

المحاضرة السادسة

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان Spearman

تمهيد:

رأينا في المحاضرة السابقة أن معامل الارتباط بيرسون يستعمل لما تكون العلاقة خطية بين درجات متغيرين كميين (مستوى فئوي)، إلا أن العلاقة بين المتغيرات في البحوث النفسية والتربوية لا تكون دائما خطية، فمثلا إذا أردنا التمييز بين سبع تقديرات للطلاب في امتحان ما (ممتاز، جيد جدا، جيد، حسن، متوسط، ضعيف، ضعيف جدا)، فنقوم بترتيبها من أعلاها (ممتاز) إلى أدناها (ضعيف جدا)، وهذه العملية ستقودنا إلى اعتماد اختبارات احصائية تعتمد على رتب المتغيرات، وليس على قيمها الكمية، ومن أهم هذه الأدوات وأفضلها هناك معامل الارتباط لسبيرمان، الذي يعد من الأدوات الاحصائية اللابارامترية.

توصل شارل سبيرمان Charles Spearman إلى معادلة لحساب معامل الارتباط بين متغيرين في حال القياس الترتيبي، ولذلك يسمى معامل ارتباط الرتب أو معامل ارتباط سبيرمان، وتعتمد معادلة سبيرمان على مستوى القياس الرتبي، أو ترتيب الدرجات (إذا كانت في مستوى فئوي أو نسبي) (مراد، هادي، وجاد الرب، 2017).

- لا يعتمد هذا المعامل في حسابه على البيانات الخام، ويصلح لحساب العلاقات بين البيانات الرقمية بعد ترتيبها، والبيانات الوصفية (ممتاز، جيد، متوسط، ضعيف...)
- تتراوح قيمته بين $(1-)$ و $(1+)$
- يكون الارتباط تام وموجب إذا كانت قيمة هذا المعامل تساوي $(1+)$ ، أي لما نحصل على تساوي تام في ترتيب المتغيرين (رتبة الفرد هي نفسها في المتغيرين)
- يكون الارتباط تام وسالب إذا كانت قيمة هذا المعامل $(1-)$ ، أي لما نحصل على ترتيب عكسي للأفراد في المتغيرين، تكون رتبة الفرد في المتغير (x) الأولى، والأخيرة في المتغير (y) وهكذا.
- يستعمل معامل ارتباط سبيرمان عندما لا يكون حجم العينة كبيرا.

- مجموع الفروق (D) يساوي دائما صفر (بوعلاق، 2009).

قانونه هو:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث أن:

6 و 1 ثوابت في القانون.

D: الفرق بين رتب نفس الفرد في المتغير X و Y.

D²: مربع الفرق بين رتب الأفراد في المتغيرين.

n: حجم العينة (Bernstein& Bernstein, 1999)

المثال الأول: كانت الترتيب لـ 12 طالب في مادة الفيزياء (X) والرياضيات (Y) كما يلي:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	N
6	2	5	8	3	10	4	1	12	9	7	11	X
9	2	4	7	3	12	6	1	11	8	5	10	Y

المطلوب: أوجد معامل الارتباط المناسب، ثم اختبر الدلالة الاحصائية؟

الحل:

- حساب معامل الارتباط المناسب واختبار الدلالة الاحصائية.
- بما أن المعطيات مرتبة نحسب معامل الارتباط سبيرمان مباشرة.

N	X	Y	D	D ²
1	11	10	1	1
2	7	5	2	4
3	9	8	1	1
4	12	11	1	1
5	1	1	0	0
6	4	6	-2	4
7	10	12	-2	4
8	3	3	0	0
9	8	7	1	1
10	5	4	1	1
11	2	2	0	0
12	6	9	-3	9
Σ	/	/	0	26

- نحسب الفرق بين رتب المتغير الأول ورتب المتغير الثاني.

- ثم نقوم بتربيع الفرق بين رتب الأفراد في المتغيرين.

- ثم نحسب معامل الارتباط سبيرمان:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6(26)}{12(143)}$$

$$r_s = 1 - \frac{156}{1716}$$

$$r_s = 1 - 0.09$$

$$r_s = 0.91$$

التفسير: معامل الارتباط 0.91 معامل موجب قوي، أي أن هناك علاقة طردية موجبة قوية، معناه كلما كانت رتبة الطالب في مادة الفيزياء جيدة كلما كانت كذلك في الرياضيات والعكس صحيح.

ولمعرفة الدلالة الإحصائية لمعامل ارتباط بيرسون هناك طريقتين:

- **الطريقة الأولى:** مقارنة r_s المحسوبة مع r_s المجدولة لمعرفة الدلالة الإحصائية لقيمة معامل الارتباط، يجب أن نقارن القيمة المحسوبة مع القيمة المجدولة التي تستخرج من الجداول الإحصائية الخاصة بمعامل سبيرمان.

- **الطريقة الثانية:** من خلال حساب المعادلة التالية:
$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r)^2}}$$

ثم نقارن "ت" المحسوبة مع "ت" الجدولية التي تستخرج من جداول خاصة بها، من خلال حساب درجة الحرية $(df = n-2)$.

وبالنسبة للجداول التي تستخرج منها القيم المجدولة سوف تعطى لكم في حصة التعليم الحضوري، من أجل التدريب عليها.

إذن لمعرفة الدلالة الإحصائية أو اختبار الدلالة نحدد:

*** المشكلة:** هل هناك علاقة ذات دلالة إحصائية بين رتب الطلاب في مادة الفيزياء ورتبهم في مادة الرياضيات؟

*** الفرضيات:** H_0 : لا توجد علاقة ذات دلالة إحصائية بين رتب الطلاب في مادة الفيزياء ورتبهم في مادة الرياضيات، ويمكن كتابتها على شكل: $r_p = 0$

H_1 : (فرضية بديلة موجهة) توجد علاقة طردية ذات دلالة إحصائية بين رتب الطلاب

في مادة الفيزياء ورتبهم في مادة الرياضيات، ويمكن كتابتها على شكل: $r_p > 0$

*** الاختبار المناسب:** اختبار "ت"
$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r)^2}}$$

*** العمليات الحسابية:**

$$T_c = \frac{0.91\sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(0.91)^2}}$$

$$T_c = \frac{0.91\sqrt{10}}{\sqrt{1-0.83}}$$

$$T_c = \frac{2.88}{0.41}$$

$$T_c = 7.02$$

إذن القيمة المحسوبة لـ "ت" بلغت 7.02، سوف نستخرج قيمة "ت" المجدولة من جدول خاص بـ "ت"، ولذلك نحتاج إلى درجة الحرية والتي تساوي: $df = n - 2 = 12 - 2 = 10$ ، وأيضا نحتاج إلى مستوى الدلالة α الباحث هو الذي يحدده هنا نحدد $\alpha = 0.05$ ، بعد ذلك نذهب إلى جدول "ت" ونبحث عند نقطة تقاطع مستوى الدلالة 0.05 و درجة الحرية 10 عند فرضية بديلة موجهة (الطرف الموجب)، ونستخرج قيمة "ت" المجدولة والتي تساوي: 1.81.

$$T_T = 1.81$$

*** اتخاذ القرار:** بما أن "ت" المحسوبة 7.02 أكبر من "ت" المجدولة 1.81، نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ودرجة حرية $df = 10$ ، وبالتالي توجد علاقة طردية ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في مادة الفيزياء ورتبهم في مادة الرياضيات.

*** التفسير:** الباحث متأكد بنسبة 95% من أن هناك علاقة طردية ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في مادة الفيزياء ورتبهم في مادة الرياضيات.، مع نسبة خطأ 5%.

المثال الثاني: نفترض أنه طبق اختبارين على عينة مكونة من 5 أفراد (طلبة) فكانت النتائج كما يوضحها الجدول التالي:

5	4	3	2	1	N
5	7	6	8	11	X
2	11	7	9	10	Y

المطلوب:

أوجد معامل الارتباط المناسب بعد ترتيب الدرجات، ثم اختبر الدلالة الاحصائية؟

الحل:

- حساب معامل الارتباط المناسب واختبار الدلالة الاحصائية.
- بما أن المعطيات غير مرتبة وطلب مني ترتيبها، نقوم أولاً بترتيبها، ثم نحسب معامل الارتباط سبيرمان.

n	X	Y	رتب x	رتب y	D	D ²
1	11	10	1	2	-1	1
2	8	9	2	3	-1	1
3	6	7	4	4	0	0
4	7	11	3	1	2	4
5	5	2	5	5	0	0
Σ	/	/	/	/	0	6

- نقوم بترتيب درجات المتغير الأول X.
- ثم نقوم بترتيب درجات المتغير الثاني Y.
- نحسب الفرق بين رتب المتغير الأول ورتب المتغير الثاني.
- ثم نقوم بتربيع الفرق بين رتب الأفراد في المتغيرين.
- ثم نحسب معامل الارتباط سبيرمان:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6(6)}{5(24)}$$

$$r_s = 1 - \frac{36}{120}$$

$$r_s = 1 - 0.3$$

$$r_s = 0.70$$

التفسير: معامل الارتباط 0.70 معامل موجب قوي، أي أن هناك علاقة طردية موجبة وقوية.

إذن لمعرفة الدلالة الاحصائية أو اختبار الدلالة نحدد:

*** المشكلة:** هل هناك علاقة ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في الاختبار الأول ورتبهم في الاختبار الثاني؟

*** الفرضيات:** H_0 : لا توجد علاقة ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في الاختبار الأول ورتبهم في الاختبار الثاني، ويمكن كتابتها على شكل:

$$r_p = 0$$

H_1 : (فرضية بديلة موجهة) توجد علاقة طردية ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب

في الاختبار الأول ورتبهم في الاختبار الثاني، ويمكن كتابتها على شكل: $r_p > 0$

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r)^2}} \text{ اختبار "ت"}$$

*** العمليات الحسابية:**

$$T_c = \frac{0.70\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-(0.70)^2}}$$

$$T_c = \frac{0.70\sqrt{3}}{\sqrt{1-0.49}}$$

$$T_c = \frac{1.21}{0.71}$$

$$T_c = 1.70$$

إذن القيمة المحسوبة لـ "ت" بلغت 1.70، سوف نستخرج قيمة "ت" المجدولة من جدول خاص بـ "ت"، ولذلك نحتاج إلى درجة الحرية والتي تساوي: $df = n - 2 = 5 - 2 = 3$ ، وأيضا نحتاج إلى مستوى الدلالة α الباحث هو الذي يحدده هنا نحدد $\alpha = 0.01$ ، بعد ذلك نذهب إلى جدول "ت" ونبحث عند نقطة تقاطع مستوى الدلالة 0.01 و درجة الحرية 3 عند فرضية بديلة موجهة (الطرف الموجب)، ونستخرج قيمة "ت" المجدولة والتي تساوي: 4.54.

$$T_T = 4.54$$

*** اتخاذ القرار:** بما أن "ت" المحسوبة 1.70 أقل من "ت" المجدولة 4.54، نقبل الفرضية الصفرية عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.01$ ، ودرجة حرية $df = 3$ ، وبالتالي لا توجد علاقة طردية ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في الاختبار الاول ورتبهم في الاختبار الثاني.

المثال الثالث: أرادت باحثة دراسة العلاقة بين درجات 8 طلبة في اختبار الاحصاء والقياس النفسي، وتحصلت على البيانات التالية: علما أن التقييم كان على 100.

N	1	2	3	4	5	6	7	8
X	75	75	76	77	78	77	80	77
Y	72	55	60	58	54	55	54	52

المطلوب:

أوجد معامل الارتباط المناسب بعد ترتيب الدرجات، ثم اختبر الدلالة الاحصائية؟

الحل:

- حساب معامل الارتباط المناسب واختبار الدلالة الاحصائية.

بما أن المعطيات غير مرتبة وطلب مني ترتيبها، نقوم أولا بترتيبها، ثم نحسب معامل الارتباط سبيرمان.

N	X	Y	رتب x	رتب y	D	D ²
1	75	72	7.5	1	6.5	42.25
2	75	55	7.5	4.5	3	9
3	76	60	6	2	4	16
4	77	58	4	3	1	1
5	78	54	2	6.5	-4.5	20.25
6	77	55	4	4.5	-0.5	0.25
7	80	54	1	6.5	-5.5	30.25
8	77	52	4	8	-4	16
Σ	/	/	/	/	0	135

- نقوم بترتيب درجات المتغير الأول X.
- نلاحظ أن هناك درجات متكررة، ففي هذه الحالة نعطي لها الرتبة المتوسطة من خلال قسمة رتبها المتتالية على عدد مرات تكرارها.
- مثلاً: الدرجة 77 تكررت ثلاث مرات نقوم بجمع رتبها المتتالية وقسمتها على عدد مرات تكرارها، وبالتالي نقوم بجمع $4=3/5+4+3$ ، وبالتالي تأخذ كل درجة رتبة 4، وهكذا نفس الشيء للمتغير الثاني.
- ثم نقوم بترتيب درجات المتغير الثاني Y.
- نحسب الفرق بين رتب المتغير الأول ورتب المتغير الثاني.
- ثم نقوم بتربيع الفرق بين رتب الأفراد في المتغيرين.
- ثم نحسب معامل الارتباط سبيرمان:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum D^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6(135)}{8(63)}$$

$$r_s = 1 - \frac{810}{504}$$

$$r_s = 1 - 1.61$$

$$r_s = -0.61$$

التفسير: معامل الارتباط -0.61 - معامل سالب متوسط، أي أن هناك علاقة عكسية سالبة متوسطة.

إذن لمعرفة الدلالة الاحصائية أو اختبار الدلالة نحدد:

*** المشكلة:** هل هناك علاقة ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في الاحصاء ورتبهم في القياس النفسي؟

*** الفرضيات:** H_0 : لا توجد علاقة ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في الاحصاء ورتبهم في القياس النفسي، ويمكن كتابتها على شكل:

$$r_p = 0$$

H_1 : (فرضية بديلة موجهة) توجد علاقة عكسية ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب

في الاحصاء ورتبهم في القياس النفسي، ويمكن كتابتها على شكل: $r_s < 0$

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r)^2}} \text{ اختبار "ت" المناسب: اختبار "ت"}$$

*** العمليات الحسابية:**

$$T_c = \frac{-0.61\sqrt{8-2}}{\sqrt{1-0.61^2}}$$

$$T_c = \frac{-0.61\sqrt{6}}{\sqrt{1-0.37}}$$

$$T_c = \frac{-1.49}{0.79}$$

$$T_c = -1.87$$

إذن القيمة المحسوبة لـ "ت" بلغت -1.87، سوف نستخرج قيمة "ت" المجدولة من جدول

خاص بـ "ت"، ولذلك نحتاج إلى درجة الحرية والتي تساوي: $df = n-2 = 8-2 = 6$ ، وأيضا

نحتاج إلى مستوى الدلالة α الباحث هو الذي يحدده هنا نحدد $\alpha = 0.05$ ، بعد ذلك نذهب إلى

جدول "ت" ونبحث عند نقطة تقاطع مستوى الدلالة 0.05 و درجة الحرية 6 عند فرضية بديلة موجهة (الطرف السالب)، ونستخرج قية "ت" المجدولة والتي تساوي: 1.94.

$$T_T = 1.94 \text{ إذن}$$

* **اتخاذ القرار:** بما أن "ت" المحسوبة 1.87 (نأخذ القيمة المطلقة لما تكون القيمة سالبة) أقل من "ت" المجدولة 1.94، نقبل الفرضية الصفرية عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ، ودرجة حرية $df = 6$ ، وبالتالي لا توجد علاقة طردية ذات دلالة احصائية بين رتب الطلاب في الاحصاء ورتبهم في القياس النفسي.

قائمة المراجع:

بوعلاق، محمد. (2009). الموجه في الاحصاء الوصفي والاستدلالي في العلوم النفسية والتربوية والاجتماعية. الجزائر: دار الأمل للطباعة والنشر والتوزيع.

مراد، صلاح أحمد، هادي، فوزية عباس، وجاد الرب، هشام فتحي. (2017). الاحصاء الاستدلالي في العلوم السلوكية. القاهرة: دار الكتاب الحديث.

Bernstein . R & Bernstein. S. (1999). Schaum's Outline of Elements of Statistics II: Inferential Statistics. Ed 1: the Mc Graw. Hill Companies; Inc.

أنجز التمارين التالية:

التمرين الأول:

يمثل الجدول التالي: درجات الطلبة في اللغة العربية (X) والاجتماعيات (Y) كما يلي:

8	7	6	5	4	3	2	1	N
13	12	10	8	16	11	14	12	X
16	14	11	9	18	12	15	15	Y

المطلوب:

- احسب معامل الارتباط المناسب بعد ترتيب الدرجات، ثم اختبر الدلالة الاحصائية عند 0.01 علماً أن القيمة المجدولة في اتجاه 3.14 وفي اتجاهين 3.70 ؟

التمرين الثاني:

الجدول التالي يمثل علامات أحد تلاميذ الابتدائي وعدد الساعات التي يدرسها لامتحان كما يلي:

5	4	3	2	1	X عدد الساعات
8	6	7	5	4	Y العلامات

المطلوب:

- هل تعتقد بوجود علاقة بين المتغيرين ولماذا؟
- احسب معامل الارتباط بيرسون بين المتغيرين، واختبر الدلالة الاحصائية عند 0.05؟
- احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين هذين المتغيرين واختبر الدلالة الاحصائية عند 0.05، علماً أن القيمة المجدولة في اتجاه 2.35 وفي اتجاهين 3.18 ؟