac{1}{2!}x^2+\cdots\ldots.(-1)^p\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$DL_0^n: \cos x=1-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\ldots.(-1)^p\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

$$DL_0^n: \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots\ldots.(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$DL_0^n: \ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2+\cdots\ldots.-\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$DL_0^n: \frac{1}{1+x}=1+x+x^2+\cdots\ldots.+x^n+o(x^n)$$

$$DL_0^n: \frac{1}{1-x}=1-x+x^2+\cdots\ldots.+(-1)^nx^n+o(x^n)$$

$$DL_0^n: \frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots\ldots.+(n+1)x^n+o(x^n)$$

8. النشر المحدود و النهايات :

الهدف من النشر المحدود هوالحصول على كثير حدود ليسهل علينا دراسة نهاية بعض الدوال التي تكون من شكل حالة عدم تعيين. او لدراسة تقرب بعض التكملات.

وعليه ناخذ النهاية المشهورة :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x+1}{x}=1$$

نهاية الدالة $\frac{\ln x+1}{x}$ بجاوار الصفر عند التعويض هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

وعليه حساب النشر المحدود لهذه الدالة يساعدنا على ايجاد النهاية بكل سهولة :

لدينا :

$$DL_0^n: \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots\dots..(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

ناخذ رتبة $n = 3$ فتصبح النهاية من الشكل :

$$\frac{DL_0^3: ln(x+1)}{x} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}{x} + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x+1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x+1}{x} = 1$$

مثال :

بين عن طريق النشر المحدود ان النهاية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x(1+x)} = -1$$

لدينا :

$$DL_0^n: \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \dots\dots..-\frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

ناخذ رتبة $n = 3$ فتصبح النهاية من الشكل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2}{x+1} = -1$$

اذن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x(1+x)} = -1$$

مثال :

اوجد النهاية التالية بطريقة النشر المحدود :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

نلاحض ان نهاية الدالة هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

طريقة النشر المحدود تسمح لنا بتحويل الدالة $\cos x$ الى كثير حدود ومنه :

$$DL_0^2: \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

8.1.النشر المحدود ومعادلة المماس : (DL et la tangente)

لتكن f دالة معرفة على المجال I من R R $f: I \to R$ لدينا النقطة $x_0 \in I$ اذا قبلت الدالة f نشرا محدودا بجوار النقطة x_0. الذي يكون من الشكل :

$$f(x)=c_0+\ c_1(x-x_0)+\cdots..+c_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

اذن معادلة المماس T_{x_0} لمنحني الدالة f بجوار القيمة x_0 :

$$T_{x_0}=c_0+\ c_1(x-x_0)$$

وعليه الوضع النسبي ل T_{x_0} بالنسبة لمنحني الدالة f بجوار القيمة x_0 :يكون بدراسة اشارة الفرق بين :

$$f(x)-T_{x_0}\Leftrightarrow f(x)-c_0+\ c_1(x-x_0)$$

اي من اشارة $k\geq 2$ $c_k(x-x_0)^k$ ونميز ثلاث حالات :

الحالة 1 : اشارة الفرق موجة

$$f(x)-c_0+\ c_1(x-x_0)>0$$

اذن المماس T_{x_0} يقع تحت منحني الدالة C_f

مثال :

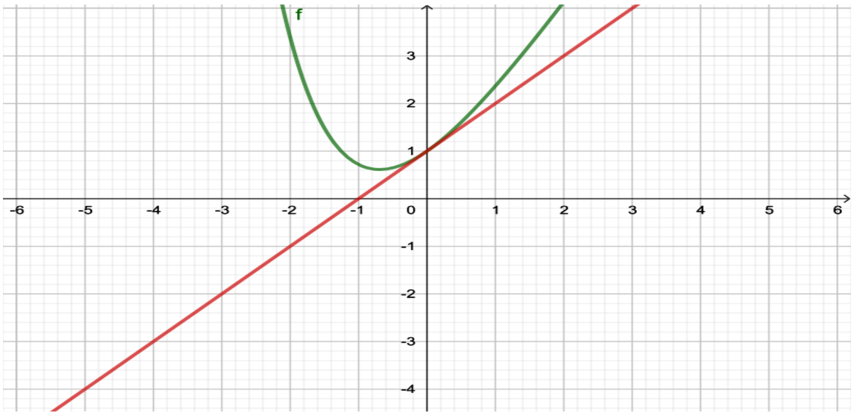
$$f(x)=e^{-x}+2x$$

$$DL_0^2: f(x)=e^{-x}+2x\Leftrightarrow DL_0^2: f(x)=\ 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$T_0=1+x$$

$$f(x)-T_0=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Leftrightarrow f(x)-T_0>0$$

اذن T_0 يقع تحت C_f



المصدر : من طرف الكاتب بالاعتماد على *Geogébra*

الحالة 2 : اشارة الفرق سالبة

$$f(x) - c_0 + \; c_1(x - x_0) < 0$$

اذن المماس T_{x_0} يقع فوق منحني الدالة C_f

مثال :

$$f(x) = \ln(1 + x) - 2x$$

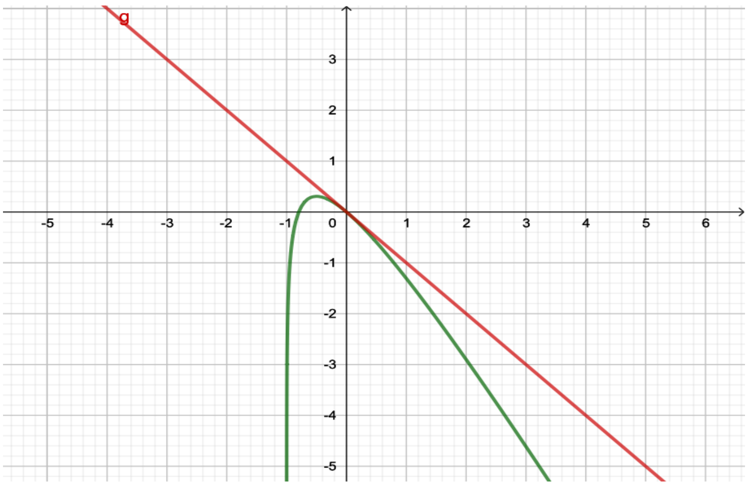
$$DL_0^3: f(x) = ln(1 + x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow DL_0^3: f(x) = \; -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$T_0 = -x$$

$$f(x) - T_0 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \Leftrightarrow f(x) - T_0 > 0$$

اذن T_0 يقع فوق C_f



المصدر : من طرف الكاتب بالاعتماد على *Geogébra*

الحالة 3 : اشارة الفرق مرة موجبة مرة سالبة على حسب $x < x_0 \; ou \; x_0 < x$

اذن المماس T_{x_0} يقطع منحني الدالة C_f عند القيمة x_0

مثال :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$$

$$DL_1^4: x^4 - 2x^3 + 1$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(x) = 4x^3 - 6x^2 \Leftrightarrow f'(1) = -2 \\ f''(x) = 12x^2 - 12x \Leftrightarrow f''(1) = 0 \\ f'''(x) = 24x - 12 \Leftrightarrow f'''(1) = 12 \\ f''''(x) = 24 \Leftrightarrow f''''(1) = 24 \end{cases}$$

$$DL_1^4: f(x) = -2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^{\,4} + o(x^3)$$

اذن معادلة المماس T_{x_0} :

$$T_1 = -2(x-1)$$

الوضع النسبي :

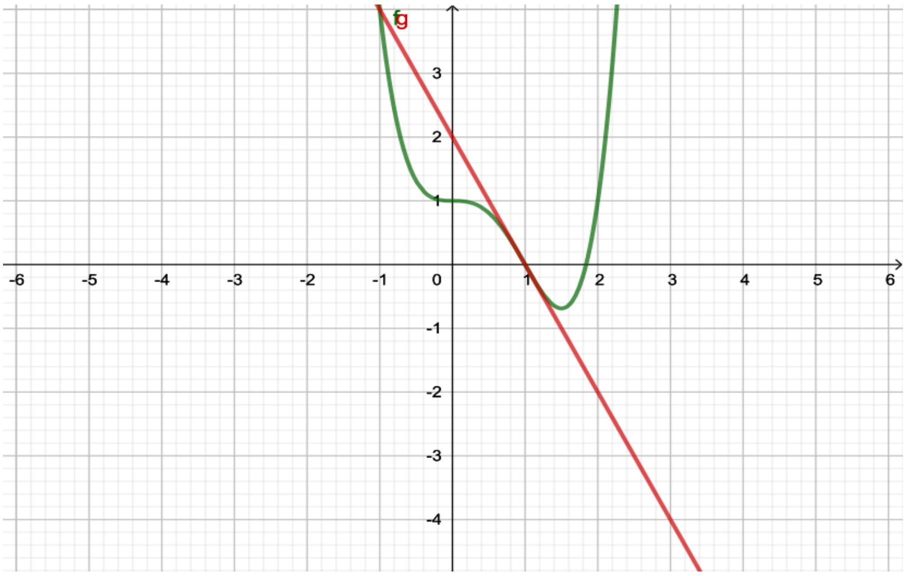
$$f(x) + 2(x-1) = 2(x-1)^3 + o(x^3)$$

بامان القيمة $x-1$ تغير اشارتها بجوار 1 اذن :

اذا كان $1 < x$ المماس يقع تحت المنحني C_f

اذا كان $x < 1$ المماس يقع فوق المنحني C_f

المنحني البياتي التالي يوضح النتائج المتحصل عليها.



المصدر : من تاليف الكاتب بالاعتماد على *Geogebra*

تطبيق :

ابحث عن النشر المحدود لدالة المعرفة بالشكل :

$$DL_0^3: \frac{1-\sqrt{1+x}}{x+2x^2}$$

اوجد معادلة المماس T_0 لمنحني C_f

ادرس الوضع النسبي

الحل :

$$DL_0^3: \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: 1-\sqrt{1+x} = 1 - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$DL_0^3: x+2x^2 = x + 2x^2 + o(x^3)$$

اذن :

$$DL_0^3: \frac{1-\sqrt{1+x}}{x+2x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}{x + 2x^2 + o(x^2)}$$

$$DL_0^3: \frac{1-\sqrt{1+x}}{x+2x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{8}x - \frac{3}{16}x^2 + o(x^2)$$

اذن من خلا ل النشر المحدود نستنتج ان معادلة المماس T_0 :

$$T_0 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{8}x$$

بما ان : اشارة الحد $-\frac{3}{16}x^2$ سالبة اذن المماس يقع فوق المنحني ل للدالة f.

8.2.**النشر المحدود والمستقيمات المقاربة بجوار** ∞ : **(Développement asymptotique)**

مثال :

اوجد النشر المحدود للدالة المعرفة بالشكل :

$$DL_{+\infty}^3: f(x) = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \ln 2\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln 2 + ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

نضع :

$$t=\frac{1}{2x}\Leftrightarrow x\to+\infty\ alors\ t\to 0$$

اذن :

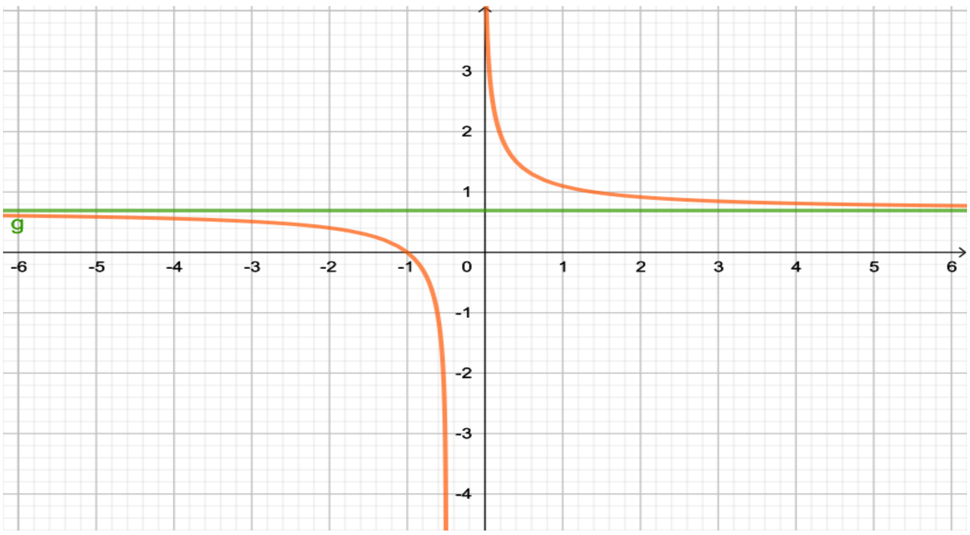
$$f(t)=\ln 2+ln(1+t)$$

$$DL_0^3: f(t)=\ln 2+t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+o(t^3)$$

وعليه يصبح النشر المحدود بجوار $+\infty$:

$$DL_{+\infty}^3: f(x)=\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln 2+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{24x^3}+o(x^3)$$

اذن : $y=\ln 2$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ يقع تحت منحني الدالة f كما يوضح المنحني البياني التالي :



المصدر : من تاليف الكاتب باستعمال Geogbra