2-1) Méthode des éléments finis :

2-1-1) Généralités:

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. Elle connaît, depuis 1970 environ **[17]**, une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidien, voir familier, de l'ingénieur, dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants

2-1-2) Avantage de la méthode des éléments finis :

- On peut représenter un grand nombre de formes de structures à l'aide du modèle analytique général commun **[17]**.

- La faculté de définir des maillages très irréguliers et depuis l'origine est l'un des grands avantages de la méthode des éléments finis.

-On peut accepter des lois complexes de propriétés intrinsèques des matériaux si on compare aux possibilités des méthodes classiques de résolution, et offrent plus vastes perspectives en analyse non linaire.

2 1-3) Procédures de base de la méthode des éléments finis :

Les différentes étapes pour l'application de la méthode des éléments finis seront décrites d'une manière générale **[35]**.

2-1-3-1) Choix du type d'élément et discrétisation :

La première étape consiste à choisir le type d'élément le plus adapté au problème donné , ensuite on discrétise le milieu continu en un certain nombre d'éléments. En général, les points suivants sont à prendre en considération dans la sélection du type d'élément.

2-1-3-2) Type d'élément

* La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement : ils sont groupés en quatre classes :

1- les contraintes planes ; les déformations planes ; axisymétriques (problème à deux dimensions).

2- la flexion des plaques.
3- les coques.
4- l'analyse des solides tridimensionnels.

* On distingue plusieurs classes d'éléments finis suivant leur géométrie :

- ❖ Les éléments unidimensionnels **(1D)** : sont utilisés de façon individuelle ou associée des plaques pour modéliser les raidisseurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe-

- ❖ Les éléments bidimensionnels **(2D)** : Élasticité plane : (déformation ou contrainte plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.

- ❖ Les éléments tridimensionnels **(3D)** : élément de volume, ou coques épaisses. Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière.

* Dans chaque groupe des différents niveaux de précision peuvent être atteints. Ceci dépend du nombre de degrés de liberté associe avec le type d'élément. Les points nodaux se trouvent généralement sur les frontières des éléments bien que des nœuds internes peuvent aussi être inclus dans certains éléments pour augmenter leur efficacité. Généralement, avec l'augmentation de l'ordre de l'élément, celui ci devient plus précis et plus coûteux. Cependant certaines conditions doivent être satisfaites dans la sélection du type d'élément pour assurer une bonne convergence (Convergence vers la solution exacte). Ces conditions sont :

*le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément doit être continu.

* Le modèle du déplacement doit inclure un état de déformation constante (L'élément doit être capable de reproduire un champ de déformation constant, si les déplacements nodaux le requièrent).

* L'élément doit être capable de reproduire un mouvement de corps rigide : par exemple quand les degrés de liberté nodaux correspondent à un mouvement de corps rigide, l'élément doit avoir une déformation égale à zéro et des forces nodales nulles. Ceci est un cas particulier du critère de la déformation constante.

* L'élément doit être compatible, il ne doit pas y avoir de vide entre deux éléments. l'élément qui ne remplit pas cette condition est dit incompatible ou non conforme. Cependant un élément incompatible peut être valide et sa convergence maintenue si Les incompatibilités disparaissent en augmentant le maillage et si l'élément se rapproche d'un état de déformation constante.

* L'élément n'a pas une direction privilégiée, c'est-à-dire que l'élément doit être géométriquement invariant et donne les mêmes résultats pour n'importe quelle orientation de l'élément.

2-1-3-3) Taille de l'élément :

En général plus le maillage est fin plus les résultats obtenus sont meilleurs, mais en même temps un grand effort de programmation est requis. Le nombre d'éléments utilisés sera la fonction du type de la structure à analyser, mais généralement plus d'éléments sont requis dans les régions où les contraintes varient rapidement que dans les régions où elles varient graduellement .Cependant pour les éléments complexes les maillages grossiers donneront des résultats aussi bons que ceux des maillages fins ayant des éléments simples.

2-1-5) Les différentes formulations de la méthode des éléments finis:

2-1-5-1) Introduction:

En général, le principe de toute méthode de discrétisation consiste à remplacer un milieu continu (structure) comportant une infinité de modes de déformations ou de tensions par un milieu idéalisé ne possédant qu'un nombre fini de tels modes.

On va alors définir une approximation de la solution (déplacement et/ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la structure, mais pour chacun de ses éléments en les réduisant à un petit nombre de mode décrits par des fonctions simple. Ils sont choisis parmi les plus fondamentaux pour la description du comportement de l'élément dans la structure.

La structure entière est donc idéalisée par un nombre fini de modes qui se transmet entre chaque élément de manière bien précise. Les inconnues du problème sont alors les paramètres qui représentent l'intensité de chaque mode.

Il existe plusieurs manières d'approcher un système réel, cette approche consiste à formuler un champ qui porte sur tout le système ou une partie de celui-ci, les différentes formulations existantes sont les suivantes.

2-1-5-2) Formulation en déplacement:

C'est une formulation selon laquelle l'approximation est faite sur le champ de déplacements de façon que l'intégrabilité du champ de déformations soit assurée à l'intérieur de l'élément. L'élément est dit "cinématiquement admissible".

* Cette condition est automatiquement réalisée lorsque le champ de la déformation est déduit à un champ de déplacement continu et éventuellement différentiable.

Si la continuité du champ de déplacement est vérifiée aux surfaces de séparation des éléments, le modèle est dit ***Co-déformable ou compatible.***

Il existe un autre groupe d'éléments ou l'on satisfait plus que les conditions de compatibilité, ce modèle est alors dit ***sur-conforme ou sur-compatible.***

En général, dans ce modèle, on assure au moins la continuité au nœud du tenseur complet des déformations, y compris le changement des courbures.

2-1-5-3) Formulation équilibre:

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de tension de façon que les équations d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément.

2-1-5-4) Formulation hybride:

Dans cette formulation, le plus souvent on définit la solution en termes d'approximation, d'une part du champ de contraintes interne en équilibre, d'autre part de déplacements sur la frontière de l'élément.

2-1-5-5) Formulation mixte:

Dans celle-ci, on définit la solution en terme d'approximation de deux ou plusieurs champs indépendants; généralement, le champ des déplacements et celui des contraintes, étendues à tout l'élément ; en général cette formulation conserve les paramètres inconnus de tout les champs comme **DDL** ; sa mise au point peut être longue et couteuse ; elle peut toutefois être d'excellente qualité.

2-1-5-6) Formulation en déformation:

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de déformation de façon telle que les équations de compatibilité et d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacement est déduit du champ de déformations qui est continu et différentiable. ***Ce modèle est sur compatible.***

2-1-4) Formulation des éléments finis:

La méthode des éléments finis représente l'extension de la méthode de rigidité pour les portiques a l'étude bidimensionnelle et tridimensionnelle des structures continues (exemple : plaque, coque ... etc.).

Dans la méthode des éléments finis, la structure continue est remplacée par une structure idéalisée équivalente composée d'un ensemble d'élément appelé «élément finis », qui est censé relier les uns aux autres en un nombre fini de points appelés nœuds.

On définit de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque «élément fini », qui est censé relier les uns aux autres en un nombre fini de points appelés nœuds.

On définit de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque «élément fini » qui est une approximation du problème. Cette approximation de la fonction choisie par un élément appelé une «interpolation » qui est exprimée en fonction des déplacements aux nœuds.

Il est possible, par l'utilisation des théorèmes de l'énergie, de déterminer la matrice de rigidité qui relie les forces nodales avec les déplacements nodaux d'un «élément fini ». La matrice de rigidité de l'assemblage des éléments est obtenue de la même manière que le cas des portiques (Méthode des rigidités).

Si les conditions d'équilibre sont appliquées, chaque nœud de la structure modélisée, on obtient un système d'équations simultanées résoudre.

2-1-4-3) Procédure d'analyse par éléments finis

La procédure comporte les étapes suivantes :

- L'idéalisation et la discrétisation de la structure en éléments finis par un maillage constitue de lignes ou de surfaces imaginaires. Les éléments sont supposés relies en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières.

  Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème. Il est apparent que la méthode des éléments finis est applicable pour les structures des matériaux de propriétés hétérogènes ou de formes géométriques compliqués et irrégulières (bords courbes, trous,...).

- On choisit une fonction de déplacement permettant de définir de manière unique le champ des déplacements à l'intérieure de chaque « élément fini » en fonction des déplacements de ces nœuds. On se basant sur cette fonction de déplacement, nous déduisons- la matrice de rigidité de l'élément qui lie les forces nodales avec les déplacements nodaux et la matrice masse en utilisant le principe des travaux virtuels ou le principe de l'énergie potentielle totale minimale.

- L'analyse de la structure idéalisée de l'assemblage des éléments. Cette analyse procède de la manière classique qui a été décrite par la méthode des rigidités.

En fin la solution de ces équations nous permet d'évaluer les déplacements et les efforts internes dans la structure (contrainte, déformation).

La méthode des éléments finis est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier correctement des structures continues ayant des propriétés géométriques et des conditions de charge compliquées ; elle nécessite un grand nombre de calculs qui, à cause de leur nature répétitive, s'adaptent parfaitement à la programmation numérique et à la résolution par ordinateur.

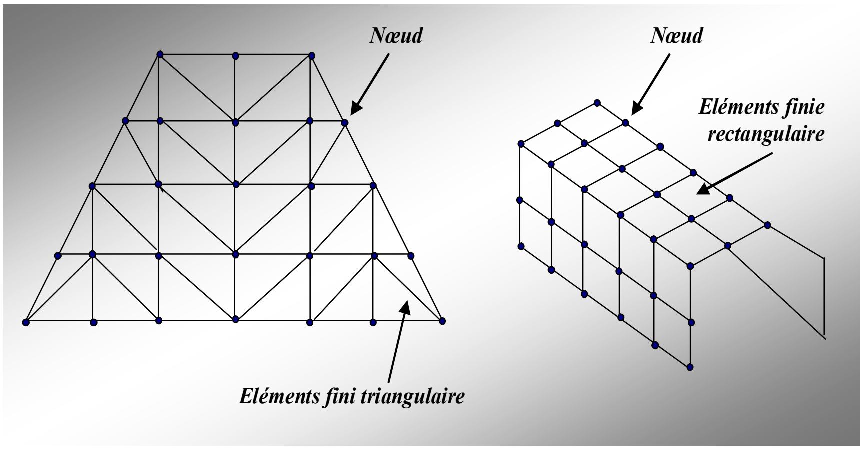


Figure: (2-1) Modélisations par éléments finis de structures

2-2) Modélisation des plaques par la méthode des éléments finis:

2-2-1) Modélisation par éléments finis

« ***Modélisé*** » consiste à simplifier les unités caractéristiques d'un ouvrage (unité géométrique mécanique et/ou cinématique) **[26]** et à les soumettre à des conditions théoriques de liaisons et de chargements.

2-2-2) Modélisation et discrétisation :

2-2-2-1) Introduction :

Pour s'assurer qu'une analyse numérique simulera au mieux un problème réel donné, il faut effectuer deux opérations essentielles, la *modélisation* dans un premier temps et la *discrétisation* dans un deuxième temps (figure2-2) ces opérations portant sur deux aspects principaux du problème pratique **[17]**.
* Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites et du milieu,
* choix des éléments finis et du maillage.

Problème physique réel —*Modélisation*→ Modèle théorique (ou mathématique) —*Discrétisation*→ Modèle numérique (ou discret)

Figure (2-2): Etapes de l'analyse d'un problème de limites

2-2-2-2) Importance de la modélisation du comportement de la structure:

La modélisation est l'étape clé de toute analyse, elle consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des solides, structures et matériaux qui est capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. Donc pratiquement la modélisation consiste :

En ce qui concerne la structure, à ramener cette dernière à une géométrie en choisissant des axes (barre, poutre câble …..), des plans (parois, plaques coques), des volumes (solides) après avoir éliminé certains détails (gousset, petites excentricités ……), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie pour définir les conditions d'appuis et les charges. Choisir de façon réaliste les lois constitutives des matériaux décrivant aussi bien les réponses mécaniques classiques, (linéaires anisotropes discontinuité) que les phénomènes physiques (teneur en eau, discontinuité, perméabilité), à déterminer les propriétés qui définissent ces lois
et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales).

2-2-3) Discrétisation d'une structure :

La solution obtenue en utilisant n'importe quelle méthode en éléments finis déponde d'une série d'approximations, telles que le type et la forme de l'élément qui doit être utilisé dans la discrétisation. Dans de nombreux cas, un seul type d'élément est nécessaire pour modéliser un problème, donné, mais parfois deux ou plusieurs éléments sont nécessaires pour discrétiser un tel problème, dans le cas d'une plaque avec raidisseurs, les éléments poutres et plaques sont utilisés dans la discrétisation. De plus le maillage peut être grossier ou fin. Le choix dépond de la géométrie de la structure et de certaines caractéristique locales telles que la concentration des contraintes **[11]**.

Le choix d'un maillage adapté à une structure particulière doit être dans la mesure du possible basé sur le résultant des expériences antérieures. Si cela n'est pas possible, alors il faudra étudier la structure pour différents maillages pour tester le taux de convergence. De plus, le type d'élément utilisé dans la modélisation à une influence considérable sur la précision de la solution, il doit être choisi avec soin
Les éléments les plus utilisés en pratique sont illustrés sur la figure (2-3).

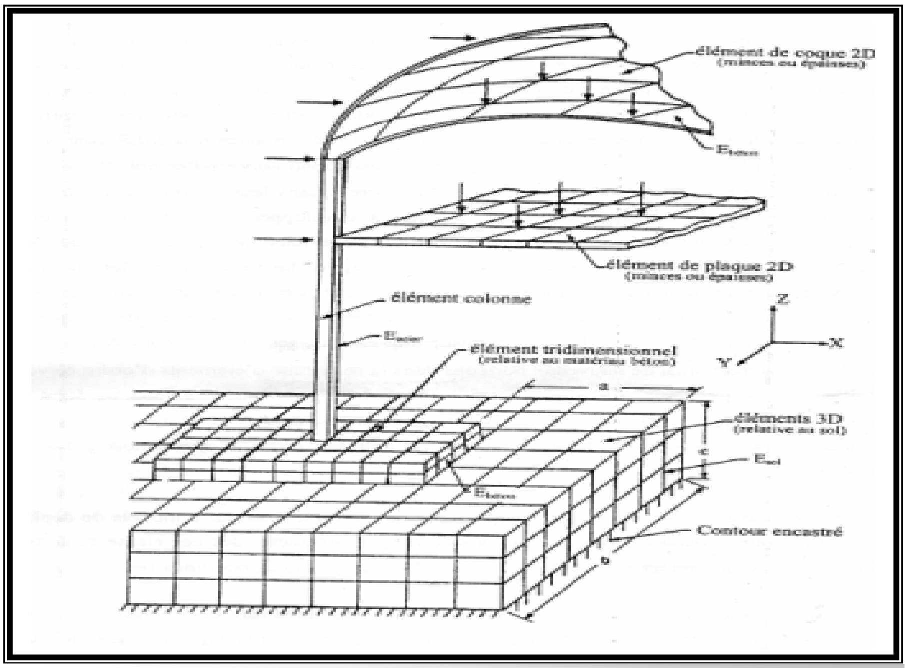


***Figure (2-3):structure type en génie civil es sa discrétisation* [11]**

L'opération de discrétisation est aussi importante que celle de la modélisation. Elle implique essentiellement deux choix:

* L'un porte sur le type d'élément finis à utiliser, les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation.

* L'autre de la finesse de cette discrétisation, en liaison avec le maillage qui est guidé essentiellement par la géométrie, à savoir par les discontinuités (trous, variations d'épaisseurs, d'inertie ou de matériau…), les conditions d'appui et chargement, les étapes de construction, les zones à forte variation des contraintes ou déplacements (découpage plus fin), certains aspects de la rhéologie (orthotrope, lignes de failles..), etc.

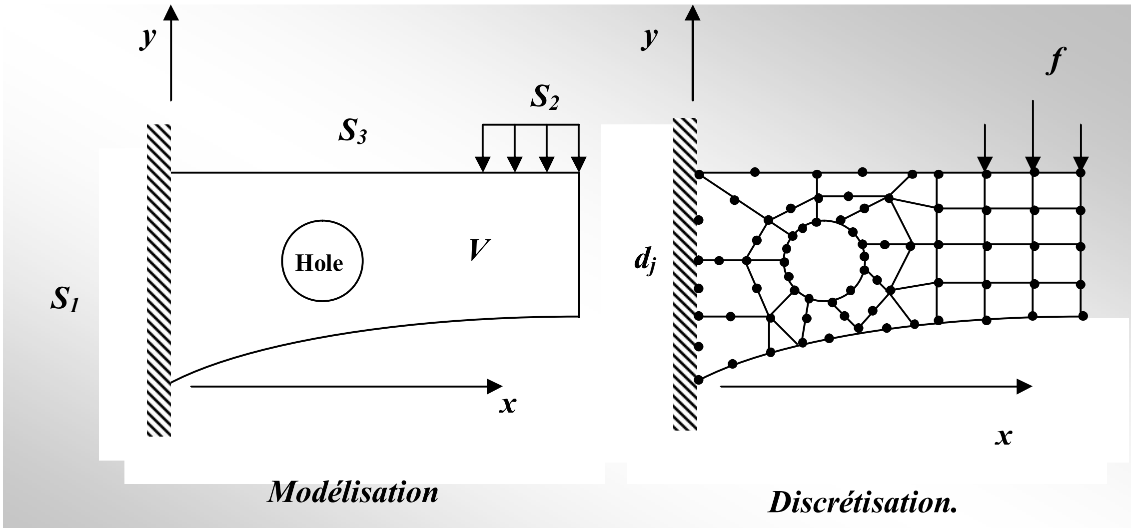
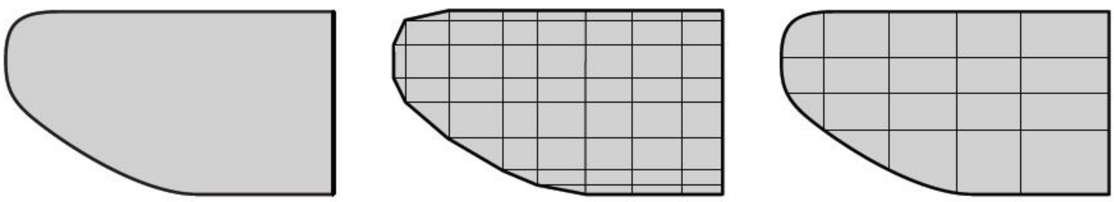


Figure (2-4) : condition aux limites

2-2-4) Discrétisation géométrique:

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.
Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure (2.5). Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.



(a) pièce à étudier et présentant des congés de raccordement

(b) modifier la taille des éléments et raffiner au niveau des courbures

(c) utiliser des éléments à frontière courbe

Figure 2.5 - Erreur de discrétisation géométrique

2-2-5)Critères de convergence :

2-2-5-1) Introduction:

Dans la méthode des éléments finis, il existe deux types de convergence :

- La convergence « ***h*** », par raffinement du maillage sans modification de l'interpolation.
- La convergence « ***p*** » par enrichissement de l'interpolation sans modification du maillage.

2-2-5-2) Convergence « h »:

Considérons un maillage d'éléments finis **(Fig.2-6)** et appelons ***h*** la dimension caractéristique d'un élément (longueur du plus grand coté, diamètre du cercle circonscrit). On subdivise toujours davantage le domaine en éléments toujours plus petits, chaque nouvelle division contenant la précédente, conservons pour les éléments de même type, constamment la même approximation du champ. On appelle critères de convergence les conditions que l'interpolation doit respecter pour que la solution approchée tende vers la solution exacte quand la taille des éléments finis tend vers zéro

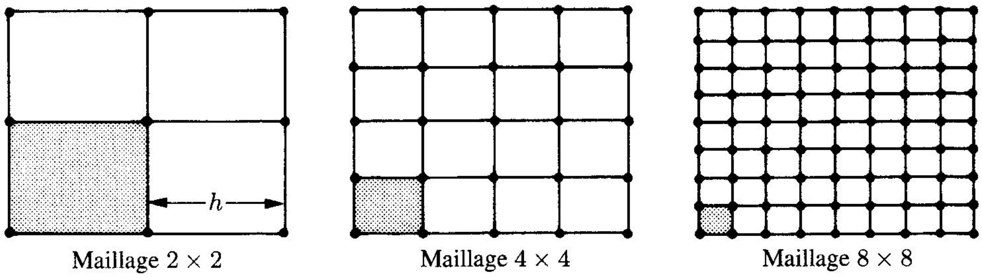


Figure: (2-6) : Subdivision plus poussée pour étudier la convergence ***h*** [17]

2-2-5-3) Convergence « P »:

Partant d'un maillage donné d'élément finis et appelons p le degré des polynômes utilisés pour l'interpolation. On conserve le maillage choisi et on enrichit le champ approché des éléments en augmentant le degré de ***p***.
Alors, si les critères de convergences sont satisfaits, la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque le degré de l'interpolation p tend vers l'infini. C'est la technique de la convergence ***p***.

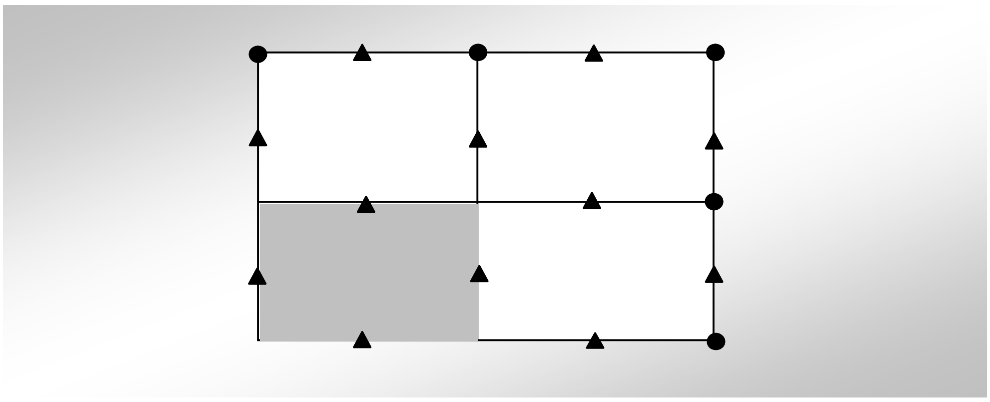


Figure:(2-7) : Augmentation du degré de l'interpolation pour étudier la convergence ***p*** [17]