دروس للأساتذة التعليم المتوسط
السنة الأولى رياضيات (LMD)

الوحدة : تاريخ الرياضيات 1

من إعداد

يوسف قــرقــور

قسم الرياضيات

المدرسة العليا للأساتذة، القبة-الجزائر

فهرست وحدة تاريخ الرياضيات 1

ما فائدة تاريخ العلوم؟

إذا كان العلم، وهو العامل الحضاري الذي يزيد من سيطرة الإنسان على العالم، يتجـه نحو المستقبل حيث لا تزال أمامه تساؤلات عديدة، فما الفائدة من تاريخ العلوم؟ إن الآراء حول هذا السؤال تنقسم إلى اتجاهين : فهناك من يقول إن لا سبيل إلى فصل الفلسفة عـن تاريخهـا، لأنها التاريخ بعينه، أما التاريخ بالنسبة إلى العلم فليس علما، بل هو ماضي العلم وما تأتى مـن سعي الإنسان وراء الحقيقة. أما الرأي الآخر فانه يجد أن تاريخ العلم يخبرنا بتقدم الإنسان فـي شرحه للعالم وبتقدم الفكر الإنساني. والحقيقة إن الفيلسوف لا يبدأ فلسفته من حيث انتهى سلفه. بل إن الفيلسوف الحقيقي يبدأ فلسفته من ابعد من ذلك، من أول الأسس. وهمه أن يكشف لنا عن حقيقة الوجود ومعناه، وبالتالي فإن نظرته تكون جذرية، بحيث لا تترك المجال لسؤال ابعد، كما أنها تكون شاملة، لا تستثني شيئا من افقها. وهذا يعني الفلسفات لا تتوالى بخط مستقيم تتزايـد معه كمية المعلومات وتتوسع آفاق المعرفة. إن الفلسفة هي ولوج الفيلسوف إلى باطن الوجـود، ولكل فلسفة طريقها، لأن كل فلسفة هي عالم جديد وبناء مستقل. فالفلسفات لا تقـاس بمقيـاس التزايد، لكن بمقياس الولوج إلى باطن الوجود وأسسه. إن الفلسفة لا تخدم الإنسـان كـالعلم ولا تزيد سيطرته على العالم، لكنها تجعله يتحد بالوجود في ضوء الحقيقة.

أما العلم، فانه يتزايد في شكل مستمر، ولا يحتاج عالم اليوم لأن يدرس تاريخ العلوم، بل يكفيه أن ينطلق من العلم في عصره. إن تاريخ العلوم مهم من حيث ارتباطه بالحضارة، لا من حيث أن العالم يحتاج إليه، فالعالم يستبدل بالتاريخ المختبر والاعتماد على العمليات الرياضـية، وهذا يعني إن العلوم، مهما تنوعت، تجعل من الرياضيات مثالها والإدارة للتعبيـر عنهـا فـي مقدماتها ونتائجها. وهذا الارتباط بالرياضيات يعني أن العلم ينظر إلي موضوعاته المختلفة من

زاوية اقترابها من الكم والامتداد بدلا من الولوج إلى العمق. بالرغم من ذلك، فإن لتاريخ العلوم أهمية كبرى. إنه يعرفنا بالحضارات أولا، كما أنه يمكننا من تحديد الطريق التي اتبعها الإنسان في محاولاته لفهم العالم والسيطرة عليه.

لتاريخ العلوم فائدة تربوية هامة، إذ نرى من خلال دراسته، كيف إن العلوم، التي نملكها اليوم، نشأت تدريجيا وببطيء كبير، ولكنها استمرت في سيرها إلى أن انتهت إلى الحصول على استقلالها من جانب المنهج ومن جانب الموضوع. وما تاريخ الفرد إلا تاريخ الإنسانية المصغر، وبالتالي لا يُكتسب العلم إلا بالاستمرار والانتقال دائما نحو المعرفة الأدق الناجمة عن الدرس والتحليل، ومن ثم تأليف هذه المعارف بشكل يحافظ على وحدة العلوم.

أما الفائدة التربوية الأخرى من دراسة تاريخ العلوم، وخصوصا عند العرب، فلأنه يربطنا ثقافيا بحضارتنا ويحثنا على العمل في سبيل رفع مستواها.

إن لدراسة تاريخ العلوم العربية –كل مكتوب باللغة العربية– مجالا واسعا، لم يستغل لحد الآن بشكل واسع ودقيق، ودراسته لا تزال بطيئة جدا، إذ لا نزال نجهل معظم الأعمال العلمية التي أنجزت من طرف علماء العرب والمسلمين سواء في المشرق العربي أو مغربه.

لماذا تاريخ الرياضيات؟

من المعروف أن كثيرا من تلاميذ المستوى الأساسي والثانوي يعتبرون مادة الرياضيات صعبة المنال وجافة ومجردة ولا منفعة في دراسة بعض مواضيعها. ولا يخص هذا المدارس الجزائرية وحدها بل نراه ساريا أيضا في مدارس معظم دول العالم. لذا لا بد من البحث عن وسائل وأدوات تجعل الرياضيات مادة محبوبة من قبل التلاميذ تؤدي بهم إلى الرغبة في تعلمها والبحث عن خباياها. ويتم ذلك بإدخال وسائل مسلية ومشوقة في تعلم الرياضيات وبالابتعاد عن تعليم هذه المادة في شكلها القطعي (الأسلوب الجاف الرمزي) والصوري (الصيغي) (Formel) كما يظهر حاليا في الكتب المدرسية المعتمدة. لذا يستحسن إدخال الوظيفة الاجتماعية للرياضيات وربط منهج تدريسها بالبيئة الاجتماعية والطبيعية، وهذا سيساعد التلميذ على ربط المدرسة بالمحيط الذي يعيش فيه، بحيث يجعله لا يشعر بعزلة معارفه عن النشاط الاجتماعي السائد ونظام الطبيعة.

ومن ضمن الأمور التي نراها ضرورية لتقريب الرياضيات إلى التلميذ:

1. **بعدها التاريخي** : من حيث تطور الأفكار وانتقالها عبر التاريخ، وتعليل ظهور المفاهيم الرياضية. لذا فإن لتاريخ الرياضيات أهمية كبرى إذ يمكّن من:

– تتبع (وتبرير، أحيانا) مراحل ظهور المفاهيم الرياضية باعتماد النصوص الأصيلة ومصدر منشئها.

– إدخال هذه المفاهيم في إطار شامل ومعالجة كيفية توظفيها.

– تحليل العراقيل التي يصادفها الرياضي للوصول إلى نتائجه.

– إدخال البعد الحضاري والثقافي للبيئة التي تنشأ فيها الرياضيات والتعرف على أهم المساهمين

والمبدعين في هذه المادة.

2. تعليلها الهندسي : إن إدخال الأشكال الهندسية في تعليل حلول المسائل المطروحة تجعل التلميذ يستوعب هذه الحلول بشكل أفضل، وتقوي رغبته فيها وفي تبريراتها.

1. البعد التاريخي

لتوظيف تاريخ الرياضيات في الميدان التربوي يوجد دائما تعليلان اثنان :

أ. رد فعل ضد تعليم الرياضيات على الشكل القطعي والصوري (الصيغي) (Dogmatique et Formel).

ب. ضرورة النظر إلى الأهمية الخاصة لدور الرياضيات المرتبط بالجانب الاجتماعي .

لذا نرى على الأقل خمس نقاط هامة يمكن اعتمادها لاستغلال تاريخ الرياضيات كأداة بيداغوجية، وهي :

1 . إزالة الاعتقاد بأن علم الرياضيات علم معقد وشكلي وقطعي ومغلق (تعاريف، بديهيات، نظريات)، مما يؤدي إلى الانطباع بأن تعلم الرياضيات هو خطاب بلا معنى ولا روح عند الطالب وحتى عند المعلم. ومردّ ذلك أننا لا نعرف – بالضبط – ما هو سؤال الذي يجيب عنه المعلم : لماذا هذه النظريات؟ لماذا هذا المفهوم؟ وتاريخ الرياضيات يمكنه تقديم بعض المعلومات والإشارات حول النظريات والمفاهيم بالاعتماد على حالتها والعراقيل والمشاكل التي صادفت العلماء أثناء البحث عن هذه النظريات والمفاهيم.

2 . علم الرياضيات لم يظهر من العدم ولا هو بتنزيل إلا هي، بل لقد أنشئ وله تاريخ. لذا يجب البحث عن هذا الإنشاء الإنساني في سياق المنحى التاريخي والفلسفي والاجتماعي.

3 . يسمح تاريخ الرياضيات بدراسة وبحث الخطوات والمراحل التي مرت بها الرياضيات من ناحية الأفكار والمشاكل والأخطاء والعراقيل التي صادفت هذا المفهوم أو ذاك.

4 . يُمكّن تاريخ الرياضيات من فهم الأعمال الرياضية المنجزة (دور المسألة، الأخطاء المرتكبة أثناء البرهان وكذا نزاهة نظرية وبرهانها والدقة في العمل مع الارتباط بالمسائل والعراقيل البيداغوجية.

4. إن تاريخ الرياضيات كنز ثقافي لا يمكن الاستغناء عنه.

5. إن تاريخ الرياضيات هي فرصة للمكوّن ليخرج عن الرياضيات الصيغية والشكلية ليعيش جو تطور الأفكار وانتقال العلوم من فترة إلى أخرى ومن مكان إلى أخر.

2. بعد الحل الهندسي

يقول ابن خلدون عن أهمية الهندسة : "أعلم أن الهندسة تفيد صاحبها إضاءة في عقله واستقامة ... فممارسة علم الهندسة للفكر بمثابة الصابون للثوب الذي يغسل الأقدار وينقيه من الأوضار والأردان"[1]. هذه الشهادة تدل دلالة واضحة على أهمية الهندسة في التوجيهات التربوية والتعليمية. ونعلم أن من بين الأهداف العامة لتدريس الرياضيات هي " تنمية الوضوح الفكري والدقة في الحكم لدى التلميذ عن طريق تعويده على الاستدلال الاستنتاجي ودقة المنطق وتدريبه على بناء سلسلة من الاستنتاجات وعلى كشف مواطن الضعف أو الخلل في استدلال ما، وعلى ممارسة النقد البناء وتوجيهه إلى معرفة حدود الاستدلال الاستقرائي". ولتحقيق هذه الأهداف، يجب الاعتناء بالهندسة باعتبارها وسيلة فعالة لتحقيق أهداف تدريس الرياضيات بصفة خاصة

[1] عبد الرحمن بن خلدون: كتاب العبر وديوان المبتدأ والخبر في أيام العرب والعجم والبربر ومن عاصرهم من ذوي السلطان الأكبر(جزء المقدمة). تحقيق : درويش الجويدي، بيروت، المكتبة العصرية، 1996. ص. 471.

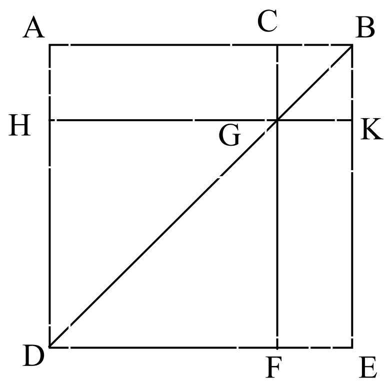
والتعليم بصفة عامة، إذ أن الهندسة تنمي مؤهلات التلاميذ العلمية ومهاراتهم، وذلك بتنشيط ذكائهم وتنمية استعدادهم وإثراء إمكاناتهم في مجال البحث والملاحظة والاستدلال والتجريد والدقة في التعبير.

وانطلاقا من هذه الأهداف نقدم بعض الأمثلة الهندسية لتعليل حلول بعض المسائل الحسابية أو الجبرية من خلال بعض المؤلفات التراثية.

1. كتاب الأصول لأقليدس : نقدم من هذا الكتاب 3 أمثلة :

أ. الشكل الرابع من المقالة الثانية [2]

إذا قسم خط مستقيم كيف ما اتفق فإن مربعي القسمين وضعف السطح الذي يحيط به القسمان مساو لمربع الخط كله[3].



برهان

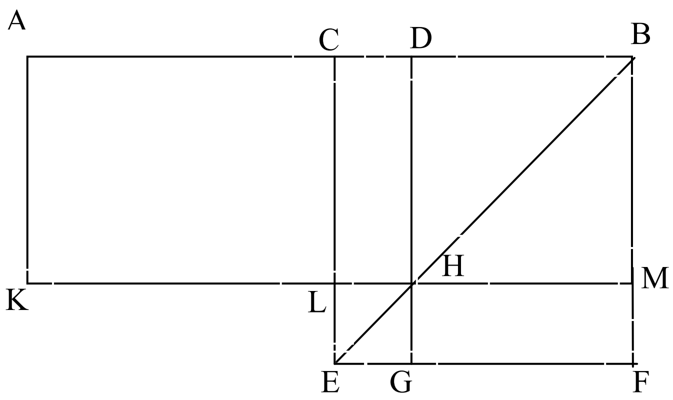
[2] B. Vitrac : *Les Eléments d'Euclide*. Paris, PUF, Vol. 1. 1990, p. 331-332.

[3] تمثل هذه المبرهنة جبريا المتطابقة الشهيرة : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

نشئ المربع ABCD الكائن من الخط AB نصل BD ثم من C نرسم الخط CF مواز لكل من الخطين AD, EB. ومن النقطة G نرسم مواز لكل من الخطين AB ، DE . ومنه مربع AB يساوي مربعي AC , CB وضعف المستطيل المحيط بالخطين AC, CB.

ب. الشكل الخامس من المقالة الثانية[4]

إذا قسم خط مستقيم بنصفين وقسمين مختلفين فإن السطح الـذي يحـيط بـه القـسمان المختلفان مع مربع القسم الذي بين موضعي القسمة مساو لمربع نصف الخط[5].



جـ. الشكل الحادي عشر من المقالة الثانية[6]

نريد أن نقسم خطا مستقيما مفروضا بقسمين حتى يكون السطح القائم الزوايا الذي يحيط به الخط كله وأحد قسميه مساويا لمربع الباقي[7].

---

[4] B. Vitrac : *Les Eléments d'Euclide*. Op., cit., pp. 333-335.

[5] القراءة الجبرية لهذه المبرهنة هي كما يلي : إذا كان AB=a و DB=b فإن القسم المحصور بين القسمين CD=a-b. ومنه يكون $(a-b)b+(\frac{a}{2}-b)^2=(\frac{a}{2})^2$

[6] B. Vitrac : *Les Eléments d'Euclide*. Op., cit., pp. 353-357.

[7] هذه المبرهنة عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية يمكن التعبير عنها جبريا كما يلي : نضع $AB=a$ و $AH=x$ ومنه تكون المعادلة $x^2=(a-x)a$ وحلها هو $x=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$.

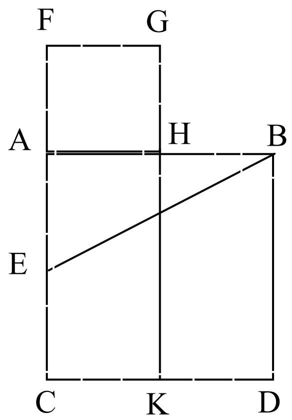
برهان

ليكن الخط المستقيم المفروض AB. ننشئ المربع ABCD ننصف AC عند النقطة E.

نصل بين B و E ثم نزيد على الخط AC زيادة في انتجاه A الى F بحيث EF=EB ، ثم ننشئ المربع AFGH ، ثم نمدد GH فيقطع DC في K. فنحصل على $ABxHB=AH^2$.

نفرض أن $AB=a$ فإن $AE=\frac{a}{2}$

لدينا $BE=EF=\frac{a\sqrt{5}}{2}$



حسب المبرهنة 47 من المقالة الأولى من كتاب الأصول لأقليدس.

ومنه $HB=a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

وكذلك فإن $AH=a\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

وباعتماد الوسط المتناسب نحصل على $\frac{AB}{HB}=\frac{HB}{AH}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.[8]

[8] يسمى هذا العدد بالعدد الذهبي وهو الحل الوحيد الموجب للمعادلة $x^2-x-1=0$.
ومن خواص هذا العدد هو $\varphi^2=1+\varphi$ و $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$ حيث φ يمثل العدد الذهبي .

حضارة ما بين النهرين
(الحضارة البابلية)

تمهيد

تجمعت المعالم الحضارية الكبرى حول الأودية الكبرى التي تقع في المناطق شبه الاستوائية الممتدة شمال خط الاستواء. ومن الواضح أن حضارة متعددة الظواهر لا تستطيع أن تنمو إلا في إقليم يستطيع فيه جماعة من الناس أن يعيشوا معا في سلام نسبي مع توافر سبل الراحة. ومن هذه الأنهار نذكر النيل، دجلة والفرات، السند، ... وغيرها. وكل نهر يروى مساحات شاسعة من الأراضي الخصبة، والأنهار لا تحمل ماء إلى البحر، بل رجالا وسلعا وأفكارا. ولا بد أن تكون كبيرة إلى درجة أنها تتيح الوسائل إلى التجمع البشري والمنافسة الكبيرة عند مصباتها. وللحضارة تعدد في الظواهر والتعقيد بحيث لا يمكن أن تنشأ بين جماعة صغيرة بل بين جماعات كبيرة نسبيا. بما أننا نهتم أولا وقبل كل شئ بأصول حضارتنا فسوف نهتم كذلك بالحضارة البابلية والمصرية لما لهما من اثر عميق في شعوب البحر الأبيض المتوسط دون ترك الحضارة الصينية والهندية لقربهما النسبي من هذه المناطق وكذا الحضارة اليونانية التي استطاعت أن تلم بهذه الحضارات والتي جاءت في فترة متأخرة نسبيا.

وهذا واضح وضوحا كافيا بشأن بلاد ما بين النهرين، فإن الفرات الأعلى يقترب جدا من البحر الأبيض المتوسط ولكن مصباته ومصبات نهر دجلة تقع في الخليج العربي. أما النيل– وهو النهر الوحيد –فيصب في البحر الأبيض المتوسط ومع هذا فالحضارة المصرية القديمة لم تنشأ بالقرب من البحر بل على مسافة بعيدة منه، لم يكن البحر عند المصريين البحر الأبيض المتوسط بل النيل نفسه، وكانت مصر "واحة نهرية طويلة وسط الصحراء".

أقدم الآثار التاريخية الخاصة بحضارة ما بين النهرين جاءت إلينا من بلاد سومر. غير أن هذه الحضارة لابد أن شملت غير السومريين الذين استوطنوا السهل. إن البحث العلمي لا يستطيع أن يكون على يقين من كيف ومتى بدأت حضارة ما أي لا يستطيع تقديم الدليل المنطقي على بدأ حضارة ما). لأن أقدم الآثار والوثائق التي في متناولنا لا تمثل لنا البداية أبدا. بل تصور مرحلة متأخرة نوعا ما ولعلها

متأخرة جدا، من هنا يمكن أن نتساءل : فهل بدأت حضارة ما بين النهرين في بلاد سومر أم انتقلت من الأقاليم المرتفعة في أعالي النهرين أو من الأقاليم الجبلية الواقعة إلى الشرق منها؟

هذه أسئلة من الصعب جدا الإجابة عنها، والمهم من هذا كله هو أن الحضارة البابلية كانت مجموعة من الشعوب تعيش علي شواطئ الفرات والخليج العربي. الذي يهمنا في هذه الحضارة هو التقليد الرياضي ونوعية الرياضيات التي كانت سائدة آنذاك. وقبل التطرق إلى مضمون هذه الرياضيات نقدم لمحة تاريخية عن المراحل التي مرت بها هذه الحضارة لما لها من ارتباطات بممارسة وتطور الرياضيات.

تحدد فترة الحضارة البابلية من سنة 3500 ق.م إلى غاية 60 ق.م ويمكن تقسيم هذه الفترة إلى المراحل التالية :

1. **المرحلة السومرية (الحكم السومري)** [3500 ق.م – 3000 ق.م]

كانت هذه الفئة تعيش على ضفاف نهر الفرات. تعتمد في عيشها على الفلاحة. فتظهر لأول مرة الفلاحة والإنتاج الفلاحي. لقد ظهرت المدن في هذه الفترة وبالتالي حياة مدنية واقتصادية مبينة على التجارة. فتكونت فئة من الصناع والكهنة والتجار ونتيجة لذلك برزت إلى الوجود إدارة لتسيير حاجيات المدن الصغيرة ومن بين المدن مدينة أرك. وحسب معلوماتنا ظهرت في هذه الفترة الكتابة والتي تسمى الكتابة المسمارية [أي الكتابة الموجودة على الألواح الطينية] وهذه الألواح مصنوعة من الطين ويكتب عليها النص بواسطة وتد يشبه المسمار وربما تكوى فيما بعد وهذا سبب من الأسباب التي بقت على حالها إلى هذا الوقت. لقد تمكن السومريون من التحكم في هذه الجهة حتى شواطئ البحر الأبيض المتوسط.

لقد ظهرت كذلك في هذه المرحلة الأنظمة المترولوجيا من كيل ووزن وقياس.

2. **المرحلة الأكادية (الحكم الأكادي)** [2500 ق.م – 2000 ق.م]

تظهر في هذه المرحلة النصوص الرياضية الأولى وجداول رياضية بها أعداد
.

3. **المرحلة البابلية (الحكم البابلي)** [2000 ق.م– 1600 ق.م]

إنها أهم مرحلة في حضارة وادي الرافدين، حيث تظهر فيها عاصمة كبيرة جدا، تتحكم في جميع الجهات من الناحية السياسية والاقتصادية، لاسيما العلمية، والحكم البابلي استطاع أن يوحد الوسائل الرياضية بين الجهات كلها، ونجهل لحد الآن الأسباب التي أدت إلى ذلك. لقد ظهرت كذلك في هذه المرحلة :

- مسائل رياضية مع خوارزميات حلولها.
- نوعية المسائل.
- مسائل في الحساب.
- مسائل في الجبر (مسائل جبرية).
- مسائل عددية (نظرية الأعداد).
- مسائل هندسية ولكنها قليلة نسبيا.
- مسائل فلكية.

4. **مرحلة الاستقرار** [1600 ق.م – 700 ق.م]

لم نعثر –حسب المعلومات والآثار والوثائق المتوفرة– على تجديد أو تطوير في الرياضيات أو في الوسائل التقنية الرياضية وفي نفس الوقت لم نجد انخفاضا في المستوى الرياضي. أما على المستوى السياسي والاقتصادي هناك فئات من الحواريين والحيتين هاجموا بابل واستطاعوا أن يتغلبوا على البابليين، وكانت لهذه الفئات صناعات جميلة من الذهب والنحاس. ولقد كان تأثير الحيتين واضحا، وقد امتد هذا التأثير إلى مصر.

وتجدر الإشارة إلى أننا نجهل إلى حد الآن لماذا لم تتطور الرياضيات في هذه الفترة ؟ طبع ربما هناك أسباب اقتصادية واجتماعية نجهلها.

5. **المرحلة الفارسية (الحكم الفارسي) (السالوسية)** [700 ق.م – 60 ق.م]

يعتبر الاختصاصيون أن الحضارة البابلية، انتهت حوالي 60ق.م. ولحد الآن أن هذه المرحلة ليست بابلية محضة، ولكن في الحقيقة حضارة بابلية وحكم وتحكم واقتصاد في يد الفارسيين (لهذا سميت المرحلة الفارسية). لأن الفارسيين هم الذين تحكموا في هذه المنطقة وعلى هذا المجتمع في تلك الفترة.

أما خصوصيات هذه المرحلة في الميدان الرياضي، فهناك تجديد في هذا المجال. ولكن السؤال المطروح : هل هذا التجديد مرتبط بالتقليد الرياضي البابلي أو

ناتج عن تأثير خارجي؟ وعندما نقوم بتحليل مقارن لبعض النصوص الموجودة نجد علاقة غير مباشرة بين التقليد البابلي وتقليد رياضي جديد ظهر في حضارة أخرى هي الحضارة اليونانية. هل تأثر اليونانيون بالحضارة البابلية أو العكس؟

مضمون الرياضيات البابلية

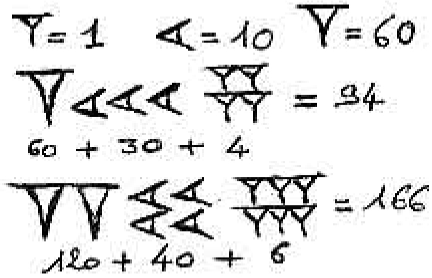
سيطر المؤرخون الأوربيون منذ القرن السابع عشر ميلادي إلى غاية القرن 20م على كتابة تاريخ الرياضيات. حيث كانوا يقولون، على إن الرياضيات اليونانية هي رياضيات يونانية محضة ولا علاقة لها بالرياضيات المصرية ولا البابلية ولا الهندية. ولهم في ذلك مبررات وبراهين إلى غاية حوالي سنة 1930م حيث الترجمة والتحليل الأول الذي أهتم بالوثائق البابلية من لوحات مسمارية وآثار، غيّر من المواقف والإيديولوجية العلمية. فظهرت مدرسة جديدة تقول : "حقيقة أن هناك علاقة كبيرة علمية بين التقليد الرياضي البابلي والتقليد اليوناني". ومنه نستنتج أن الجهل والمواقف الإيديولوجية وغياب بعض الوثائق، هو الذي شجع كتابة تاريخ غير صحيح لأنهم لا يعرفون التقليد الرياضي البابلي. وأول من تكلم وبحث في هذا الميدان وعمل تحقيقا للنصوص الرياضية البابلية هو المؤرخ الألماني أوطو نيقباور Otto Neguebeaur وتلاه المؤرخ الفرنسي F. Thureau-Dangin وغيره.

الحساب :

نظام العد عند البابليين ستيني عشري مختلط ووضعي أي أن الوضع مهم في كتابة الأرقم، وهذا اختراع هام جدا يستحق كل العناية والتقدير لأنهم أول من اخترع الوضع للأرقام الذي يسود نظامنا العشري حاليا. وأهمية الوضع هذا يفيد في تقليص الرموز وربح المكان لكتابة النصوص. ولهذا السبب نجد أن للبابليين رمزين فقط لكتابة أي عدد، هما :

 للوحدات و  للعشرات.

مثال



=1 ، = 2 ، .... ، = 9 ، = 10 ، 20
= ، ... ، 50 =

قد يكون يساوي 1 أو 60 أو 60^2 أو 60^3 أو $\frac{1}{60} = 60^{-1}$ أو $\frac{1}{60^2} = 60^{-2}$ الخ ...

أمثالة : = 12 ؛ = 21 ؛

= 71 ؛ = 100 (40 + 60).

نعلم أن النظام الستيني يكتب على الشكل التالي :

$N = a_à + a_1 60 + a_3 60^3 + ... + a_n 60^n$ حيث a_i يكتب بدلالة و حسب القيمة العددية لذلك العدد .

أمثلة : = (3 + (2 + 10) 60)= 723

= (4 + 10.60 + 2.60.60) = 7804

الكسور بالمفهوم القديم : وهي الأجزاء أي الكسر الذي صورته واحد ومقامه عدد طبيعي، حيث لم يكن لهم مفهوم الكسر كما كان فيما بعد عند العرب والهنود .

أمثلة : هو (30 أو نصف) أي نصف الساعة ؛

هو 90 أو واحد ونصف (ساعة ونصف الساعة)؛ هو 80 أو واحد وثلث (ساعة وثلث الساعة) الخ ...

نعلم كذلك أن الحساب البابلي انتقل إلى اليونان من خلال النشاطات الفلكية، ولكن اليونانيون غيروا كتابة الأعداد والأرقام المسمارية إلى الحروف الأبجدية.

مضمون الجبر [مسائل حسابية تحل بأدوات جبرية] البابلي :

توجد في اللوحات المسمارية المتطابقات الشهيرة، التي كانت تعتقد بأنها من اختراع أقليدس حتى القرن 20 م لوجودها في المقالة الثانية من كتاب الأصول.

وهذه المتطابقات هي :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$$

$$(a+2b).a + b^2 = (a+b)^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b)^2 + (b-a)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

ملاحظة

تعطى هذه المتطابقات وبعض النتائج من طرف البابليين بدون برهان غير أنه يلاحظ تغير هذا الموقف عند اليونان حيث تبدأ رياضيات برهانية .

لقد ظهرت العمليات الحسابية لأول مرة منذ حوالي 5000 سنة − لا يهم ماذا برهنوا لكن المهم بالنسبة لتاريخ الرياضيات هي الوسائل المستعملة في هذه العمليات− فالعمليات الحسابية + ، -، x ، : ، .√ تظهر لأول مرة عند البابليين. حيث أن هؤلاء قاموا بتعميم هذه العمليات إلى أشياء مجردة ، لأن كل فئة بإمكانها جمع أو طرح الأعداد، لكن توسيع هذه العمليات إلى أشياء مجردة من مساحات وقياس ووزن تعد قفزة نوعية في تطور الرياضيات.

والسؤال الذي يطرح ما هي المسائل التي ظهرت لأول مرة في اللوحات المسمارية ؟

1. مسائل جبرية (معادلات جبرية بالمفهوم الحديث) مكتوبة بالحروف المسمارية وغير معبر عنها بالرموز أو المجاهيل.

مثال ذلك : حقل مربع نزيد عليه طول ضلعه يساوي 40 . الملاحظ عن هذه المسألة انها هندسية ولكن في جبرية بالمفهوم العصري : $x^2 + x = 40$ وحل هذه المسألة في اللوحات المسمارية يعتمد على خوارزميات هي نفسها التي نعرفها الآن.

2. هناك مسائل أعم من المثال السابق وهي ذات مجهولين.

مثال ذلك : حقل مستطيل مساحته 20 ومجموع طوله وعرضه 10 ونبحث عن طوله وعرضه.

ونكتب هذه المسألة بالرموز العصرية كما يلي $\begin{cases} xy = 20 \\ x + y = 10 \end{cases}$: نجد حل البابلي لهذه المسألة يعتمد طريقة خاصة تسمى وسيلة الزيادة والنقصان وذلك بوضع $\begin{cases} x = \frac{s}{2} + a \\ y = \frac{s}{2} - a \end{cases}$ حيث أن $x + y = s$

وبعد التعويض في المعادلتين السابقتين فإننا نحصل على معادلة من الدرجة الثانية. وهذا يوضح بشكل جيد أن البابلي قد استعمل طريقة تغير المجهول لأول مرة وهي تعتبر قفزة نوعية هامة لتطور الرياضيات. في الأخير نشير إلى أن البابلي لم تكن له الحلول والخوارزميات النموذجية العامة في حله للمعادلات من الدرجة الثانية والذي سنراه عند الخوارزمي عند تعريفه للجبر. كذلك لم نجد في الرياضيات البابلية إشارة إلى مصدر أو اسم رياضي أو كتاب يكون قد اعتمد في الحلول الموجدة. ولم نجد طريقة واضحة في العمليات الحسابية غير أن النتيجة صحيحة ودقيقة.

ملاحظة :

لا تعتقد أن الرياضيات في تطور مستمر، لكن نظرتنا الآن نظرة نسبية. فهناك تقهقر وفشل في الرياضيات والدليل على ذلك أن البابليين متقدمين في هذا الميدان على غيرهم ولاسيما في نظام العد الستيني وعدم التجانس في الرياضيات، الذي لا نجده في الرياضيات اليونانية، ومعناه لا يستطيع الرياضي اليوناني جمع مساحة مع طول ومن هنا نلاحظ أن الرياضيات البابلية متطورة نسبيا عن الرياضيات اليونانية، حيث أنها حطمت عدم التجانس الذي عجز عن تحطيمه اليونان .

الهندسة عند البابليين :

لقد أينعت الهندسة في الحضارة البابلية (3500 ق.م – 60 ق.م) من جرّاء نشاطها التجاري، فاكتشف البابليون مساحة المربع والمستطيل وشبه المنحرف والمثلث وأن الزاوية المرسومة في نصف دائرة قائمة، وحجم متوازي المستطيلات والأسطوانة القائمة والموشور، وهذا كله دون برهان أيضا.

ومن مسائلهم سؤال عن مثلث عرفت قاعدته b وفيه مستقيم طوله l يوازي القاعدة ويقسم المثلث إلى مثلث وشبه منحرف الفرق بين مساحتيهما s والفرق بين إرتفاعيهما a، وفي الحل يحسبون l من العلاقة $l = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b - \frac{s}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a}\right)^2} + \frac{s}{a}$، ثم يجدون ارتفاع شبه المنحرف a_1 من العلاقة $a_1 = \frac{l - b}{2l - b}a$.

تـــمارين

ملاحظة

يرمز إلى ; الفاصل بين الأسس الموجبة والسالبة في النظام الستيني و , ترمز إلى الرتبة.

أمثلة : 12 ;13, 2 تعني في النظام الستيني ما يلي :

21, 13, 2 ;25, 12, 7 تعني كذلك في النظام الستيني ما يلي :

ويرمز كذلك المر بع بطول ضلعه والمساحة إلى مساحة المربع.

I. أكتب في نظام العد البابلي : **638122** ، **12464213**، **216002**، **12965310** (ماذا تلاحظ؟).

II. حلل النصوص البابلية التالية، باستعمال الرموز الرياضية المعاصرة، مع إعطاء الحالة العامة :

1. مسألة : 0. جمعت المساحة و(ضلع) مربعي : 45 ;0

حل : 1. ضع 1; الوحدة

2. قسم إلى جزئين 1; : 30 ;0
3. اضرب 30 ;0 و 30 ;0 : 15 ;0
4. أضف 15 ;0 إلى 45 ;0 : 1;
5. 1; هو مربعِ
6. 30 ;0 الذي ضربته من 1; اطرحه : 30 ;0
7. 30 ;0 هو (ضلع) المربع.

2. مسألة : 0. طرحت ثلث المساحة ثم أضفت للمساحة ثلث (ضلع) المربع : 20 ;0

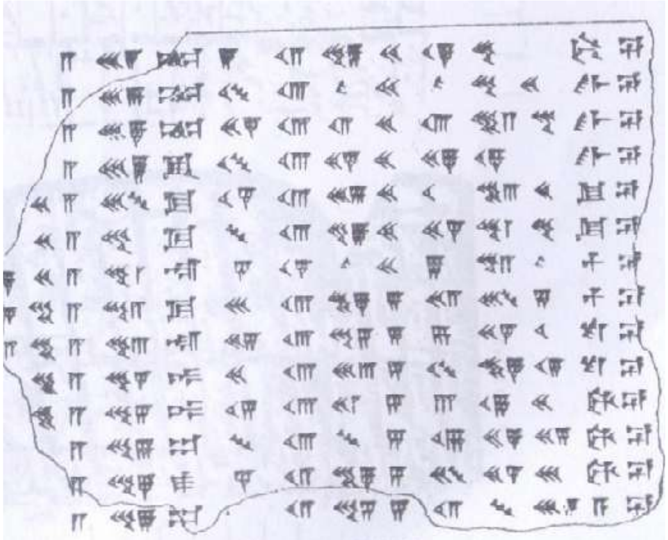
حل : 1. ضع 1; الوحدة

2. تطرح ثلث 1; : 40 ;0
3. تحمل 40 ;0 إلى 20 ;0 تكتب 13, 20 ;0
4. قسم إلى جزئين 20 ;0 الثلث الذي أضفته : 10 ;0
5. تضرب 10 ;0 و 10 ;0 : 1, 40 ;0
6. تضيف 1, 40 ;0 إلى 13, 20 ;0 : 15 ;0
7. هو مربعِ 30 ;0
8. 10 ;0 الذي ضربته، اطرحه من 30 ;0 : 20 ;0

9. مقلوب 40 ;0 هو 30 ;1
10. تحمل 30 ;1 إلى 20 ;0 : 30 ;0
11. 30 ;0 هو (ضلع) المربع.

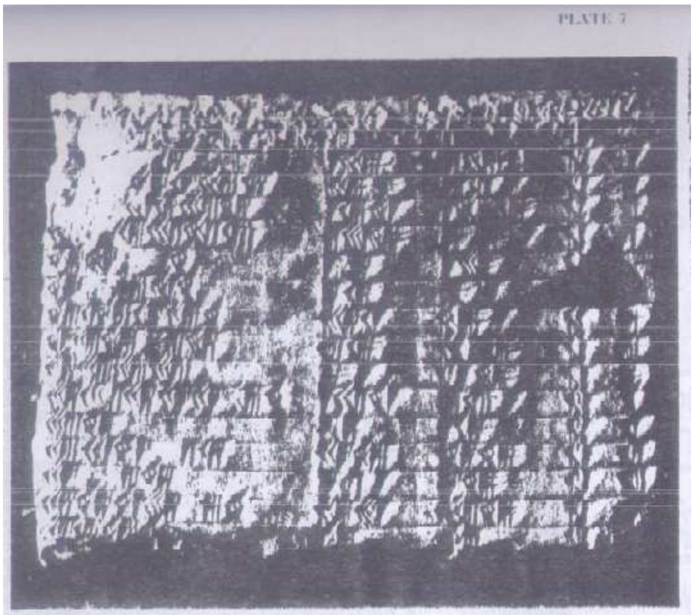
3. مسألة : 0. جمعت سبع مرات مربعي وإحدى عشر مرة المساحة : 15 ;6
حل : 1. سجل ;7 و ;11
2. احمل ;11 إلى 15 ;6 : 45 ,8 ;1
3. قسم إلى جزئين ;7 : 30 ;3
4. اضرب 30 ;3 و 30 ;3 : 15 ;12
5. أضف 15 ;12 إلى 45 ,8 ;1 : ;21 ,1
6. هو مربع ;9
7. 30 ;3 الذي ضربته، من ;9 اطرحه، ثم سجل : 30 ;5
8. مقلوب ;11 لا يمكن فصله
9. ما ذا يجب افتراضه لـــ ;11 لتعطي 30 ;5 تحمل 30 ;1 إلى 20 ;0 : 30 ;0
11. 30 ;0 هو حاصل قسمته :30 ;0 هو (ضلع) المربع.


n. YBC 4712 Rev.

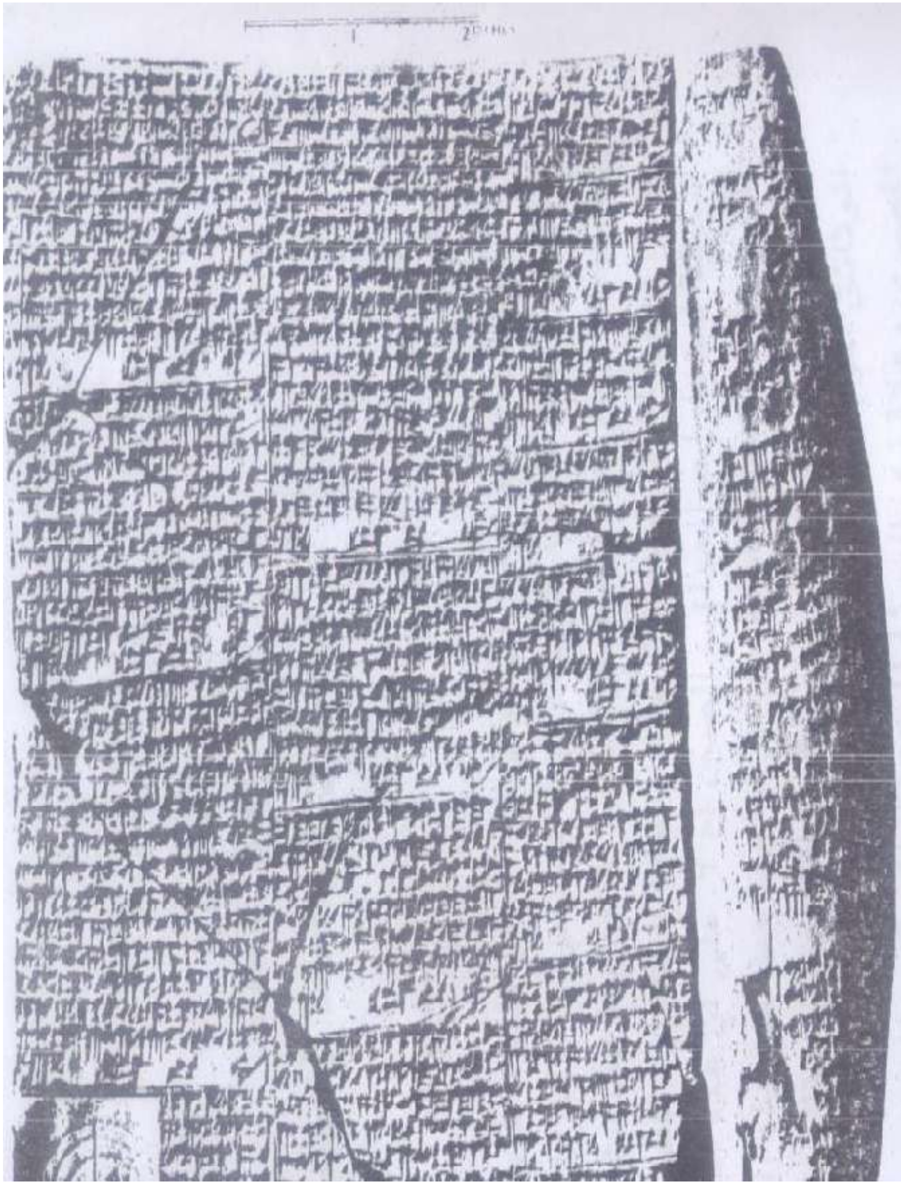


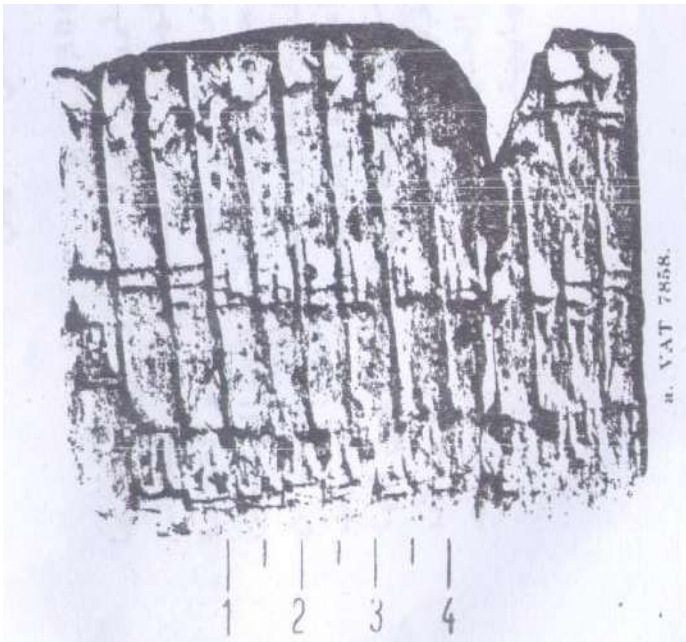
b. Sp. II, 62 ~ BM 34589.

PLATE 7



a. Plimpton 322.




1 2 3 4

بعض مظاهر
مضمون الرياضيات المصرية

تمهيد

لم يكن البحر عند المصريين هو البحر المتوسط، بل النيل نفسه، وكانت مصر "واحة نهرية طويلة وسط الصحراء" رغم أن النيل يصب في البحر المتوسط ومع ذلك فالحضارة المصرية القديمة لم تنشأ بالقرب منه، بل بعيدة منه. ومن الصعب طبعا أن نحدد بداية الحضارة المصرية، أو نقرر هل كانت سابقة لحضارات العراق والصين أم لا. على أن هذه المسائل الخاصة بالأسبقية الزمنية لا تتصل اتصالا موضوعيا بغرضنا في هذه الدروس. والواقع أننا لن نتعرض لوصف أحوال مصر قبل التاريخ. ولهذا نهتم فقط وبالاعتماد على الوثائق الموجودة على مظاهر الحضارة المصرية ومضمون النشاط الرياضي المصري وعلاقته بالبيئة المصرية. لقد قسم المؤرخون هذه الحضارة إلى عدة مراحل أساسية لتوضيح النشاطات الرياضية وهي كما يلي :

1. مرحلة المملكات الصغيرة [4000 –3300 ق.م]

ظهرت في هذه المرحلة مملكات صغيرة على شواطئ النيل، وامتد حكمها حتى شواطئ البحر الأبيض المتوسط. وظهرت هذه المملكات على أساس اقتصادي مبني على الفلاحة، حول النيل ومركزة على مياهه. وهذه الفلاحة ذات تقنيات وأساليب خاصة وذات علاقات متميزة بين العمال والفلاحين والملوك. ولاسيما أنها متعلقة بفيضان النيل بين جوان وسبتمبر. حيث أن هذه الفيضانات تأتي محملة بالخيرات من مياه زائدة وتراب جديد من الجنوب لإنعاش التراب القديم. غير أن هناك نتيجة مهمة أخرى في الأرض وهي أنها كانت مقسمة على الفلاحين، على انه يجري تقسيم جديد للأراضي لأن الفيضان يغطي التقسيمات القديمة واختفاء الحدود الترابية. إذن فيضانات النيل مبينة على خيرات من نتائج سلبية وايجابية.

ويكون لهذين المظهرين تأثير على الرياضيات كما سنرى فيما بعد.

إذن في هذه المرحلة ظهر تطور في الإنتاج الفلاحي وزيادة في الإنتاج، مما سبب في ظهور تجارة مبنية على التبادل بالسلع دون استعمال فكرة النقود أو

الدراهم، (لم تكن هناك نقود عند المصريين). ونتيجة لهذه الزيادة في الإنتاج الفلاحي كان تأثير كبير على الرياضيات وهذه نتيجة لدفع الضرائب بالمنتوجات نفسها، حيث كانت للمالك وسائل حسابية لتقسيم هذه الضرائب على الشعب وبها كذلك يستطيع أن يفرق بين الناس الذين يستطيعون دفع الضرائب والذين لا يستطيعون.

مثال : عندما يفيض النيل يغطي بعض الأراضي ولاسيما إذا كان هذا الفيضان غير عادي (يعني سابق لأوانه) فيغطي المزروعات في بعض الجهات أو نصف الأراضي، ومنه يجب أن يكون اختصاصيين لتقدير الأراضي الذي مسها الفيضان، والتي أتلف مزروعاتها، وهذا حتى أن الفلاح الذي ضاعت له المزروعات لا يمكنه دفع الضرائب في هذه المرة. بمعنى أدق ظهور أشخاص اختصاصيين في هذا الميدان لحساب قيمة الضرائب، حسب فيضان النيل (وهذا طبعا حسب الوثائق الموجودة).

إذن ظهور تقسيم جديد للأراضي بعض الفيضان وحساب الضرائب من الوسائل الهامة في ظهور وتطور الرياضيات.

2. مرحلة الدولتين (الصعيد أي مصر الجنوب ودولة مصر الشمال) [3300 ق. م−3100 ق. م]

ظهرت في هذه المرحلة الكتابة وفي نفس الوقت نظام العد.

3. مرحلة السلطنة الأولى والثانية [3100 ق.م− 2700 ق.م]

تظهر في هذه المرحلة مسائل كثيرة. مع تطور في الاقتصاد والمستوى العلمي وتجلى ذلك في :

1. ظهور توجيه للمعابد والمقامات والمقابر عند بنائها أي يوجهونها في اتجاه معين. وهذا يدل على ظهور إمكانيات تقنية لمعرفة توجيه هذه المعابد، إذن ظهور كيفية معينة لحساب الزوايا وربما ظهور بعض الآلات ولو بسيطة لتقدير الزوايا.

2. ظهور الرزنمات (اليوميات)

- يومية قمرية للحفلات
- يومية شمسية للتنبؤات الفلكية (التكهنات)
- وهذا هام جدا لأن ظهور اليوميات معناه معرفة تداول الحساب أي العمليات الحسابية وبالتالي معرفة الأعداد وعملية التعداد وهذا معناه ظهور الحساب أي العمليات الحسابية وبالتالي معرفة الأعداد وعملية التعداد.

– تطوير نظام مترولوجي (الكيل، القياس ووزن)

وهذا يدل ربما على نشاط رياضي حقيقي وراء هذه النشاطات والممارسات اليومية. ويبين كذلك ظهور مفهوم جديد وهو الكسور لأن ظهور وتطوير النظام المترولوجي معناه هناك التحويلات من وإلى، وهي تظهر الأنصاف والأرباع ... ولو لم نجد وثائق مكتوبة عليها أشياء تدل على وجود الكسور، وعندما نجد إشارات تظهر مفهوم النظام المترولوجي نستطيع أن نفرض أو نؤل أن وراء هذا النظام ربما نشاط حول أشياء مجردة هي الكسور والعمليات عليها. إذن إذا كانت لدينا وثائق لا تهم الرياضيات فعند دراستها بطريقة معمقة، يمكننا التأويل والاستفادة منها في كتابة تاريخ الرياضيات ولكن بحذر شديد وهذا على أساس الأشياء الموجودة.

4. مرحلة المملكة العتيقة [2700 ق. م– 2200 ق. م]

وهذا يدل على ظهور مملكة كبيرة، استطاعت أن توحد مصر الجنوب ومصر الشمال، وتتحكم في الجهة كلها حتى شواطئ البحر الأبيض المتوسط. وهذه المرحلة متميزة عن غيرها بأشياء لا تزال إلى حد الآن، وهي بناء الأهرامات وبعض التماثيل.

إن بناء الأهرامات يدل على أن هناك تطور في الرياضيات ولا سيما في الهندسة، بدون وجود كتاب رياضي أو بدون قراءة في الرياضيات. ومنه إذا رأينا شعب بنى أهرامات بهذه الدقة وهذه الضخامة يجب أن تكون هناك رياضيات ذات مستوى عال، مع العلم أن البحوث لا تزال مستمرة لحد الآن لمعرفة السر الرياضي في بناء هذه الأهرامات وخاصة البعثات اليابانية.

ولهذا يمكننا أن نؤل بأن النشاط الرياضي بالمفهوم العصري ظهر في هذه المرحلة، لأن هنا ربما بدأت كتابة الرياضيات. معناه ظهور الرياضيات كعلم مستقل، وهناك من يشتغل بهذا العلم ومن يهتم به.

5. مرحلة المملكة الوسيطة [2200 ق.م – 1600 ق م]

تظهر في هذه المرحلة الوثائق المتعلقة بالرياضيات الموجودة حاليا لكتابة تاريخ الرياضيات المصرية. على المستوى الاجتماعي تظهر في هذه المرحلة إن المجتمع الذي كان مبني على الفلاحين تغير وظهرت مجتمعات كثيرة، حسب المفهوم الحالي ظهور طبقات اجتماعية (أي فئات اقتصادية وثقافية) فلاحين يهتمون بالأراضي والزراعة والصناع كانوا يعيشون في المدن، وربما كان من نشاطهم فتح الطريق إلى حياة مدنية. ظهور

مشاكل صناعية، في البناء والخشب وغيره، تبيّن مسائل رياضية، ثم ظهرت فئات جديدة هي الكتّاب والمحاسبين والكهان. ومنه تظهر طبقات كثيرة، وكل طبقة تختلف عن الأخرى في مسألة الضرائب. تختلف هذه المرحلة عن المراحل الأخرى، لأن فيها ظهرت فئات غير فلاحين. ومنه ظهور مسائل حسابية وكسور لدفع الضرائب المختلفة لأن في السابق كانت تحسب على شكل مساحات أراضي. الكتّاب ما هما إلا عمال (للملك: فرعون) الذين استعملوا الرياضيات في حساب الضرائب بطريقة دائمة ومنتظمة، المفروضة من طرف الملك فرعون إذن هم الذين ينشطون الرياضيات التطبيقية. ولكن هناك فئة تنشط الرياضيات النظرية (بالمفهوم العصري) وهي فئة الكهان إذ كان لهم الوقت الكافي للعبادة والعمل في حقل الرياضيات طول العام، ولا سيما الفلك النظري، بمعنى الرياضيات النظرية التي كانت ليست لها فائدة في المجتمع آنذاك، ومن هنا ظهرت مسائل رياضية وهي قفزة نوعية في تطور الرياضيات، أي مسائل رياضية سواء كانت مرتبطة بالممارسات اليومية أو غيرها (كتابة مسائل رياضية وظهور جداول عددية) وبما أن هذه الجداول غير مرتبطة بالضرائب، فهذا يدل على وجود رياضيات حقيقية بعيدة عن حساب الضرائب ومنه لا بد من إيجاد السر.

6. مرحلة الانحطاط (المملكة المنحطة) [1600ق.م– 300 ق.م]

في هذه المرحلة بدأت الهجمات من اليونان وكانت مرحلة استقرار ثم انحطاط ولكن كان الحكم مصريا.

7. مرحلة الحكم اليوناني [300 ق.م– 30 ق. م] (مرحلة عهد بطليموس)

تحكم في مصر إسكندر الكبير عسكريا وكان ذلك حوالي 30 ق.م حيث جلب معه علماء وعسكريين، فتحول الحكم إلى حكم عسكري وسياسي يوناني.

8. مرحلة الحكم الرماني البيزنطي [30 ق. م – 670 م]

في هذه المراحل الثلاث الأخيرة ليست هناك آثارا تدل على وجود نشاط رياضي مصري رغم وجود نشاط رياضي هام وكبير ولاسيما في مدينة الإسكندرية، وهذا النشاط الرياضي هو يوناني محض ولا نستطيع ربطه بالتقليد الرياضي المصري.

مضمون الرياضيات المصرية

كتابة تاريخ الرياضيات المصرية حديثا حيث عثر على أول وثيقة في هذا الميدان سنة 1858م، وهي الوثيقة التي تدل على النشاط الرياضي المصري والوثيقة عثر عليها في الأهرام وهي تسمى "رق أو بردي" والذي عثر عليها مصري ولكن نسي اسمه وبقي اسم من اشتراها وهو ريند Rhind وهو انكليزي. والرق هو أوراق خاص مصنوع من القصب ويكتب عليه من الجهتين وجها وظهرا. وهذا النبات كان موجودا على ضفاف النيل. وهذه الوثيقة موجودة حاليا في المتحف البريطاني (رقم 10058 و10059) فقرة منها والفقرة الثانية موجودة في نيويورك. وترجمت إلى الانكليزية سنة 1877م، وفي سنة 1898 صورت ونشرت في لندن. وبعد سنة 1898م عثر على وثائق أخرى من بينها رق موسكو، ووثيقة كهول، ولوحة تبس وغيره.

تشمل الرياضيات المصرية الحساب، نظرية العدد، الهندسة، والفلك.

اختراع الكتابة : أعظم ما قام به المصريون الأولون هو اختراع الكتابة، وسواء أكانوا هم أول من اخترعها أم سبقهم في ذلك السومريون أو الصينيون، لكنهم على أية حال اخترعوها مستقلين على غيرهم.

اختراع ورق البردي :

بلغ اختراع الكتابة قيمته الاجتماعية عن طريق اختراع آخر وهو إيجاد مادة صالحة للكتابة، مع سهولة الحصول على هذه المادة بثمن في متناول الأيدي. ومن الواضح أنه طالما ظلت الكتابة مقصورة علي الوثائق ذوات الأهمية البارزة. ومنه فلابد من إيجاد مادة أرخص لكتابة النصوص الطويلة. وتغلب المصريون القدماء على تلك المشكلة الأساسية بطريقة رائعة. إذ اخترعوا ورق البردي، وهو مادة صالحة جدا للكتابة، صنعها المصريون من لب السيقان لنبات البردي الذي كان يكثر في مستنقعات الدلتا وكان اللب يقطع في شرائح طويلة توضع متعارضة في طبقتين أو ثلاث ثم تبلل بالماء ثم تضغط وتصقل. وبعد أن صنعوا منه صفحات منفصلة لم يلبثوا أن أدركوا أنه يمكن لصق كثير من هذه الصفحات بعضها إلى البعض الواحدة ذيل الأخرى.

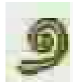
الحساب :

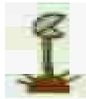
مبني الحساب المصري ونظرية العدد والهندسة على نظام عد خاص وهو نظام عشري غير وضعي أي الوضع غير مهم عكس نظام العد عند البابليين.

الترقيم عند المصريين يعتمد على هذه الرموز :

الوحدات 

العشرات 

المئات 

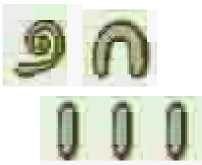
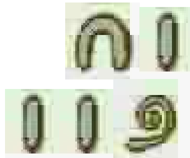
الآلاف 

عشرات الآلاف 

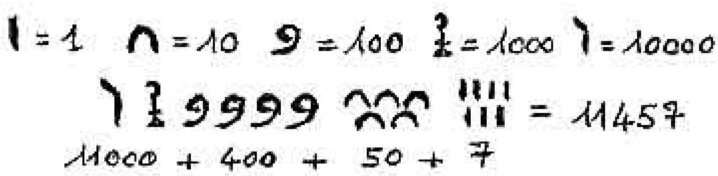
مئات الآلاف 

مليون وهو أكبر عدد 

حيث أن العدد ما هو إلا جمع الأعداد المكونة له من جميع الجهات، لأن كما قلنا الوضع لا يهم من الأعلى إلى الأسفل أو العكس من اليمين إلى الشمال أو العكس.

 = 100 + 10 + 3 = 

1456 = 



الجمع هو ضم الأعداد إلى بعضها.

الطرح هو اختصار الأعداد.

الضرب هو عملية تضعيف ثم جمع.

القسمة هي عملية تنصيف ولكن ...

مثال 1 : اضرب 13 في 8

1	13
2	26
4	52
8	104

ومنه نتيجة العملية هي 104 وهو العدد الذي يقابل 8.

مثال 2 : اضرب 15 في 7

1	15
2	30
4	60
8	120

غير أننا لا نحتاج إلى الخطوة الأخيرة، لأننا تجاوزنا 7 . وللحصول على نتيجة الضرب يكفي جمع ما يقابل العدد 7 (لأن 7 = 1 + 2 + 4). أي 15 في 7 تساوي 15 + 30 + 60 = 105.

مثال على القسمة : اقسم 104 على 8

نجد أن عمليتي الضرب والقسمة بهذه الطريقة موجودة فقط عند المصريين وهو الشعب الوحيد الذي استعمل هذه الطريقة، وهي كما نلاحظ لا تعتمد على الذاكرة ولا جداول الضرب، غير أنها طويلة.

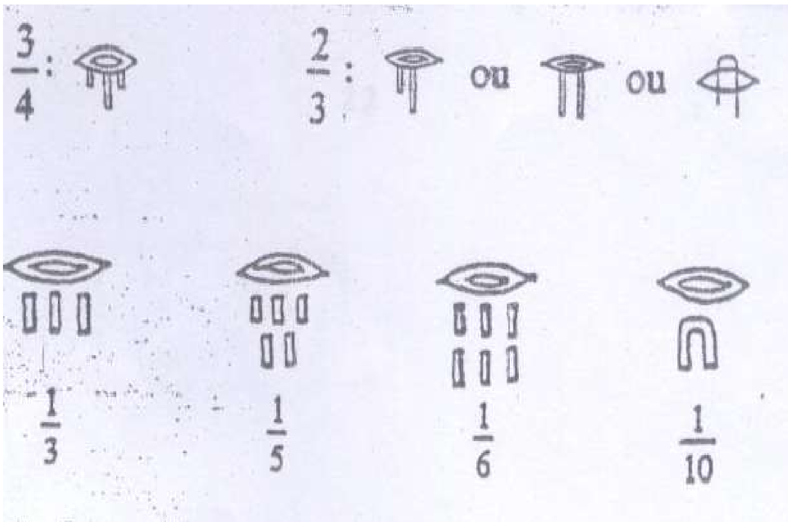
وفكرة المصريين في الكسور العددية كانت تعتمد على الأجزاء فقط أي الجزء الواحد من عدد ما. فكتبوا مثلا جزء 125 بمعنى $\frac{1}{125}$. كما استعملوا كسرين تكميليين هما $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ للتعبير عن الباقي من العدد بعد أن أخذ جزء من ثلاثة أو جزء من أربعة، كان استعمالهم للكسر الثاني نادرا أما الأول فكان شائعا جدا ولذا عبروا عن الكسر $\frac{2}{3}$ برمز منفصل يغلب وروده في النصوص الرياضية المصرية، أي أن لهم القدرة على إيجاد $\frac{2}{3}$ لكل جزء حسب القاعدة التالية في حالة n فردي أو بالعلاقة التالية في حالة n زوجي : .

وتجدر الملاحظة أن بردية رايند Rhind تبدأ بجدول لتجزئة $\frac{2}{n}$ إلى مجموع أجزاء من $n = 3$ إلى $n = 101$.

مثال ذلك : $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$

ويدل وضع هذا الجدول في بداية البردية على طبيعتها فهي تجمع ما هو نظري وما هو عملي.

إذن المصريون يعرفون المجموعة التالية :



الجبري المصري :

من بين المسائل الموجودة في بردية ريند وموسكو توجد 40 مسألة حسابية تعتمد في حلولها على بعض المعادلات الجبرية الخطية، كلها مستمدة من الحياة اليومية مثل تقسيم الأرغفة، والكيل والحبوب والحيوانات وغيرها.

وهذه المسائل كلها معادلات من الدرجة الأولى ذات كمية مجهولة، مع العلم بأن هناك معادلات في البردية ذات مجهولين من الدرجة الثانية في بردية برلين (رقم 6619) وهي من الشكل :

والإجابة كما في البردية هي $x = 8$ و $y = 6$ ومنه وهي اعداد كما نرى جاءت في نظرية فيتاغورس .

وبصفة عامة معادلة خطية تعتمد أساسا على طريقة الخطأ الواحد.

مثال كمية وسبعها تعطي تسعة عشر. وتكون بالتعبير المعاصر كما يلي $x+\frac{1}{7}x=19$ حل يعتمد على عطاء قيمة خاطئة لـــ x_0 ، ثم منها نعين b_0 وبها نحصل على الحل الصحيح.

الهندسة

لقد اهتم المصريون القدماء بالهندسة وإنشاءاتها[9]، ويتجلى ذلك في بناء الأهرامات التي لا تزال شاهدة على ذلك لحد الآن، كما كان لنهر النيل الأثر البالغ في تفنن المصريين في الإنشاءات الهندسية، فقد ذهب هيرودوت (هيرودوت (Héredote) مؤرخ إغريقي (484 قم- 420 قم))[10]، شيخ مؤرخي الإغريق، إلي أن مصر هي المهد الذي ولدت فيه الهندسة، فقال : "زعموا أن سيزوستريس قسم الأرض على السكان قطعا مربعة متساوية، وفرض على كل واحد إيجارا سنويا. فكانوا كلما طغى النيل على ارض أي منهم، ذهب إلى الملك فأخبره، فيرسل الملك من يقيس الأرض، ويقدر الخسارة، وبنسبة ذلك يخفض الإيجار". يضيف هيرودوت : "يبدو لي أن هذا هو السبب في أن مصر سبقت غيرها إلى معرفة الهندسة وعنها أخذها الإغريق".

لعل الأمر كان اعقد مما قدر هيرودوت، فالنيل يفيض سنويا فيملأ الحياض بالطمي (خاصة إذا كان هذا الفيضان غير عادي) ويغرق ما بين الأراضي من حدود، فيهرعون لرسم هذه الحدود من جديد بالسرعة والعدل. ولم تبق لنا الأيام تفاصيل هذه المهمة، غير إننا نستطيع ان نقدر أن قيامهم بها سنة بعد سنة قد جعلهم يلمون بكثير من خصائص الأشكال الهندسية، ويظهر أن عدتهم الأساسية كانت حبالا، كأشرطة المساحة، يشدونها. فقد كان ديموكرتيس، في القرن الخامس قبل الميلاد، يفخر بأن لا أحد يتفوق عليه، في فن رسم الخطوط "حتى ولو شدادوا الحبال المصريون".

ولدينا اليوم من الوسائل المعرفية ما يؤكد أن المصريين القدماء عرفوا مساحة المثلث والمستطيل وشبه المنحرف، وكانت لديهم قاعدة لإيجاد مساحة الدائرة بتربيع 9/8 القطر وهذا يعطي لما نسميه π القيمة التقريبية 3.1605 (مسألة 48 من بردية ريند). فكان لدى المصريين قواعد صحيحة لإيجاد حجوم بعض الأجسام البسيطة كالمكعب ومتوازي المستطيلات والموشور

[9] يوسف قرقور، هندسة الإنشاءات من خلال كل ما يحتاج إليه الصانع من علم الهندسة لأبي الوفاء البوزجاني، الملتقى الوطني حول تعليمية الرياضيات، سكيكدة، 1998، ص.1.

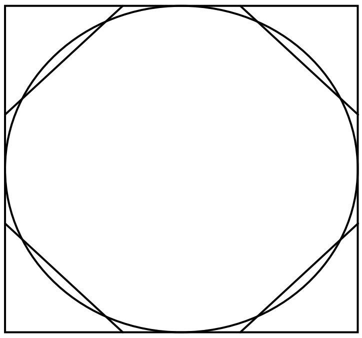
[10] أحمد سليم سعيدان، هندسة اقليدس في أيد عربية، عمان، دار البشير، الطبعة الأولى، 1991، ص. 6.

والاسطوانة. غير أننا لا نجد عندهم البراهين على صفحة هذه القواعد، فإنه يبدو أن قواعدهم قامت على أساس تجريبي، وأنهم لم ينتبهوا إلى البرهان أو الإجابة إليه.

المسألة 48 من بردية ريند

احتمال اصل قيمة $\pi = 3.1406$ عند المصريين ترجع ربما إلى المسالة التالية:

نرسم في مربع طول ضلعه 9 وحدات قياس، مثمن (أنظر الشكل) مساحة كل من المثلثات في زوايا المربع هي $2/3.3 = 4.5$ وحدة مساحية. مساحة المربع = 9 في 9 = 81 وحدة مساحية. مساحة المثمن = الفرق بين مساحة المربع ومساحة المثلثات الأربع81−18= 63 وحدة مساحية. مساحة المثمن هي تقريبا مساحة مربع طول ضلعه 8 وحدة قياس. إذن مساحة الدائرة د التي طول قطرها ن هي تقريبا تساوي مساحة مربع طول ضلعه 9/8ن ومنه د = $(9/16$نق$)^2$ = $(9/16)^2$ نق^2 = π نق^2 ومنه $\pi = 3.1605$



تمارين

1. أحسب 5 في 12.

نفس السؤال لـ 7 في 13 و 12 في 9.

2. أحسب على 6 لكي تحصل على 50 (بمعنى أوجد العدد الذي إذا ضرب في 6 أعطى 50).

3. باعتمادك على الوسائل التي يعرفها الكاتب المصري قديما بين في رأيك كيف تحصل على ما يلي : $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$

4. اضرب بالطريقة المصرية القديمة 5 في $(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 3)$

ما هي الملاحظات التي يمكنك استنتاجها من خلال مقارنتك هذه الطريقة بالطريقة الحالية.

5. اقسم بالطريقة المصرية القديمة 19 على 5.

6. أكتب في نظام العد المصري القديم : 12111 ، 11111.

7. **اضرب** بالطريقة المصرية القديمة 11 في $(\frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3)$

ما هي الملاحظات التي يمكنك استنتاجها من خلال مقارنتك هذه الطريقة بالطريقة الحالية.

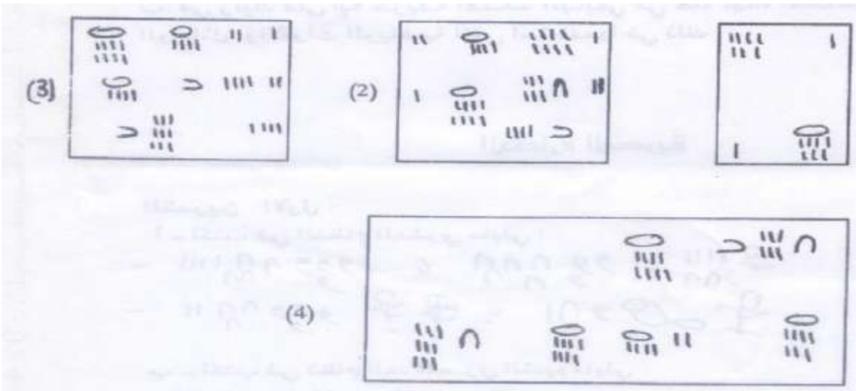
8. اقسم بالطريقة المصرية القديمة 19 على 8.

9. باعتمادك على الوسائل التي يعرفها الكاتب المصري قديما بين في رأيك كيف تحصل على ما يلي :

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{16}+\frac{1}{38}+\frac{1}{76}+\frac{1}{304}$$

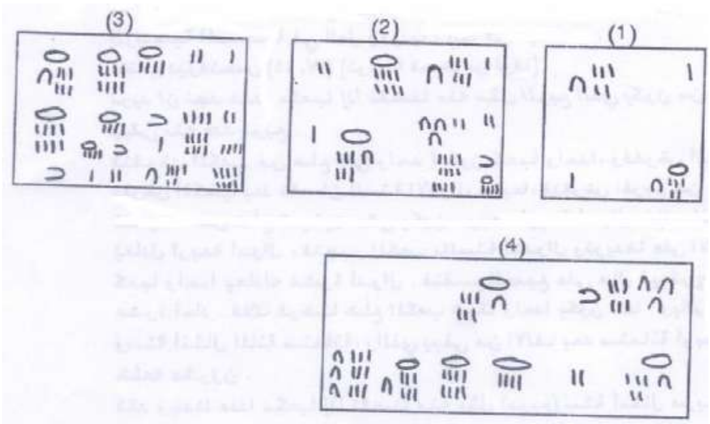
10. مسألة : كمية وسبعها $(\frac{1}{7})$ تعطى تسعة عشر (19).

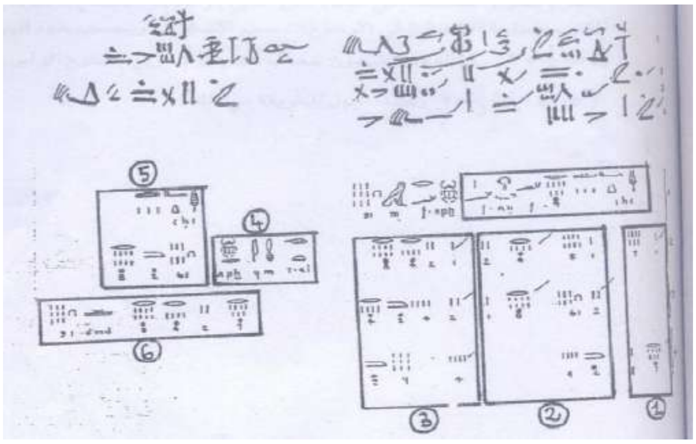
حل :

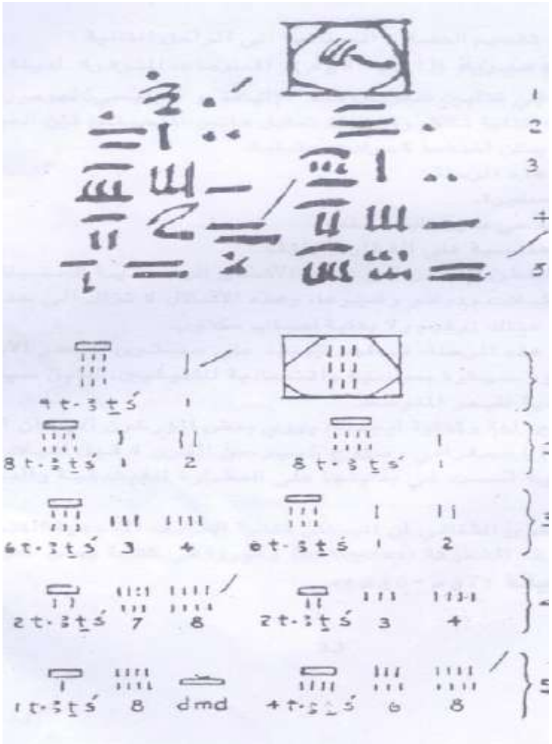


11. مسألة : كمية وخمسة عشر $(\frac{1}{15})$ جزءا منها تعطى تسعة وثلاثين (39).

حل :







بعض مظاهر الحضارة اليونانية ومضمونها الرياضي

تعود المؤرخون تقسيم الحضارة اليونانية إلى المراحل التالية :

1. **المرحلة الهوميرية** [13 ق.م – 8 ق.م] : المعلومات المتوفرة لدينا حول هذه المرحلة جاءت في كتابين شفويين هما "الإلياذة" و"لوديسي" لهوميروس حيث لم تكن هناك كتابة متطورة، وعند تحليل هاتين الملحمتين فإن الحوادث التي جاءت فيهما يمكن أخذهما كحوادث حقيقية. ومن خاصيات هذه المرحلة.

أ. تكوين دويلات صغيرة.

ب. ظهور إنتاج فلاحي بدون تبادل نقدي.

جـ. ظهور رسوم هندسية على الفخار والخزف.

يدل هذا على تفطن السكان إلى بعض الأشكال الهندسية الجميلة من مربعات ومستطيلات ودوائر وغيرها، وهذه الأشكال لا تزال إلى حد الآن بروما، ولكن ليس هناك ترقيم ولا بداية لحساب مكتوب.

أما في نهاية هذه المرحلة، فيظهر تجديد على مستوى البحر الأبيض المتوسط، وهو بروز سيطرة سياسية واقتصادية للفينيقيين، الذين سيطروا على الضفة الشرقية للبحر المتوسط. كانت للفينيقيين لغة وكتابة أبجدية، يروي بعض المؤرخون اليونان أمثال هرودوط (Hérodote) جغرافي ومؤرخ كبير من الفرن 4 قبل الميلاد "أن الحضارة اليونانية أسست في بدايتها على الحضارة الفينيقية والبابلية والمصرية".

نعلم على المستوى الثقافي أن اليونان أخذوا الحروف الأبجدية الفينيقية، وأضافوا إليها الحروف المتحركة (les voyelles) وغيروا في كتابة بعض الحروف.

2. **المرحلة العتيقة [7 ق.م – 6 ق.م]**

ظهر في هذه المرحلة اقتصاد تجاري نقدي، سيطر على الاقتصاد الفلاحي نتيجة الاحتكاك بين الشعب المصري والبابلي والفينيقي من جهة والشعب اليوناني من جهة أخرى، أدى إلى ظهور نظام العد والكسور والتقدير (القياس، والكيل ...)، لأن بداية ظهور النقود والتجارة معناه المعاملات.

كما ظهر في هذه الفترة الحكم السولوني (Solon)، [عائلة كانت تحكم اليونان] قوانين سولون تحرر الأشخاص من القيود القبائلية والعشائرية. حتى تسمح للأشخاص

بالمساهمة في التجارة. وذلك لتطور الاقتصاد التجاري وأصبح بحاجة ماسة إلى عدد كبير من الأشخاص مما أدى إلى جلب العبيد من خارج المجتمع اليوناني.

فظهر مجتمع جديد بقوانين جديدة، وأدى هذا التطور إلى سيطرتهم على بلدان أخرى مثل ايطاليا الجنوبية وصقلية وآسيا الصغرى والبحر الأسود.

ومن نتائج هذه السيطرة السياسية ظهور نشاط ثقافي وعلمي في هذه المستعمرات الجديدة. فأدى إلى بروز مدارس ثقافية كمدرسة ميلي في آسيا الصغرى ومدرسة ايلي في ايطاليا الجنوبية ومدرسة الفيثاغوريين. وخاصية هذه المدارس هي فلسفية ورياضية وأدبية. لقد ظهرت في هذه المرحلة :

- الرياضيات المكتوبة، مع الفلسفة والأدب.
- الألعاب الأولمبية (سنة 776 ق.م وللأول مرة)
- مدن دولة (Villes états) لكل واحدة منها سياسة وحكم مستقل مما أدى إلى تنافس بينهم في الحروب والمباريات الرياضية.

ظهرت على المستوى الرياضي نشاطات هامة في نظرية الأعداد، سيما مدرسة فثاغورس. لأن هذه المدرسة كانت تؤمن بأن الكون يمكن تفسيره بوسائل حسابية، وكل شئ مرتبط بالأعداد أو علم العدد (الكون هو عدد) حتى الهندسة حولت إلى أعداد فاستنبطوا الأعداد الشكلية (Nombres figurés)، مما أدى بهذا النشاط والفكر الفلسفي إلى ظهور نشاط كبير في الميدان، مما أدى ببعض المؤرخين إلى الاعتقاد أن الهندسة هي التي كانت بداية الرياضيات اليونانية، إلا أننا نرى أن علم العدد هو الأسبق.

3. **المرحلة الديمقراطية** (حسب المفهوم اليوناني القديم لا حسب المفهوم العصري) [5 ق.م – 4ق.م]

ظهرت طبقات في المجتمع اليوناني متكون من (أحرار، عبيد وأجانب) وبرزت مدن، حسب النمو الديموغرافي في جنوب إيطاليا، وفي آسيا الصغرى، وبلغ عدد سكان أثينا مثلا 400000 ساكن أحرار (موطنين) و360000 أجانب وعبيد.

وكان النظام ديمقراطي بأتم معنى الكلمة ويخص فقط الموطنين. وشجع هذا النظام النشاط العلمي الفلسفي والرياضي، وتميز النشاط السياسي بالحروب بين المدن، لأن كل مدينة كانت تريد السيطرة على الأخرى من أجل التحكم في النشاط الاقتصادي، كما كانت حروب طويلة بين الشعب اليوناني وشعوب أخرى لاسيما

الفرس، وهذه الحروب جعلت الحكم اليوناني ضعيفا. غير أن النشاط الرياضي والعلمي يتقدم بسرعة وبتوسع كبير (لأسباب نجهلها).

والاختصاصيون في تاريخ الرياضيات يجمعون بأن هذه المرحلة هي أهم المراحل في النشاط الرياضي اليوناني، لأن هناك تطور في كيفية العمل وحتى في كمية إنتاج الرياضيات.

4. **مرحلة اسكندر الكبير** [3 ق.م – 7م]

مرحلة توسع جديد لليونان ولكن بصفة موازية تحطم النظام الداخلي وضعف النشاط الثقافي والعلمي، غير أن هذا الأخير توسع خارج بلاد اليونان وكذا النظام اليوناني في ذلك الوقت، إذن تدهور الاقتصاد اليوناني الداخلي وضعف النشاط الفلسفي، لأسباب سياسية داخلية، ولكن هناك تنشيط جديد للسياسة والاقتصاد والثقافة خارج الحدود اليونانية القديمة وخاصة في مصر (تحت حكم اسكندر الكبير) وظهور عدة دول يونانية : 3 في اليونان وواحدة في الفرس (الحكم السلوقي).

وكان الحكم اليوناني في هذه المنطقة جد مهم من ناحية النشاط الرياضي فإنه شجع تنشيط الرياضيات البابلية القديمة –نعتبر أن هذا النشاط هو المرحلة الثانية للنشاط الرياضي البابلي– غير أنه من الصعب الفصل في هذه الرياضيات هل بابلية أو يونانية؟ وهل هناك تأثير بابلي على الرياضيات اليونانية؟

وخلاصة القول أن الشئ الغريب في هذه المرحلة، هو تدهور النشاط الرياضي والفلسفي نسبيا في بلد الأم (اليونان) بينما نشاهد نشاط كبير للرياضيات والفلسفة في الإسكندرية بمصر، لكنه ليس مصريا بل هو نشاط يوناني في مصر.

مضمون الرياضيات اليونانية

تشمل الرياضيات اليونانية علم الحساب، علم العدد، علم الهندسة، وعلم الفلك.

علم الفلك : بدأ علم الفلك في المرحلة الثانية، حيث ظهرت كتب ومناقشات فلسفية لاهوتية، لأنها مرتبطة بنوعية العالم، ما هو موجود في السماء؟ ما هي حركة الأفلاك والشمس؟ ما هو موجود ما وراء السماء؟ أسئلة منها علمية وأخرى لاهوتية فلسفية. وكتبوا كتبا عديدة في هذا الجانب، غير أن هذه الكتب أتلفت أو أحرقت أو بعثرت.

أهم كتاب وصلنا في الفلك اليوناني– ربما هو أهم كتاب– يلخص ويعمم كل المعلومات الفلكية اليونانية. وهو كتاب المجسطي لبطليموس (La Syntaxe de

Ptolémée) (فرع من القواعد) ويعد من أمهات الكتب في الفلك إلى حد الآن. كما يشمل كذلك الهندسة المجسمة. وترجم هذا الكتاب على يد علماء العرب وهم الذين أعطوه اسم المجسطي. والأوروبيون لم يعرفوه باسم La Syntaxe بل عرفوه باسم المجسطي (يعني الكتاب الأكبر)، وهذا الاسم يدل على أنه من أعظم الكتب. ويعتبر أساس النشاطات الفلكية عند العرب ابتداء من القرن 8 م.

علم الحساب : لا نعرف عنه الكثير باستثناء أنه يعتمد على الحروف الأبجدية اليونانية ذات الأصل الفينيقي وهي 24 حرفا. ونظام العد عشري وغير وضعي (أي لا يهتم بالوضع).

χ	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70

π	ϙ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	э
80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900

′α	′β	′γ	′δ	′ε	′ϛ	′ζ	′η	′θ
1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000

علم العدد : من أمهات الكتب التي وصلتنا في هذا ميدان من خلال الترجمات العربية ابتداء من القرن 8 م هي :

1. **كتاب المُدخل إلى علم العدد** (الارتماطيقي) لنيقوخسن الجراصاني عاش في النصف الأول من القرن 3 م

(L'introduction Arithmétique de Nicomaque de Gerase) يعتبر هذا الكتاب خلاصة النشاط الرياضي اليوناني في ميدان علم العدد للمرحلة السابقة. لقد ترجم هذا الكتاب من طرف ثابت بن قرة الحراني (ت. 901م).

2. **كتاب الأرتماطيقي** لديوفنطس (ق. 4م) (ترجمه قسطا بن لوقا (ت. 910 م))، بعنوان "صناعة الجبر لديوفنطس" ولم يترجمه باسم العدديات أو كتاب الحساب. لأن قسطا قرأ هذا الكتاب قراءة جبرية ولم يقرؤه قراءة عددية.

وعلم العدد يمكن تقسيمه إلى :

1. نظرية الأعداد الأولية : ظهر نشاط رياضي كبير حول البحث عن خاصيات، صنف من أصناف الأعداد وهذه الأعداد هي الفردية ومن بينها الأعداد الأولية.
2. نظرية الأشكال العددية : أعداد خطية، أعداد سطحية، ...
3. جمع متتاليات من نوع ما.

علم الهندسة : هي بحر العلوم اليونانية، وهي أهم ميدان أهتم به الإغريق، ليس فقط من جانب المضمون، لكنها جعلت بأنها أساس كل الرياضيات.
المضمون :
1. هندسة خاصيات وصيغ الأشكال
(Géométrie des propriétés des figures et ses formes)
2. هندسة التقدير (géométrie des mesures)

ومن ساهموا في تطوير علم الهندسة نذكر :
- فيثاغورس ومدرسته (6 ق.م)
- أفلاطون (348 ق.م)
- أرسطو (322 ق.م)
- أقليدس (3 ق.م)
- أبلونيوس (262 ق.م)
- أرخميدس (212 ق.م)

ومن أهم الكتب التي وصلتنا نذكر :
1. كتاب الأصول لأقليدس، نفذ فيه منهج أرسطو العلمي. والكتاب يتكون من 13 مقالة في الهندسة :
الكتب من 1 إلى 6 : هندسة مستوية (تعريفات، أوليات (Axiomes)، المصادرات، المثلثات، المتوازيات، هندسة الدائرة، كثيرات الأضلاع المنتظمة ...).
الكتب من 7 إلى 10 : الحساب ونظرية الأعداد تعالج الأعداد الأولية، المضاعف المشترك، والمستقيمات غير الجذرية، المستقيمات التي يمكن أن تمثل بالعبارة $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
الكتب من 11 إلى 13 : الهندسة المجسمة (قياس الدوائر، الكرات، الأهرام والمجسمات المنتظمة).
2. كتاب الكرة الاسطوانة لأرخميدس
3. كتاب المخروطات لأبلونيوس

من المسائل الشهيرة التي شغلت بال العلماء هي :

- تربيع الدائرة
- تثليث الزاوية
- تضعيف المكعب

ونتطرق الآن إلى أهم العوامل التي ساعدت الإغريق في ظهور البرهان الرياضي وأهم المساهمين في ذلك.

مهما بلغ ما تعلمه الإغريق من الأمم التي سبقتهم، فإن أمرا واحدا يبقى إغريقيا، ويبرر لنا التحدث عما يسمى بالمعجزة الإغريقية، ذلك هو وضع المنطق العلمي، وأول أركان المنهج العلمي، ممثلا بالبرهان الهندسي، لقد ورث الإغريق ركاما هائلا من المعلومات الرياضية، فيه الصحيح وفيه الخطأ. وبالبرهان استطاعوا أن يغربلوا هذا الركام، فما ثبتت لهم صحته منطقيا قبلوه، وما لم تثبت لهم صحته استبعدوه.

وتعلم منهم جيرانهم وأحفادهم مبدأ البرهان، وكان بينهم وبين الهنود علاقة قديمة، ثم انقطعت هذه العلاقة فبقيت الرياضيات الهندية ركاما من التبر والتبن حتى غربلها العرب في العصور الإسلامية، بطريقة البرهان ذاتها.

ولم يكتشف مبدأ البرهان الرياضي في يوم وليلة، بل هو استغرق قرونا حتى نضج واستوي، وقد بدأ تخلقه في القرن السادس قبل الميلاد، على يدي فيثاغورس ومدرسته.

ولا ندري هل اكتشف فيثاغورس الحقيقة الهندسية المنسوبة إليه أم أخذها عن البابليين. ولكننا نعلم يقينا أن علم الهندسة ترعرع في حياض المتوسط قبل أن يتنبه إليه اليونان بقرون. وهم ينسبون إلى طاليس المليطي (Thalès of Miletus) الذي عاش في القرن السادس قبل الميلاد، ابتكار هذا العلم. غير أن النصوص المنقولة عن كتّاب متأخرين تنسب لطاليس اكتشافه لخاصية المثلث المتساوي الساقين، وزاوية الرأس، وهذا دليل على أن أمر الهندسة عندئذ لم يكن يتعدى مبادئ أولية.

ولكن يبدو أن الخبرة العملية هي دائما أسبق من المعرفة التجريدية النظرية. ففي هذا القرن نفسه الذي لم تتعدّ الهندسة النظرية فيه مبادئ أولية، حفر مهندس اسمه يوبالينوس، في تل في جزيرة ساموس، نفقا طوله ثلثا ميل، بدأ الحفر فيه من الطرفين، وعندما التقى الحفر في المنتصف،

كان الفارق لا يتجاوز بضع ياردات، كان هذا انجازا جيدا، ولكنه كان في الهندسة التطبيقية، لا النظرية ؛ وفي ساموس، مسقط رأس فيثاغورس.

ويرجح أن الخطوة الأولى في سبيل بناء الهندسة النظرية خطاها فيثاغورس اذ ألحّ على صياغة مبادئ عامة، واستنتاجها عن طريق منطق صارم مجرد. ولقد تواتر عنه أنه أول من ألح على تحديد المفاهيم. وفي مدرسته، في القرنين السادس والخامس قبل الميلاد، بدأ تعريف الخط الهندسي بأنه ذو طول وليس له عرض ولا سمك، وتعريف الدائرة بأنها خط كل نقاطه متساوية البعد عن المركز، وتعريف المماس بأنه خط يلتقي مع الدائرة في نقطة واحدة. وهذه كلها مفاهيم مجردة بعيدة عن المشاهدة والتجربة والعملية. ولذا تعرضت إلى حملة شديدة من الانتقاد، قادها في القرن الخامس بروتاجوراس إذ اعتبرها كلها مفاهيم وهمية تتعلق بأشياء ليس لها وجود. فالخط، أي خط، مهما دقّ إنما هو شريط ذو عرض وذو سمك، وكل خطين يتقاطعان إنما يشتركان في حيز ذي أبعاد ثلاثة، وكذلك مماس الدائرة لا يشترك معها في نقطة وهمية وإنما في جزء من محيطها مجسم دقيق.

ولا ينبغي أن نستهين باعتراضات بروتاجوراس. فإذا سلمنا بأن الخط، مهما كان دقيقا، فإن له سمكا ما، وهذا هو الواقع ، إلا إذا كان الخط وهمياً ؛ أقول إذا سلمنا بذلك، يسقط أن تقاطع الخطين نقطة ويصبح سطحا أو جسما، يصغر إذا كان الخطان متعامدين، ويكبر كلما اقترب أحدهما من الآخر.

إن بروتاجوراس على حق، فثمة فرق بين حقائق الأشياء في الطبيعة وبين مسلمات الهندسة النظرية. ولذا فقد امتد الجدال حول هذا الأمر بين مفكري الإغريق طوال القرون الخامس والرابع والثالث قبل الميلاد، واشترك فيه أفلاطون في القرن الرابع، ومن بعده أرسطو. إلا أن الهندسة النظرية تطورت بعد ذلك تطورا سريعا لفت أنظار الناس عن إهمال بروتاجوراس حتى نسوه.

مساهمة أفلاطون :

قد يصعب تحديد ما يذهب إليه أفلاطون، فهو شاعري النزعة يأسر القارئ بجرس عبارته، ولا يضعه أمام حقائق محددة تقبل أو ترفض، حتى لتجده يقرر في موضع ما أمرا ثم هو يخالفه أو يناقضه في موضع آخر. إلا أن له قولا محددا حول الهندسة النظرية والهندسة التطبيقية. فهو يقول إن الدائرة التي يرسمها المرء ليست هي الدائرة التي يجدها علم الهندسة النظرية : فهذا العلم إنما يتناول خطوطا ودوائر مثالية، نظرية. وهي ليست أوهما، ولا ألعابا صبيانية، إنما هي مفاهيم ثابتة لا تتغير، ولها وجود إلا أنها فوق تصور الفرد العادي، وهي غير ما تصنعه يداه. "إن وراء

مدارات النجوم عالما من أفكار صافية، لا يحدها شكل ولا لون، لا ترى ولا تلمس .فهي محررة من قيود الزمان والمكان". ماذا يمكن لعالم اليوم أن يعطي هذه العبارة غير أنها لفتة شعرية لا تقاس بموازين العلم. إلا أنها كلمات لأفلاطون نفسه، وقد رنّ صداها في القرن الرابع قبل الميلاد، حتى طغى على اعتراضات بروناجوراس. إنه على كل حال وقف إلى جانب الهندسة النظرية.

ولكن إذا كانت الهندسة النظرية هي عالم أشكال مثالية لا يطاولها الحس البشري، فلماذا ندرسها؟ وكيف؟ إننا ندرسها لأنها هي وحدها الأشكال الثابتة على الدوام، الخاضعة لقوانين بسيطة محدودة. أما ما تراه العين من أشكال فأشباه لها تماثلها، إنها صور ضبابية متغيرة، وما نراه بينها من علاقات إنما تقارب ما يقوم بين الأشكال المثالية الصافية.

أما كيف ندرس هذه الأشكال المثالية التي لا تحس ولا ترى، فيعطي أفلاطون لذلك منهجية علمية يرى أن يلتزم بها بجد ومثابرة وثبات. ومنهجيته ذات خطوات أولها إعطاء الشكل الذي يراد دراسته : اسما، ويلي ذلك تحديده أي تعريفه، بإعطائه صفة أو صفات تميزه ثم تمثيله برسم يقربه إلى الذهن ؛ وهذا الرسم ليس هو المفهوم النظري، وإنما هو شبيه له في عالم الحس. بعد ذلك يمكن دراسة هذا المفهوم علميا، واستيعابه منطقيا. ويتم ذلك بمجهود ذهني لا يخضع للحواس البشرية، ولا تحده الكلمات.

إن كلاّ من اعتراضات بروتاغوراس وتبريرات أفلاطون تنم عن تقدم في التفكير الرياضي، وعن اهتمام بالمنطق. ولا نعرف كيف كان المحصول العلمي من قبل أفلاطون، ولكننا نستطيع أن نقدر انه كان كمثيله البابلي والمصري خليطا من حقائق وبديهيات وأمور يسلم بها لأن التجربة تؤيدها على وجه التقريب. ولكنا نرجح أيضا أن أكاديمية أفلاطون صارت أكثر حذرا في التسليم بأشياء كثيرة، وأكثر اهتماما بمنطق الأشياء، وأكثر حرصا على تمحيص الحق من الباطل.

وفي كتاب حياة الحكماء لديوجينس (Deogenses Laevtius) قصة طريفة لا تخلو من مغزى فيها نحن بصدده : يقول ديوجنيس، وقد كان تلميذا مزعجا في الأكاديمية وفي أثينا عامة : عرفوا الإنسان بأنه كائن فان، له ساقان، وليس له ريش. فذهبت إلى الأكاديمية أحمل ديكا حيّا، وقد نتفت ريشه، وقلت لهم : هذا حسب تعريفكم إنسان.

تقول القصة أنهم سلّموا بخطئهم، وزادوا في تعريف الإنسان دقة فقالوا : وله أظافر ناعمة. ما زال التعريف غير موفق، وما يزال أمام الأكاديمية مجهود كبير حتى تصل باليقظة العلمية الإغريقية إلى منتاها وقد أدركت الأكاديمية ذلك فرفعت المنطق إلى مستوى العلوم ولكن نتاج الأكاديمية الأكبر هو أرسطو، المعلم الأول.

مساهمة أرسطو:

لم يكن أرسطو شاعري الأسلوب كأفلاطون ولكنه كان عالما باحثا بالمعنى الحديث، وهو أول عالم باحث عرفه التاريخ. وقد رفض بصراحة فكرة المفاهيم المثالية وأشباهها الواقعية. وحاربها بشدة وإصرار. وفي تحديده للأشياء التي تبحث فيها الرياضيات قال : إنها حقا ليست ما نراه في عالم الواقع، وما نراه في عالم الواقع ليس ما تعنى به الرياضيات. إن كل نوع من أنواع المعرفة يتناول أشياء محسوسة، إنما هو نوع من الفيزياء، من دروس الطبيعة. وأشياء الطبيعة فيها النقاط والخطوط والسطوح والأجسام، وتلك هي ما يهم الرياضي. وهو يتناول هذه التي تهمه، لا كما هي في الطبيعة، وإنما باعتبارها أفكارا مجردة من كل خصائصها الحسية : من خفة وثقل، وصلابة ولين وحرارة وسخونة. انه يجردها من كل ما وهبتها إياه الطبيعة، حتى لا يبقى فيها إلا مميزاتها الكمية وخصائصها الثابتة. ان أشياء الرياضيات هي نتاج تجريد فكري ذهني ؛ وأشياء الطبيعة لها فوق ذلك خصائص حسية .فأشياء الرياضيات هي أشياء الطبيعة إلا أن الرياضي يدرسها بمعزل عن خصائصها الحسية .وهي إذن، كما يدرسها الرياضي، ليس لها وجود إلا في عالم الفكر.

وللدراسة الرياضيات وضع أرسطو قواعد وأصولا كانت خطوة هامة في سبيل بناء المنهج العلمي، فقد اشترط أن تبنى المعرفة عن طريق البرهان ؛ والبرهان استنتاج منطقي لحقائق جديدة من حقائق سبق برهنتها .وعلى هذا يقدم العلم بنيانا متدرجا مبنيا بعضه على بعض، ولكن من أين يبدأ؟ انه لا بد أن يقوم على حقائق أولية تستنتج منها الأشياء، ولا تستنتج هي من شيء، فيسلّم بها وحدها دون برهان. وهذه الحقائق الأولية عند أرسطو نوعان : أوليات، بديهيات (Axiomes)منها نستنتج حقائق العلم، ومسلّمات، مصادرت، (Postulats) منها يثبت وجود أشيائه.

والأوليات عنده عامة تسري على علوم كثيرة. فقولنا إن الفروق بين المتساويات متساوية، مبدأ يسري على الهندسة كما يسري على الحساب. وأرسطو يعلق أهمية كبيرة على الأوليات الكمية كقولنا الشيئان اللذان يساويان شيئا ثالثا متساويان.

ومن الأوليات عند أرسطو الحدود، أعني التعريفات (Définitions). وهي ليست كما يراها أفلاطون: مرحلة ذهنية تستهدف استيعاب الفكرة المثالية لما في الطبيعة، وإنما هي وصف لجوهر الشيء، يحدد الخصائص التي تميزه عن غيره، ولا يملكها مجتمعة سواه. التعريف عنده مفهوم يبين جوهر ما في الواقع، أي صفاته الثابتة التي لا تتغير بتغيير الزمان والمكان.

ومسلمات أرسطو لازمة لإثبات أن الشيء موجود في الطبيعة. فلا يكفي أن نصوغ للشيء التعريف المناسب إذا كان هذا الشيء غير موجود. فما قيمة أن نعرف العنقاء إذا لم تكن موجودة

في الطبيعة، ما فائدة أن نعرف الخطين المتوازيين بأنهما خطان في سطح واحد لا يلتقيان، إن لم نثبت قبل ذلك وجود مثل هذين الخطين؟

ونحن نثبت وجود الأشياء استنتاجا من وجود أشياء أبسط منها، وهنا أيضا تقوم معرفتنا لوجود الأشياء بنيانا بعضه فوق بعض تقع في قاعدته المسلمات، كالواحد في الأعداد الطبيعية والوحدة في قياس الكميات والمقادير.

كل هذا صار، على علاته، حجر الأساس في بناء المعرفة الإنسانية العلمية، وصار الركن الأول من أركان المنهج العلمي.

ومن التعريفات ما يراه أرسطو غير علمي. وذلك كتعريف الشيء بضده، فقد يكون الضدان متلازمين، نعرفهما معا، فليس أي منهما معروفا أكثر من الآخر، والتعريف العلمي يكون بدلالة شيء عرف سابقا وثمة تعريفات يراها أشبه بدورة مفرغة، كتعريف المقدار بأنه ما يقبل الزيادة والنقصان .فالزيادة ذاتها يرتبط مفهومها بمفهوم المقدار الكبير.

كل ذلك استوعبه اقليدس، فقد جئنا إلى أشهر رياضيي العالم، وأعمقهم أثرا. ذلك أن كل طالب رياضيات في المدارس الابتدائية والثانوية، من القرن الثالث قبل الميلاد، حتى منتصف قرننا هذا، كان يدرس الهندسة المستوية على النحو الذي اختطّه اقليدس في كتاب الأصول. لقد اختلفت أمم العالم في لغاتها وعاداتها وعقائدها وكتبها الدينية، وتمسكت كل أمة بما ألفت أو ورثت عن أبائها وأجداها. ولكن ما من أمة وصل إليها كتاب الأصول بلغة ما، أو على نحو ما، حتى أخذته نبراسا لتعلم المفاهيم الرياضية.

ومن العجب أن هذا الرجل الذي بلغ فضله على الإنسانية هذا المبلغ لا نعرف عن حياته الخاصة سوى أن أول بطليموس حكم مصر (من 323 إلى 284) استدعاه لتأسيس مدرسة الرياضيات، في مكتبة الإسكندرية الشهيرة ؛ فأنشأها اقليدس، وكتب على بابها : اللّه هو المهندس السرمدي.

لذا نقدر أن اقليدس كان في أوج نشاطه الإنتاجي حوالي سنة 300 قبل الميلاد في الإسكندرية. ولا نرى لزاما لأن نخوض هنا في تفاصيل الدراسات والتحقيقات الطويلة الدائبة التي بذلت للوصول إلى هذا التقدير. يكفي أن نذكر، أن الغربيين جندوا كل ما لديهم من وسائل بحث لدراسة ما في المخطوطات الإغريقية واللاتينية والعربية والعبرية، مما يشير من قريب أو بعيد إلى أي شيء يتعلق بالفكر الإغريقي حتى صار يستحيل أو يكاد أن يصل المرء إلى جديد في هذا الميدان، اللهم إلا إذا اكتشف مخطوطا جديدا لم يدرسوه. فلنأخذ بتقديرهم هذا، ولكن ما يلي من التواريخ قد تكون مفيدة لتبيان تسلسل الأحداث التي نحن بصددها:

سنة 743 ق.م : توفي أفلاطون .وكان اقليدس معجبا به، وان يكن لم يأخذ بمنهجه العلمي.

سنة 233 ق.م : أمر اسكندر ببناء مدينة الإسكندرية.

سنة 223 ق.م : توفي أرسطو، وقد أخذ اقليدس بمنهجه العلمي، وأحكمه، ونفذه في كتابه على نحو بالغ الروعة، ولكن أرسطو لم يشر إلى اقليدس، ولم يفد من براهينه المحكمة، فكأنه لم يعرفه.

سنة 287 ق.م : ولد ارخميدس الذي يعد أعظم عقلية رياضية عرفها التاريخ.

فقد يكون ارخميدس ولد قبل وفاة اقليدس، إما خلف ارخميدس فكان معاصره الأصغر لابلونيوس، وهكذا كان الإغريق في القرنين الرابع والثالث قبل الميلاد، كلما غاب كوكب بزغ آخر.

وقد وضع اقليدس عدة كتب في الرياضيات، وكتب في الفلك والبصريات والميكانيكا والموسيقى. ولكن شهرته تقوم على كتاب واحد هو الأسطقسات (Stoixia) الذي سماه العرب كتاب الأصول، ويعرف بالإنجليزية باسم The Elements of Euclid وبالفرنسية (Les Eléments d'Euclide) قد جعله إقليدس في ثلاثة عشر جزءا سماها العرب مقالات، وأضافوا إليها خطأ جزأين آخرين ليسا لإقليدس.

وفي هذا الكتاب ينفذ اقليدس منهج أرسطو، العلمي ولكن صنع عالم يعرف كل أبعاد ما يصنع، ولا يتوانى عن تهذيب منهج المعلم الأول، إذا لزم الأمر، وإليك بيان ذلك :

1. أن يبدأ كل مقالة بتعريفات تحدد كل ما تشتمل عليه المقالة من مفاهيم جديدة.
2. في المقالة الأولى، ثلاثة وعشرون تعريفا وتسع بديهيات وخمس مسلمات.

التعاريف : نذكر منها:

- النقطة : هي شيء لا جزء له[11].
- الخط : ذو طول فقط.
- البسيط : (السطح) ذو طول وعرض فقط.

[11] يعرف قسطا بن لوقا (ت. 910 م) النقطة بأنها شيء لا بعد له أعني لا طول ولا عرض و لا عمق. يوسف قرقور، المدخل الي صناعة الهندسة لقسطا بن لوقا، الملتقى المغاربي الثالث حول تاريخ الرياضيات العربية، الجزائر،1-1990/12/3، في أعمال الملتقى الجمعية الجزائرية لتاريخ الرياضيات (نشر)، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية، 1998، ص.67.

– الزاوية البسيطة المستقيمة الخطين : هي انحراف أحدهما عن الأخر، موضوعين على غير استقامة.

– الزاوية القائمة : إذا قام خط مستقيم على خط مستقيم، فصيّر الزاويتين اللتين على جنبتيه متساويتين، قيل لكل واحدة منهما زاوية قائمة والخط القائم يقال له عمود.

– الدائرة : هي شكل مسطح يحيط به خط واحد، في داخله نقطة وكل الخطوط المستقيمة التي تخرج منها وتنتهي إلى ذلك الخط مساو بعضها لبعض.

– التوازي : إن لم يقم أحد الخطين على الأخر البتة، وإن أخرجا في كلتا الجهتين بلا نهاية وهما في سطح واحد فيقال لهما المتوازيان.

البديهيات[12] :

1. الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية.
2. إذا أضيفت أشياء متساوية لأشياء متساوية كانت النتائج متساوية.
3. إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء متساوية كانت البواقي متساوية.
4. إذا أضيفت أشياء متساوية لأشياء غير متساوية كانت النتائج غير متساوية.
5. إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء غير متساوية كانت النتائج غير متساوية.
6. الكميات المساوية لضعف نفس الكمية هي متساوية فيما بينها.
7. الكميات المساوية لنصف نفس الكمية هي متساوية فيما بينها.
8. الأشياء التي تتطابق متساوية.
9. الكل أعظم من الجزء.

المسلمات :

1. مد أي مستقيم يصل بين أي نقطتين مفروضتين.
2. مد أي مستقيم محدود على استقامته بقدر ما نشاء.
3. رسم دائرة حول أي مركز وبأي نصف قطر.
4. كل الزوايا القائمة متساوية.
5. إذا وقع خط على خطين فكان مجموع الزاويتين الداخليتين في أي من جهتيه أقل من قائمتين فإن الخطين إذا مدا في تلك الجهة يلتقيان.

وهذه البديهيات والمسلمات والتعاريف صالحة لكل مقالات الكتاب.

وقد نظّم اقليدس هذا الكتاب فجعل لكل مقالة موضوعا خاصا بها فكانت :

[12] Euclide, *Les œuvres d'Euclide*, F. Peyrard (traduction), Paris, Blanchard (nouveau tirage), 1966, p. 3.

المقالة الأولى

تتضمن ثلاثة وعشرين تعريفا وثمان وأربعين مبرهنة، تدرس خـصائص الأشـكال مـستقيمة الأضلاع ونظرية التوازي وتحويل بعض المضلعات إلى مضلعات أخرى عن طريق المساحات.

المقالة الثانية

تحوي تعريفين وأربع عشرة مبرهنة، تحدد خصائص بعض العمليات الحسابية كالجمع والضرب وهذا باستخدام مساحة الأشكال الهندسية، وتدرس بعض العلاقات في مثلث.

المقالة الأولى والثانية تعالج ضمنيا حلول المعادلات من الدرجة الثانية هندسيا.

المقالة الثالثة

تتضمن خمسة عشر تعريفا وسبعا وثلاثين مبرهنة، تدرس خصائص الدائرة من حيث المركـز والأوتار والمماسات وتحديد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.

المقالة الرابعة

تتضمن سبعة تعاريف وست عشرة مبرهنة تدرس علاقة الـدوائر بعـضها بـبعض وإحاطـة المضلعات بها وإحاطتها بالمضلعات.

المقالة الخامسة

تتضمن ثمانية عشر تعريفا وخمسا وعشرين مبرهنة، تدرس التناسب.

المقالة السادسة

تتضمن أربعة تعاريف وثلاثا وثلاثين مبرهنة، تدرس ما جاء في المقالات الأولـى بإسـتعمال نظرية التناسب.

المقالة السابعة

تتضمن اثنين وعشرين تعريفا وتسعا وثلاثين مبرهنة، تدرس نظرية الأعداد فتعالج القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر والأعداد المتناسبة والأولية والزوجية.

المقالة الثامنة

تتضمن سبعاً وعشرين مبرهنة، وهي تكملة لنظرية الأعداد، تدرس المتتاليات الهندسية والوسط الهندسي بين عددين.

المقالة التاسعة

تتضمن ستة وثلاثين مبرهنة، تواصل دراسة المتتاليات الهندسية وكيفية جمع حدودها.

المقالة العاشرة

تتضمن أربعة تعاريف ومائة وخمسة عشر مبرهنة، تدرس الأعداد الصماء.

المقالة الحادية عشر

تتضمن ثمانية وعشرين تعريفا (تخص المقالات الباقية) وتسعا وثلاثين مبرهنة، تدرس الهندسة المجسمة فتعالج الخطوط والزوايا والسطوح والمجسمات ذات السطوح المتوازية.

المقالة الثانية عشر

تتضمن ثماني عشرة مبرهنة، تدرس الهندسة المجسمة فتعالج حجم الهرم والمخروط والموشور والأسطوانة وعلاقتها ببعضها البعض.

المقالة الثالثة عشر

تتضمن ثمان عشر مبرهنة، تدرس المجسمات الخمسة ذات السطوح المنتظمة وهي الهرم، المكعب، ثماني الوجوه، الاثني عشر، العشروني وإمكانية رسمها داخل كرة.

وقد أضيف للأصول مقالتين[13].

أما منهجية اقليدس في عرض المبرهنات فتتمثل في :

1. إعطاء نص المبرهنة.
2. إعطاء قانون خاص، يتمثل بشكل محدد بحروف أبجدية، ونص يبين أن الشكل يطابق ما في نص المبرهنة، مبينا المعطيات والمطلوب.
3. إعطاء البرهان عن طريق الإنشاء الهندسي بواسطة المدور والمسطرة.
4. ثمّ يأتي نص يبين أن المبرهنة قد تحققت، ويعقب ذلك عبارة "وهذا هو المطلوب".

وبهذا نجد أن اقليدس يعرض حل المبرهنات دون أن يذكر كيف حصل عليه، معتمدا على الطريقة التركيبية، إلا أنه في بعض البراهين يعتمد على الطريقة التحليلية بالبرهان بالخلف وهذا ما نجده في المبرهنة الأولى من المقالة السابعة.

الاعتراضات حول كتاب الأصول

رغم كل ما حققه الكتاب من شهرة إلا أنه لم يسلم من الاعتراض والانتقاد.

فكان بروكلس (Proclus) (ق. 4 م) من أوائل المنتقدين إذ يقول : "إنّ اقليدس ألّف بين القضايا، فنظّم كثيرا مما وضعه يودكسس (Eudoxus) (ق. 4 ق.م) على غير نظام وهذّب كثيرا مما كتبه ثياتوس (Theatus) وعرض في بناء بارع لا مثيل له كثيرا من أفكار كانت عائمة أمام أنظار من سبقوه".

[13] المقالة الرابعة عشر التي تنسب إلى هبسكلاوس (Hypsiclès) (النصف الأول من القرن الثاني الميلادي) والمقالة الخامسة عشر أنجزت في القرن السادس الميلادي. المرجع السابق، ص. 21.

ويقول إسحاق الكندي (873/257) في بعض رسائله : "بعض ملوك اليونان وجـد فـي خزائن الكتب كتابين منسوبين لأبلونيوس النجّار، ذكر فيهما صنعة الأجسام الخمسة التي لا تحيط كرة بأكثر منها، فطلب من يفك له الكتابين فلم يجد في أرض اليونان من يعلم ذلك فسأل القادمين عليه من الأقاليم. فأخبره بعض المسؤولين أنه رأى رجلا بصور اسمه اقليدس وصناعته النجارة يتكلم في هذا الفن ويقوم به، فكاتب الملك ملك الساحل (فينيقية) وسيّر إليه نسخة الكتابين وطلب منه سؤال اقليدس عن فكهما ففعل ملك الساحل وتقدم إلى اقليدس به، وكان اقليدس أعلـم أهـل زمانه بالهندسة، فبسّط له أمر الكتابين وشرح له غرض أبلونيوس فيهما ثم وضع لـه صـوراً للوصول إلى معرفة هذه المجسمات الخمس، فقام من ذلك المقالات الثلاث عشر المنسوبة إلـى اقليدس".

ومما قيل أيضا أن الجزئين الرابع عشر والخامس عشر زاد من الشّك حول أن واضع كتـاب الأصول ليس شخصا واحدا .

إلا أن أهم الاعتراضات دارت حول:

المسلمة الرابعة

أسقطها بعض الرياضيين من مجموعة المسلمات أو أضافوها إلى البديهيات.

المسلمة الخامسة

إذ كم يجب أن نمد الخطين حتى نتأكد أنهما يلتقيان أولا، هذا ما دفع بكثير من الرياضـيين أن يبحثوا في نص هذه المسألة، فاتخذوا لذلك مسلكين.

الأول: يتمثل في إعطاء تعريـف آخـر للتـوازي، ومـن هـؤلاء فلبـونس (Philoponus) وبوسدونيوس (Posidonios) .

الثاني: اعتبار المسلمة مبرهنة يجب إثباتها وهذا بافتراض مسلمات أخرى مكافئـة لهـا ومـن هؤلاء بروكلس وبطليموس (Ptolémée) وعمر الخيام (ت. 1123 م) والطوسـي (1201م-1274م) الذي جعل لها الرسالة الشافية والإيطالي ساكيري (Saccheri) (1667م- 1733م)، كل هذا كان سببا لبداية ظهور الهندسة غير الأقليدية.

ومما يذكر أن اقليدس اعتبر هذه المسلمة نوع جديد من المسلمات، فبعد أن وضـع ثمـان وعشرين قضية في المقالة الأولى بدأ العمل بهذه المسلمة فسميت هـذه المبرهنـات بالهندسـة المطلقة.

ترجمة وشرح كتاب الأصول

لقد اهتم علماء الرياضيات من مختلف الأجناس والأزمان بكتاب الأصول وشرحه وترجمته.

شرحه كل من بابس (Pappus) (ق. 3 م) وبروكلس وأجانيس (Aganis) (ق. 1 م) وقام هيرن (Héron) بترجمة الكتاب في القرن الثالث ميلادي ، وبعده بحوالي قرن حرره ثيون الإسكندري (Théon).

أما عند العرب، فكان الحجّاج بن يوسف بن مطر أول من ترجم كتاب الأصول إلى العربية في عهد هارون الرشيد (782/170−809/193) ويعرف هذا النقل بالنقل الهاروني ثم أعاد نقله في عهد المأمون (813/198−833/218) ويعرف بالنقل المأموني.

وترجمه إسحاق بن حنين (ت. 910/298) وأصلحه ثابت بن قرة الحراني (ت. 901/288).

وقام بشرحه أبو العباس الفضل بن حاتم النيريزي (ت. 922/310) والعباس بن سعيد الجوهري (ت. 830 م) وأبو جعفر الخازن (ت. 965 م) وأبو الوفاء البوزجاني (ت. 998م) وأبو القاسم علي بن أحمد الأنطاكي (ت. 987 م) وأبو علي الحسن بن الحسن ابن الهيثم (ت. 1093 م).

حرره كل من نصير الدين الطوسي ومحي الدين محمد بن أبي الشكر المغربي (ت. 1280 م) وشمس الدين محمد بن أشرف السمرقندي (ازدهر.1227 م).

وكانت أول طبعة للكتاب سنة 1482 م في البندقية.

وقد وجدت في الفاتيكان نسخة قديمة لكتاب الأصول في القرن التاسع عشر، فوضعت كنص محقق سميت نسخة هايبرغ (Heibreg).

وفي سنة 1908 نشر توماس هيث (Heath) كتاب عن أصل إغريقي بثلاثة أجزاء.

كما ترجم إلى اللغة الفرنسية مرتين الأولى من طرف برار (F. Peyrard) سنة 1819، والثانية كانت لفيتراك (B. Vitrac) في الفترة ما بين 1994 و2000.

تمارين

I. حلل النصوص التالية

أ. (كتاب ديوفنطس (L(VI, 16)): نريد أن نجد عددين مربعين تكون زيادة الأعظم منهما على الأصغر، اذا نقصت من الأعظم كان الباقي منه عدد مربعا وان نقصت أيضا من الأصغر كان الباقي عدد مربعا.

ب. (كتاب ديوفنطس (L(I, 27)): أوجد عددين مجموعهما وجذاءهما معلومين (أعتبر المجموع 20 والجذاء 96).

جـ. (كتاب ديوفنطس (L(III, 4)) : أوجد ثلاثة أعداد إذا طرح مربع مجموعها من أحدها كان الناتج مربعا.

II. اكتب النص التالي باستعمال الرموز المعاصرة، موضحا الوسائل والأدوات الرياضية المستعملة في الحل ومبديا رأيك في هذا الحل :

(كتاب ديوفنطس (L(IV, 27)) : نريد أن عددا مكعبا إذا نقصنا منه مثل المربع الذي يكون من ضلعه كم مرة شئنا يبقى منه عدد مربع

فنفرض المكعب من ضلع شيء واحدا، ونفرض المرات ستا. ونريد أن نفرض المكعب بعد نقصان الستة الأموال مربعا. فنفرض المربع من ضلع أشياء كم شئنا. فنفرضه من ضلع شيئين حتى يكون مربعه أربعة أموال، فإذن المكعب إلا ستة أموال يعادل أربعة أموال، فنجبر المكعب بالستة الأموال ونزيدها على الأربعة الأموال فيكون كعبا واحدا يعادله عشرة أموال. فنقسم الجميع على مال فيخرج لنا شيء واحد يعادل عشرة أحاد. فلأنا فرضنا ضلع المكعب شيئا واحدا يكون ألفا. ويكون مربع الضلع مائة، وستة أمثال المائة ستمائة، والذي يبقى من الألف بعد ستمائة أربعمائة وهو عدد مربع ضلعه عشرون.

فقد وجدنا عددا مكعبا إذا نقصنا منه مثل (مربع) ستة أمثال مربع ضلعه بقى منه عدد مربع وهو ألف وضلعه عشرة.

III. أكتب بالرموز المعاصرة النصوص الإغريقية التالية (كتاب الأصول لأقليدس) :

1. **المبرهنة الأولى من المقالة الثانية** : كل خطين مستقيمين، يقسم أحدهما بأقسام، كم كانت، فإن السطح الذي يحيط به الخطان مساو لجماعة السطوح التي يحيط بها الخط الذي لم يقسم، وكل واحد من أقسام الخط الآخر المقسوم.

2. **المبرهنة الثانية من المقالة الثانية** : كل خط مستقيم يقسم بأقسام كم كانت، فإن مربع الخط كله، مساو لجماعة السطوح التي يحيط بها الخط كله، مع كل واحد من أقسامه.

3. **المبرهنة الثالثة من المقالة الثانية** : كل خط يقسم بقسمين، أي قسمين كانا، فإن السطح الذي يحيط به الخط كله، وأحد القسمين مساو للسطح الذي يحيط به قسما الخط مع مربع ذلك القسم.

4. **المبرهنة الرابعة من المقالة الثانية** : كل خط قسم بقسمين، قسمة كيف وقعت، فإن مربع الخط كله، مساو لمربعي قسميه، مع ضعف السطح الذي يحيط به قسما الخط.

5. **المبرهنة الخامسة من المقالة الثانية** : كل خط مستقيم يقسم بقسمين متساويين، ويقسم أيضا بقسمين مختلفين، فإن السطح الذي يحيط به القسمان المختلفان، مع مربع الخط الذي بين نقطتي القسمة، مساو لمربع نصف الخط.

6. **المبرهنة السادسة من المقالة الثانية** : إذا قسم خط مستقيم بنصفين، وزيد في طوله خط أخر مستقيم، فإن السطح الذي يحيط به الخط كله مع الزيادة، والزيادة مع مربع نصف الخط الأول، مساو لمربع نصف الخط مع الزيادة.

7. **المبرهنة السابعة من المقالة الثانية** : كل خط مستقيم يقسم بقسمين، أي قسمة كانت، فإن مربع الخط كله مع مربع أحد القسمين، إذا جمعا مساو لضعف السطح الذي يحيط به الخط كله وذلك القسم، مع مربع القسم الأخر إذا جمعا.

8. **المبرهنة الثامنة من المقالة الثانية** : كل خط مستقيم مفروض يقسم بقسمين، أي قسمة كانت، ويزاد في طوله مثل أحد القسمين فإن، مربع الخط المفروض مع الخط المزيد، مساو لأربعة أضعاف السطح الذي يحيط به الخط المفروض والخط المزيد مع مربع القسم الأخر.

9. **المبرهنة التاسعة من المقالة الثانية** : كل خط مستقيم يقسم بقسمين متساويين وبقسمين مختلفين أي قسمة كانت، فإن مجموع المربعين الكائنين من نصف الخط الذي هو فصل نصف الخط على قسمة الأصغر.

10. **المبرهنة العاشرة من المقالة الثانية** : كل خط مستقيم يقسم بنصفين ويزاد في طوله خط أخر، فإن مربع الخط كله مع الزيادة، ومربع الزيادة، إذا جمعا مساو لضعف المربعين الكائنين من نصف الخط ومن نصف الخط مع الزيادة إذا جمعا.

11. **المبرهنة الحادية عشر من المقالة الثانية** : نريد أن نبين، كيف نقسم خطا معلوما مستقيما مفروضا، قسمة يكون السطح الذي يحيط به الخط كله وأحد القسمين، مساويا للمربع الكائن من القسم الأخر.

12. **المبرهنة الرابعة عشر من المقالة الثانية** : نريد أن نبين كيف نعمل سطحا مربعا مساويا لمثلث معلوم.

IV. حلل النص التالي

المبرهنة 22 من المقالة الأولى من كتاب الأصول (E(I, 22 : نريد أن نبين كيف نعمل مثلثا من ثلاثة خطوط مفروضة، على أن كل خطين مجموعين منها أعظم من الخط الثالث، لأن سبيل المثلث هو أن يكون كل ضلعين من أضلاعه، إذا جمعا، أعظم من الثالث.

مثاله : أن خطوط A, B, C الثلاثة المفروضة، ونريد أن نبين كيف نعمل منها مثلثا، على أن مجموع A, B كخط واحد أعظم من خط C ومجموع خطي B, C أعظم من خط A ومجموع خطي A, C أعظم من خط B .

فنخط خطا مستقيما غير محدود النهاية وهو خط DT ونفصل DZ مساويا لخط A ونفصل ZH مساويا لخط B، ونفصل TH مساويا لخط C .

ونجعل نقطة Z مركزا ونخط ببعد ZD دائرة DLK، ونجعل نقطة H مركزا ونخط ببعد HT دائرة TKL. ونخرج من K خطي KZ, KH .

فلأن نقطة Z مركز للدائرة DLK، وقد خرج منها إلى المحيط خطا ZK, ZD ، فخط ZK إذن مثل خط ZD، لكن خط ZD مثل خط A، فضلع ZK مثل A.

أيضا فإن نقطة H مركز للدائرة TKL، وقد خرج منها إلى المحيط خطا HK, HT، فخط HK إذن مثل خط HT، وخط HT فصلناه مثل خط C، فضلع KH مساو لخط C.

وكنا قد فصلنا ZH مثل خط B. ومنه المطلوب، وذلك ما أردنا أن نبين.

V. حلل النص التالي مع إعطاء الشكل الهندسي بشيء من العناية وقل بماذا تذكرك هذه المبرهنة؟

المبرهنة 47 من المقالة الأولى من كتاب الأصول (E(I, 47 : كل مثلث قائم الزاوية فإن المربع الكائن من الضلع الذي يوتر القائمة مساو لمجموع المربعين الكائنين من الضلعين الباقيين.

مثاله : أن زاوية ب أ جـ من مثلث أ ب جـ قائمة. فأقول إن المربع الكائن من ضلع ب جـ الموتر لزاوية ب أ جـ القائمة مساو لمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب أجـ وهما الضلعان المحيطان بالزاوية القائمة.

برهانه أنا نعمل على خط ب جـ سطحا مربعا قائم الزوايا وليكن مربع ب جـ د هـ ونعمل أيضا على خطي أب، أ جـ مربعي أ ب ز ح، أ ط ك جـ قائمي الزوايا ونخرج من نقطة أ خط أ ل موازيا لخطي ب د، جـ هـ ونخرج خطي أ د، جـ ح.

فلأنه قد أخرج من نقطة أ من خط ب أ خطا أ جـ، أ ز في جهتين مختلفتين فحدث عن جنبتيه زاويتا ب أ جـ و ب أ ز وكل واحدة منهما قائمة، فإن خطي أ جـ، أ ز قد أتصل على استقامة فصار خطا واحدا. ولأن زاوية أ ب ح القائمة مساوية لزاوية جـ ب د القائمة نأخذ زاوية أ ب جـ المشتركة، فزاوية جـ ب ح بأسرها مساوية لزاوية أ ب د بأسرها. وضلع ب ح مساو لضلع أ ب. وضلع ب د مساو لضلع ب جـ. فضلعا ح ب، ح جـ مساويان لضلعي أ ب، ب د وزاوية أ ب د مساوية لزاوية جـ ب ح، يكون المثلث جـ ب ح مساويا لمثلث أ ب د. ولأن سطح أ ب ز ح متوازي الأضلاع وقاعدته قاعدة مثلث جـ ب ح، وهي خط ح ب وهما بين خطي زجـ، ح ب المتوازيين، يكون سطح أ ب ز ح ضعف مثلث جـ ب ح.

وأيضا فإن سطح ب د م ل متوازي الأضلاع وقاعدته قاعدة مثلث أ ب د، وهي خط ب د وهما بين خطي أ ل، ب د المتوازيين، يكون سطح ب د م ل ضعف مثلث أ ب د.

وقد كنا بينا أن مثلث أ ب د مساو لمثلث جـ ب ح وأن سطح أ ب ز ح ضعفه، والتي هي أضعاف لشيء واحد متساوية، فمربع أ ب ز ح مساو لسطح ب د م ل.

وبمثل هذا البرهان والاستشهاد نبين أن سطح جـ هـ م ل مساو لمربع أ جـ ط ك. فسطح ب جـ د هـ بأسره مساو لمجموع مربعي أ ب ز ح، أ ج ط ك. فقد تبين أن المربع الكائن من ضلع ب جـ الموتر لزاوية ب أ جـ القائمة مساو لمجموع المربعين الكائنين من ضلعي أ ب أجـ، وذلك ما أردنا أن نبين.

VI. حلل النص التالي

كتاب الأصول (VI، 10) : نريد أن نبين كيف نعمل مثلثا متساوي الساقين، تكون كل واحدة من زاويتيه اللتين على القاعدة ضعف الزاوية التي يحيط بها الساقان.

فنفرض خطا ما، وليكن خط أ ب ونقسمه بقسمين، يكون السطح القائم الزوايا الذي يحيط به خط أ ب وأحد القسمين مثل المربع الكائن من القسم الأخر. فننزل أنا قد قسمناه على نقطة جـ. ونجعل نقطة أ مركزا ونخط ببعد أ ب دائرة عليها ب د هـ ونخرج من نقطة ب وترا في الدائرة ب د هـ مساويا لخط أ جـ وليكن مثل خط ب د ونصل خط جـ د وخط أ د

فأقول إن كل واحدة من زاويتي أ ب د، أ د ب ضعف زاوية ب أ د.

برهانه : أنا نخط على مثلث أ جـ د دائرة أ جـ د. فمن أجل أن القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ مساو للمربع الكائن من خط ب د، ونقطة ب خارج دائرة أ جـ د، وقد خرج منها خطان أحدهما يقطعها، وهو خط أ ب، والأخر ينتهي إليها، وهو خط ب د. فمن أجل أن القائم الزوايا الذي يحيط به خطا أ ب، ب جـ مساو للمربع الكائن من خط ب د، فظاهر أن ب د مماس لدائرة أ جـ د.

ولأنه خرج من علامة المماسة خط د جـ، فظاهر أن، عن جنبتي خط جـ د زاويتين مساويتين للزاويتين اللتين في قطيعتيه المتبادلتين. فزاوية ب د جـ مساوية لزاوية جـ أ د. ونأخذ زاوية جـ دأ مشتركة، فيكون جميع زاوية ب د أ مساوية لمجموع زاويتي جـ د أ، جـ أ د. لكن زاويتي جـ د أ، جـ أ د مساويتان لزاوية ب جـ د الخارجة من مثلث أ جـ د. فزاوية ب جـ د إذن مساوية لزاوية أ د ب. ومن أجل أن خط أ ب مساو لخط أ د. فبين أن زاوية أ ب د مساوية لزاوية أ د ب، فزاوية جـ ب د إذن مساوية لزاوية ب جـ د. فبين أن خط ب د مساو لخط جـ د. وكنا فرضنا خط ب د مساو لخط أ جـ. فخط جـ د مساو لخط أ جـ. وظاهر أن زاوية جـ أ د مساوية لزاوية جـ د أ. وقد كان تبين ان زاوية جـ د ب مساوية لزاوية جـ أ د. فزاوية جـ د أ إذن مساوية لزاوية جـ د ب. فزاوية أ د ب إذن ضعف زاوية ب أ د. وكذلك زاوية د ب أ ضعف زاوية ب أ د.

فقد عملنا مثلث أ ب د متساوي الساقين، كل واحدة من زاويتيه اللتين على القاعدة ضعف الزاوية التي يحيط بها الساقان. وذلك ما أردنا أن نبين.

المقالة الأولى من كتاب أقليدس في الأصول نقل إسحق بن حنين إصلاح ثابت بن قرة الحراني

بسم الله الرحمن الرحيم وبه ثقتي

النقطة هي شيء ما لا جزء له . والخط هو طول لا عرض له ونهايتا الخط نقطتان . والخط المستقيم

هو الموضوع على مقابلة أي النقط كانت التي عليه بعضها لبعض . والبسيط هو ما له طول وعرض فقط

ونهاياته ... البسيط خطوط . والبسيط المستوي هو الموضوع على مقابلة أي الخطوط المستقيمة كانت

على بعضها لبعض . والزاوية البسيطة هي انحراف كل واحد من خطين موضوعين في بسيط

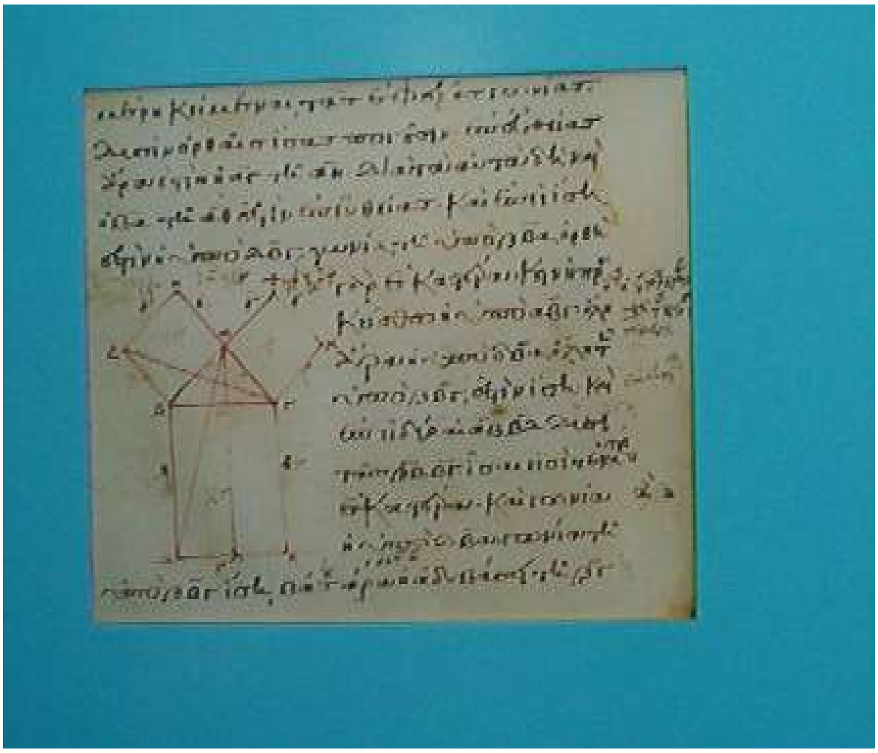
مستوي متصلين على غير استقامة عن الآخر . وإذا كان الخطان المحيطان بهذه الزاوية مستقيمين

سميت المستقيمة الخطين . وإذا قام خط مستقيم على خط مستقيم فصير الزاويتين اللتين

جنبتيه متساويتين فكل واحدة منهما قائمة وذلك الخط القائم يقال له عمود على الذي

هو قائم عليه . والزاوية التي هي أكبر من قائمة يقال لها منفرجة . والزاوية التي ... من قائمة

يقال لها حادة . والحد هو نهاية الشيء . ... الذي يحيط به حد واحد أو حدود



مضمون الرياضيات العربية

1. عصر الترجمة
2. ميلاد علم الجبر والمقابلة.
3. محمد بن موسى الخوارزمي
4. التبرير الهندسي لحلول المعادلات من الدرجة الثانية
5. علاقة الجبر بالهندسة
6. مدخل إلى علم المثلثات.

بعض جوانب الرياضيات العربية

خلال القرون الممتدة

من الثامن الميلادي إلى السادس عشر الميلادي

مقدمة

عرفت الرياضيات العربية أي مجموع الإنتاج الرياضي المدون بالعربية في نطاق الحـضارة العربية الإسلامية، أربع مراحل هامة :

1 . مرحلة الاكتساب المباشر أو غير المباشر للرياضيات المنتجة من قبل شعوب أخرى، خلال الفترة الممتدة من القرن الثامن إلى القرن العاشر الميلادي.

2 . مرحلة إبداع وابتكار وإعداد لغة رياضية عربية ما بين القرنين التاسـع والثالـث عـشر ميلادي.

3 . مرحلة نقل مجموعة من الأدوات الجديدة والكتب الكلاسيكية إلى أوروبا خلال الفترة الممتدة من القرن الثاني عشر إلى القرن السادس عشر.

4 . أخيرا مرحلة الجمود وتوقف جميع أنشطة البحث ابتداء من القرن الثالث عشر ميلادي.

مرحلة الترجمة

بدأت هذه المرحلة منذ القرن الثامن الميلادي واستمرت إلى القرن العاشر وشهدت بغداد فتـرة ازدهار متميز خلال النصف الأول من القرن التاسع. في هذه الفترة ترجمت خاصة مجموعة من الكتب الهندية والإغريقية سواء من اللغة السنسكريتية والإغريقية إلى العربية أو انطلاقـا مـن ترجمات فارسية وسريانية، وهذا كان خاصة فـي عهـد جعفـر المنـصور (754 – 775م)، واستمرت في عهد هارون الرشيد (786–806م) الذي انشأ بعض المصانع ومن بينها مـصنع للورق وبيت الحكمة. ثم تطورت في عهد المأمون (813 – 833م) الذي جلب إلى بيت الحكمة كبار العلماء في جميع الميادين. وشجع الخلفاء الباحثين على البحث وأجريت التجارب وجمعت النتائج فكانت التدقيقات هامة والاكتشافات عظيمة.

وبما أن الترجمة قد ساهمت بقسط كبير في ظهور النشاط العلمـي. أود هنـا أن أقـدم ابـرز

المترجمين:

- الحجاج بن يوسف بن مطر (ت. 833م) : نقل كتاب الأصول لأقليدس والمجسطي لبطليموس.

- ثابت بن قرة الحراني (ت. 901م) : أتقن السريانية واليونانية والعبرية والفارسية فضلا عن العربية، ترجم وأصلح عدة كتب من بينها كتاب الأصول لأقليدس، كتاب المدخل إلى علم العدد لنيقوخاص الجرصاني وكتاب الكرة والاسطوانة لأرخميدس.

- إسحاق بن حنين (ت. 911م) : برع في الترجمة وتسلم رئاسة بيت الحكمة. وقد نقل من _اليونانية إلى العربية ، مما نقله إلى العربية كتاب الأصول لأقليدس، وكتاب الكرة والاسطوانة لأرخميدس.

- قسطا بن لوقا البعلبكي (ت. 910م) : ترجم كتاب العدديات لديوفنطس. يقول عنه ابن النديم في كتابه الفهرست : "وقد ترجم قسطا قطعة من الكتب القديمة، وكان بارعا في علوم كثيرة منها الطب والفلسفة والهندسة والأعداد والموسيقى، ...، فصيحا باللغة اليونانية جيد العبارة باللغة العربية".

أشهر الكتب الرياضية المترجمة

- كتاب السند هند "سدها نتا" (Sind Hind) لمؤلفه براهما قوبطا (Brahma Gupta) وهو كتاب هندي يعالج مسائل في الفلك والرياضيات.

- كتاب الأصول لأقليدس ويعرف أيضا باسم كتاب الأركان ويشتمل على 13 كتابا وهو بحق يعتبر من أحسن الكتب عبر التاريخ في الهندسة المستوية.

- كتاب المجسطي لبطليموس يحتوي خلاصة ما توصل إليه قدماء اليونان في علم الفلك، والذي يعتبر المرجع الأساسي في علم الفلك العربي الإسلامي.

- كتاب المخروطات لابلونيوس يضع الأسس النظرية للخطوط المخروطية (من مستقيمات ودائرة، وقطع ناقص ومكافئ وزائد، ...).

كتاب الكرة والاسطوانة لارخميدس ويدرس خواص كل من الكرة والاسطوانة وعلاقتهما ببعضهما البعض.

كانت فترة المأمون (813-833م) من أخصب الفترات في الحضارة العربية الإسلامية، فازدهرت فيها بيت الحكمة التي كانت بمثابة مركز للبحث العلمي بالمفهوم العصري فبرز عدد من العلماء الأجلاء الذين ذاع صيتهم في دار الإسلام.

ولإبراز مساهمة هؤلاء العلماء سأقدم فيما يلي المواد الجديدة التي تظهر لأول مرة كعلم مستقل

في الحضارة العربية.

هذه المواد الجديدة هي : الجبر وحساب المثلثات والتحليل التوفيقي دون أن ننسى المساهمة الفعالة في المواد الكلاسيكية الأخرى كعلم الفلك وعلم الهندسة ونظرية الأعداد.

الجبر

حتى نتمكن من دراسة تاريخ هذا العلم وجب عليّ تقسيم مراحل تطوره إلى ما يلي :

1. التراث الجبري لما قبل الإسلام أي قبل القرن 8 م.
2. مدرسة الخوارزمي (ت. 850م)
3. مدرسة أبي كامل (ت. 930م)
4. مدرسة الكرجي (ت. 1029م)
5. مدرسة الخيام (ت. 1139م)
6. مدرسة الغرب الإسلامي (ق. 11...14م)

التراث الجبري لما قبل الإسلام أي قبل القرن 8 م.

من المعروف أن علم الجبر من ابتكار عربي وأول كتاب وضع في هذا العلم هو، حسب علمنا، كتاب المختصر في حساب جبر والمقابلة لمحمد بن موسى الخوارزمي (ت850 م). قبل الحديث عن هذا الكتاب يجدر بنا أن نعطي فكرة ولو سطحية عن مصادر علم الجبر أو عن الوسائل والأدوات الحسابية التي تدخل في حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية قبل ظهور هذا الكتاب.

1 . التراث البابلي (3500 ق م – 60 ق م) : عند تحليل وترجمة الألواح الطينية البابلية التي أكتشف أخيرا (بداية القرن 20 م)، وجدت بعض المسائل في الرياضيات تقتضي حل معادلات من الدرجة الأولى و الثانية و ذلك بالوسائل الحسابية المعروفة، غير أنه لا توجد حلول نموذجية لهذه المسائل. فكل مسألة تعالج معالجة خاصة دون الاستفادة من حلول المسائل المشابهة.

2 . التراث الهندي : كانت للهنود وسائل حسابية عثر عليها في كتب السند هند، حيث أن في أخر كل كتاب من كتب السند هند نجد بابا واسعا لحل المسائل الفلكية بالوسائل الحسابية ومن بين هذه الوسائل وسيلة لحل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية.

3 . التراث اليوناني (ق 13 ق م – 7 م) : عُرف اليونانيون ببراعتهم الهندسية، فوضعوا الأسس النظرية للهندسة فاخدعوها لبديهيات أولية، ولم يقبلوا بصحة أي نتيجة إلا إذا استنتجوها ببرهان دقيق من البديهيات، فكانوا أول من أدخل البرهان في الرياضيات وتوجد عدة مسائل هندسية يمكن حلها بطريقة جبرية غير أنهم لم يهتدوا إلى علم الجبر بسبب إصرارهم على رد كل مسألة إلى أسس هندسية.

محتوى كتاب الجبر لصاحبه الخوارزمي

ينقسم كتاب الخوارزمي إلى جزأين تسبقهما مقدمة يعرض فيها الكاتب بهذه الكلمات والألفاظ مرامي الكتاب : "لم يزل العلماء في الأزمنة الخالية، والأمم الماضية، يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم، ووجوه الحكمة، ونظرًا لمن بعدهم، واحتسابا للأجر بقدر الطاقة، ورجاء أن يلحقهم من أجر ذلك وذخره، ويبقى من لسان الصدق، ما يصغر في جنبه كثير مما كانوا يتكلفونه من المؤنة، ويحملونه على أنفسهم من المشقة في كشف أسرار العلم وغامضه. إما رجل سبق إلى ما لم يكن مستخرجا قبله فورثه من بعده، وإما رجل شرح مما أبقى الأولون مما كان مستغلقا فأوضح طريقه، وسهل مسلكه، وقرب مأخذه، وإما رجل وجد في بعض الكتب خللا فلم شعثه وأقام أوده، وأحسن الظن بصاحبه، غير راد عليه، ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه. وقد شجعني ما فضل اللّه به الإمام المأمون أمير المؤمنين مع الخلافة التي حاز له إرثها وأكرمه بلباسها وحلاه بزينتها، من الرغبة في الأدب وتقريب أهله وإدنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته إياهم على إيضاح ما كان مستوعرا. على أن الفت من كتاب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة إليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم وأحكامهم وتجارتهم، وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الارضين وكرى الأنهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه، مقدما لحسن النية فيه وراجيا لان ينزله أهل الأدب بفضل ما استودعوا من نعم اللّه تعالى وجليل آلائه وجميل بلائه عندهم منزلته وباللّه توفيقي هذا وفي غيره (عليه توكلت وهو رب العرش العظيم).

الجزء الأول من الكتاب : يعرض الكاتب في هذا الجزء باختصار وبعجالة لإقامة حساب الجبر والمقابلة وهو نظري أي إنشاء مفرداته الأولية ومفاهيمه وهو في الحقيقة الجزء الأهم بالنظر إلى تاريخ الجبر، و ينقسم هذا الجزء إلى عدة فصول :

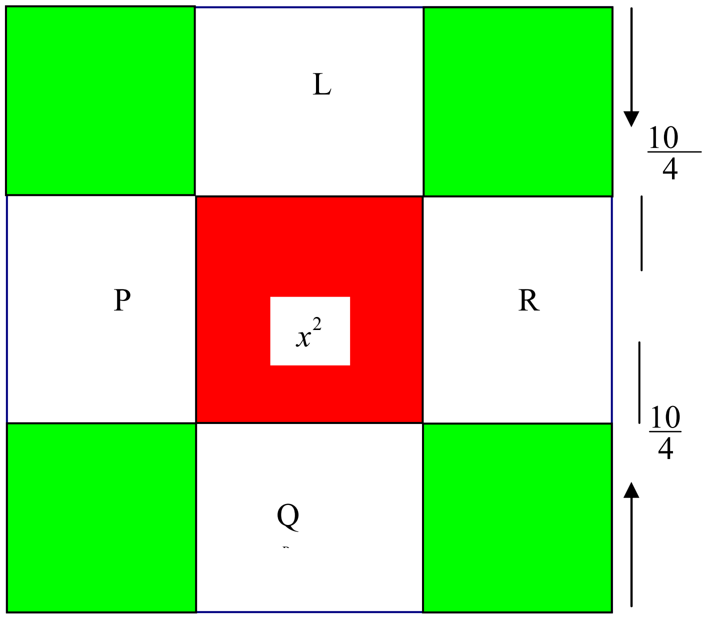
الفصل الأول : يذكر الخوارزمي بتعريف النظام العشري الموروث عن الهنود، ثم يعرف موضوعات الجبر (الأعداد الصحيحة والناطقة الموجبة) الجذر والمال الذي هو مربع الجذر، ثم يعطي المعادلات النموذجية الست حيث يعرفها ويرتبها، وان كل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية.

الفصل الثاني : يقدم الخوارزمي لكل من المعادلات الست طريقة حل تسمح بالحصول على قيمة الجذر أي على المجهول، يتم التعبير عن كل مرحلة أولا بشكل عام، ثم يتم إبرازها وشرحها بعد ذلك باعتماد مثال، ثم يعرض فيما بعد التعليلات الهندسية لإثبات وجود حلول (موجبة) لكل

معادلة.

مثال :

تعليل حل معادلة من الدرجة الثانية هندسيا : $x^2+10x=39$



ليكن x طول ضلع المربع الداخلي والذي مساحته x^2. نأخذ $\frac{10}{4}$ عرض المستطيلات L, P, Q, R مساحة المستطيلات الأربع هي : $4.\left(\frac{10}{4}\right)x=10x$. ومنه مساحة المستطيلات الأربع والمربع الداخلي (مساحة الصليب في الشكل) معطاة وتساوي 39 أي أن $x^2+10x=39$.

ومن جهة أخرى مساحة المربعات الربع المتواجدة على زويا المربع الكبير هي : $4.\left(\frac{10}{4}\right)^2=25$

إذن مساحة المربع الكبير هي : $39+25=64$ وضلعه $\sqrt{64}=8$.

ومنه طول ضلع المربع الداخلي هو : $x=8-2.\frac{10}{4}=8-5=3$.

حل المعادلة إذن هو 3[14].

الفصل الثالث : يشرح الخوارزمي طريقة تجبير مشكل معلوم وذلك بإرجاعه إلى إحدى المعادلات النموذجية الست السابقة.

الفصل الرابع : يبين الخوارزمي كيف يمكن مد العمليات الحسابية الكلاسيكية (الجمع، الطرح،

[14] في الحقيقة الخوارزمي يعطي حل المعادلة $x^2+10x-39=0$ بـ $x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}$، وهذا يوافق العلاقة المعروفة حاليا والمميز الحالي يمثل المربع الكبير.

الضرب، القسمة والتجذير) إلى موضوعات الجبر في تلك الفترة والتي هي الإعداد الصحيحة والكسرية الموجبة وكذلك بعض وحيدات الحد، ويصوغ كذلك ما سيتفق على تسميته لاحقا بقاعدة الإشارات.

الفصل الخامس : هو الأخير يشتمل على 40 مسألة تطبيقية جمعها صاحب الكتاب في ثلاثة مواضيع (مسائل العشرات، مسائل الأموال، مسائل الرجال) وتوصل إلى حلها بالاعتماد على أدوات الفصول السابقة.

الجزء الثاني : وهو الجزء الأكبر (3/2) والأهم كميا، فلقد خصصه حصرا لحل مسائل المعاملات التجارية ومسح الأراضي وقسمة التركات (حسب قوانين الفقه الإسلامي) والوصايا والقياسات الهندسية.

مفهوم الجبر

لغة : هو مشتق من فعل جبر. جبر، يجبر، جبرا. جبر عظم الكسير أي أصلحه، جبر الفقير أي أعانه، جبر اليتيم أي كفله[15] .

اصطلاحا : حسب معجم الرياضيات المعاصرة يعرف بأنه ذلك الفرع من الرياضيات الذي يهتم بدراسة البنى الجبرية بشكل مستقل عن مفهوم النهاية، وأنه وإلى غاية القرن 17 تعميم للحساب[16].

وفي قاموس لاروس (Larousse) الجبر (Algèbre) هو: فرع من فروع الرياضيات يسمح بإيجاد قيم مجهولة مرمّزة بحرف، أي بالجبر نستطيع إيجاد قيمة x في المعادلة $x + 2 = 5$. ويشيرون إلى أن اسم الجبر مشتق من الكلمة العربية الجبر التي تعني التقليص والتقليل[17].

أما مفهوم الجبر عند الخوارزمي فهو أن تجبر طرف المعادلة بما نقص من أموال أو جذور أو أعداد تزيد ذلك على الطرف الآخر أي حذف الحدود السالبة، والمقابلة هي أن تقابل بين الحدود المتشابهة من طرفي المعادلة. فالجذر إذن ما نشير إليه حاليا ب x والمال ب x^2.

---

[15] علي بن هادية، لحسن بلبيش، الجيلاني بن الحاج يحي، تقديم مسعود المسعدي، القاموس الجديد للطلاب، الطبعة الأولى، جويلية 1979.

[16] صلاح أحمد، موفق دعبول، إلهام حمصي، معجم الرياضيات المعاصرة، الطبعة الأولى. 1983، ص. 76.

[17] Larousse*, dictionnaire super Major*, la série 18481-320133 B, Avril 1995.

هذه هي الوسائل التي استعملها الخوارزمي عندما ألّف في الجبر، فقد قال: "ووجدت الأعداد التي يحتاج إليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب إلى جذر ولا إلى مال. فالجذر منها كل شيء مضروب في نفسه من الواحد وما فوقه من الأعداد وما دونه من الكسور. والمال كل ما اجتمع من الجذر مضروب في نفسه. والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة إلى جذور ولا إلى مال".

ومثال ذلك معادلة من الشكل $x^2-3x+16 = x+12$، في حلها يقول الخوارزمي : "فأجبر ذلك وزد الثلاثة أشياء على الشيء والاثني عشر درهما"

$$x^2+16 = x+12 \Leftrightarrow x^2-3x+3x+16 = x+3x+12 .$$

ثم يكمل فيقول :" وقابل به وألقي اثني عشر يبقى أربع دراهم" أي

$$x^2+16-12 = 4x \Leftrightarrow x^2+4 = 4x .$$

إن أول من استعمل كلمة جبر للعلم الذي يحمل هذا الاسم، هو: محمد بن موسى الخوارزمي. فمن هو؟

محمد بن موسى الخوارزمي

هو أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي، يكنيه البعض أبو بكر ويعتقد أن هذه الكنية تعود إلى لبس مع أحد الأطباء وهو محمد بن العباس الخوارزمي[18]. ويكنيه البعض الآخر أبا عبد الله ويظن أن هذه الكنية تعود إلى التباس وقع، حيث اختلط اسمه باسم معاصر له هو محمد بن شاكر، عمل أيضا في الرياضيات وعاش في بغداد[19]. أصله من خوارزم، وخوارزم عاصمة من عواصم خراسان – هي مدينة خيوة حاليا جنوب بحيرة آرال– ومقامه بقطربل – على مقربة من بغداد –.

أما عن تاريخ ميلاده ووفاته فهو غير مضبوط، كل ما نعرفه أنه عاش في فترة الخليفة العباسي المأمون بن هارون الرشيد (813 م – 833 م)، وقد امتد بعد المأمون.

وقد كان الخوارزمي منقطعا إلى خزانة المأمون، فاشتغل في العلم والأدب، وهو من أصحاب علوم الهيئة، فكان الناس يعولون على زيجيه الأول والثاني قبل الرصد.

[18] علي إسحاق عبد اللطيف، عالم الهندسة الرياضية ابن الهيثم، المرجع السابق، ص. 23.

[19] أحمد سليم سعيدان، تاريخ علم الجبر في العالم العربي، المرجع السابق، ص. 17.

وما يعزّز فرضية أنه عاش فترة المأمون أنه قال : "وقد شجعني ما فضّل الله به الإمام المأمون أمير المؤمنين مع الخلافة التي حاز له إرثها وأكرمه بلباسها وحلاه بزينتها من الرغبة في الأدب وتقريب أهله وإدنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته إياهم".

إن كثيرا من المؤلفين والمفكرين يعترفون للخوارزمي صراحة كمرجع أساسي من مراجعهم، من بينهم عمر الخيام، وأبو كامل إذ يقول : "هو أول من توصل لكتاب الجبر والمقابلة وهو من بدأه واخترع جميع ما فيه من أسس"[20]، وكذلك ذكر ابن خلدون في مقدمته أن أول من كتب في الجبر هو محمد بن موسى الخوارزمي، وزكريا بن محمد بن محمود القزويني ذكر أن الخوارزمي أول من ترجم علم الجبر للمسلمين[21].

هذا هو الخوارزمي الذي ذاع صيته وزادت شهرته فبلغت مشارق الأرض ومغاربها، اسمه يتردد في لغات كثيرة محرفا أو مقنعا، ففي الإنجليزية نجد كلمة ألجورزم (Algorithme) معناها الطريقة الوضعية في حل المسائل، و بقيت الأعداد 1.....9 إلى غاية أوائل القرن 18 م تسمى باللاتينية ألجورزمس (Algorismus)، وفي اللغة الإسبانية نجد كلمة جوارزمو (Guarismo) التي تعني الأعداد والأرقام، وقد جاء في الجزء الأول من معجم اللغة الفرنسية لمؤلفه الفرنسي ليتري (Littré) "كان مفهوم ألغورتم في القرن الثالث عشر يعني العمل الحسابي بواسطة الأرقام العربية"[22].

فضلا عن هذا كله اسم علم الجبر مشتق من الكلمة العربية الجبر التي استخدمها الخوارزمي اسما لكتابه، فهو بالفرنسية Algèbre، وبالإنجليزية Algebra، وبالألمانية Die algebra.

من الكتب الغربية التي بنيت على كتاب الخوارزمي كتاب كارمن دي ألجورزم[23] (Carmen de Algorismo)، وكتاب ألجورزمس فالجارس (Algorismus vulgarise)[24] .

---

[20] رشدي راشد، ترجمة حسين زين الدين، تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب، بيروت، الطبعة الأولى، أفريل 1989، ص. 20.

[21] علي مصطفى مشرقة، محمد مرسي أحمد، كتاب الجبر والمقابلة، المرجع السابق، ص. 13.

[22] محمد السويسي، لغة الرياضيات العربية، تونس، الدار التونسية للنشر، المؤسسة الوطنية للكتاب، المؤسسة الوطنية للترجمة والتحقيق والدراسات، جانفي 1989، ص. 48.

[23] وضعه اسكندر فيلادي (Alexander de villa die) حوالي 1220، نشره آليوال (Alliwell) في مجموعة Rara Mathematica بلندن سنة 1739.

[24] مؤلفه جون هاليفاكس (John of Halifax) حوالي 1250.

ذكر ابن النديم في كتاب الفهرست كتبا للخوارزمي منها : كتاب الزيج – نسختان أولى وثانية –، كتاب الرخامة، و كتاب عمل الإسطرلاب، وكتاب التاريخ. و لم يذكر كتبا عدة، منها أهم كتاب ألفه الخوارزمي وهو كتاب الجبر والمقابلة، في هذا الشأن يقول نيللنو أن ترجمة سند بن علي تأتي مباشرة بعد ترجمة الخوارزمي تنتهي بعبارة " وينسب له من الكتب كتاب الحساب الهندي، كتاب الجمع والتفريق، كتاب الجبر والمقابلة "، ورجّح أن تكون هذه العبارة كلها أو بعضها أرادها ابن النديم للخوارزمي فوقعت خطأ من نصيب سند بن علي. وكذلك يذكر مصطفى بن عبد الله حاجي خليفة استشهادا من كتاب أبو كامل "الوصايا بالجبر" يتحدث فيه عن كتاب غير كتابه، ويكتب: "لقد أتيت في كتابي الثاني الحجة على أن السطوة الأسبقية في الجبر هي لمحمد بن موسى الخوارزمي ووردت طيش المدعو ابن برزة الذي ينسبه لعبد الحميد والذي يدعي بأنه جده "[25].

إذن كتب الخوارزمي هي :

* كتاب الزيج.

* كتاب الرخامة.

* كتاب عمل الإسطرلاب.

* كتاب التاريخ.

* زيج السند هند : والزيج تعني الجدول أو الجداول، أطلقها العرب على كتب الفلك والتنجيم، والسند هند تحريف لكلمة سدهانتا الهندية [26].

* كتاب الحساب الهندي : هو أول كتاب أدخل الأرقام الهندية إلى العالم الإسلامي.

* كتاب الجمع والتفريق : لم يصل إلينا هذا الكتاب، ولكن وصلت ترجمات لاتينية. هناك من يعتقد أنه نفسه كتاب الحساب الهندي، لكن البحوث بينت عكس ذلك.

* كتاب صورة الأرض.[27]

* كتاب الإسطرلاب.

* كتاب رسم الربع المعمور: نشره Lelevel سنة 1852[28].

وله رسالة باسم تاريخ اليهود[29].

---

[25] رشدي راشد، تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب، المرجع السابق، ص. 20.

[26] سدهانتا منية على كتاب براهما جبتا أعظم رياضي هندي في العصور الوسطى.

[27] طبع هذا الكتاب في فينا سنة 1926، وأعيد طبعه سنة 1962.

[28] محمد السويسي، لغة الرياضيات العربية، المرجع السابق، ص. 50.

المختصر في حساب الجبر والمقابلة

هو أول كتاب وضع في الجبر. يقول عنه شال (Chasles) : "لنعلم ما نحن مدينون به لمحمد بن موسى الخوارزمي حسبنا أن نذكر أننا اقتبسنا من كتابه أولى معلوماتنا في الجبر، وأنه هو معلمنا الأول في هذه الشعبة الأساسية من شعب العلوم الرياضية، وقبل أن نبدي رأينا في عمله العلمي يجب أن نفكر مليا، لأن كتابا في الجبر اعتبره صاحبه في القرن التاسع للميلاد كتابا ألف قصد المبتدئين، قد صار بعد ذلك بسبعة قرون المسار الأعلى للأوربيين، فبه اهتدوا، ومنه انطلقوا لاكتشاف عظيم أعمالهم في العلوم"[30].

وقد كان الحدث بالغ الأهمية، إذ لم يتأخر الرياضيون حتى في حياة الخوارزمي وأولئك الذين جاءوا بعده في شرح وتفسير كتابه. ومن بين الذين أتوا مباشرة بعده نذكر:
عبد الحميد بن ترك، سنان بن الفتح، أبو كامل وأبو الوفاء البوزجاني.

نشر هذا الكتاب بعدة لغات، نشرت نسخة عربية في 1831 م من طرف فردريك روزن وترجمة فرنسية للجزء الذي يبحث في المساحات نشرها مار(Marre).
وفي 1915 م نشرت ترجمة عن نسخة لاتينية ذات الأصل العربي، ونشر أيضا سنة 1939 م بالعربية في القاهرة مع تعليقات علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي أحمد.

ويحتوي كتاب الجبر والمقابلة على ثمانية أبواب هي :

1. مقدمة.
2. أصناف المعادلات: وهي ست

* أموال تعدل جذورا $ax^2=bx$ فيكون $x=\frac{b}{a}$
* أموال تعدل أعدادا $ax^2=c$ فيكون $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$
* جذور تعدل أعدادا $bx=c$ فيكون $x=\frac{c}{b}$
* أموال وجذور تعدل أعدادا $x^2+bx=c$ فيكون $x=-\frac{b}{2}+\sqrt{c+\frac{b^2}{2}}$
* أموال وأعداد تعدل جذورا $x^2+c=bx$ فيكون $x=\frac{b}{2}+\sqrt{c+\frac{b^2}{2}}$

[29] طبعت ونشرت في مطبوعات في حيدر آباد سنة 1948 في جملة رسائل متفرقة. للمزيد أنظر : كتاب تاريخ علم الجبر في العالم العربي لأحمد سليم سعيدان، المرجع السابق، ص. 24.

[30] محمد السويسي، لغة الرياضيات العربية، المرجع السابق، ص. 49.

* جذور وأعداد تعدل أموالا $x^2=bx+c$ فيكون $x=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$

علما أن x هو الجذر أو الشيء؛ a,b,c أعداد موجبة (صحيحة، كسرية وأحيانا أعداد صماء تربيعية دون أن يشير إليها أنها أعداد و x^2 هو المال (مربع الجذر).

3. باب الضرب
4. باب الجمع والنقصان
5. باب المسائل الست
6. باب المسائل المختلفة
7. باب المعاملات
8. باب المساحة
9. كتاب الوصايا

ميلاد علم الجبر

من خلال دراستنا للجبر قبل الخوارزمي نلاحظ أنه لم يكن مبلورا بطريقة تجعل منه فرعا ولا حتى فصلا رياضيا منفردا، فقد كان الجبر طرقا متفرقة. وكان لمحمد بن موسى الخوارزمي الفضل في أن نظّم الطرائق والمفاهيم والمسائل كقواعد عامة متكاملة في علم سماه "علم الجبر والمقابلة "، وكما له الفضل في إرساء أسس هذا العلم، وإن لم يخلقه من العدم. قسم الخوارزمي المعادلات من الدرجة الأولى و الثانية إلى ستة أصناف، مستعملا الأعداد الموجبة تماما فقط.

والمعادلات هي:

1 . أموال تعدل جذور

"مثل قولك مال يعدل خمسة أجذاره، فجذر المال خمسة والمال خمسة وعشرون".

إذن الصنف الأول هو من الشكل $ax^2 = bx$ والمثال الذي اقترحه الخوارزمي في كتابه هو $x^2 = 5x$، فيكون $x = 5$ و $x^2 = 25$. يذكر الخوارزمي دائما المال (x^2) بعدما يجد الجذر (x).

2. أموال تعدل عدد

" فمثل قولك مال يعدل تسعة فهو المال وجذره ثلاثة ".

معنى هذا أن الصنف الثاني من المعادلات هو من الشكل $ax^2 = b$ والتي تقبل $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ كحل لها، أما عن المثال المعطى فهو $x^2 = 9$ الذي يقبل الحل $x=3$ (الأعداد السالبة لم تكن بعد موجودة).

3. جذور تعدل أعداد

"أما الجذور التي تعدل عدد فكقولك جذر يعدل ثلاثة من العدد فالجذر ثلاثة والمال الذي يكون منه تسعة".

الصنف الثالث من المعادلات هو ما يعبر عنه حاليا ب $bx = c$ الذي يقبل $x = \frac{c}{b}$ كحل.

هذه الأصناف الثلاثة الأولى من المعادلات التي اختارها الخوارزمي تجمع بين حدين فقط من بين ثلاثة حدود(مال، جذر، عدد)، أما عن الثلاثة المتبقية فهي تجمع بين الحدود الثلاثة.

4. أموال وجذور تعدل عدد

"فمثل قولك مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما".

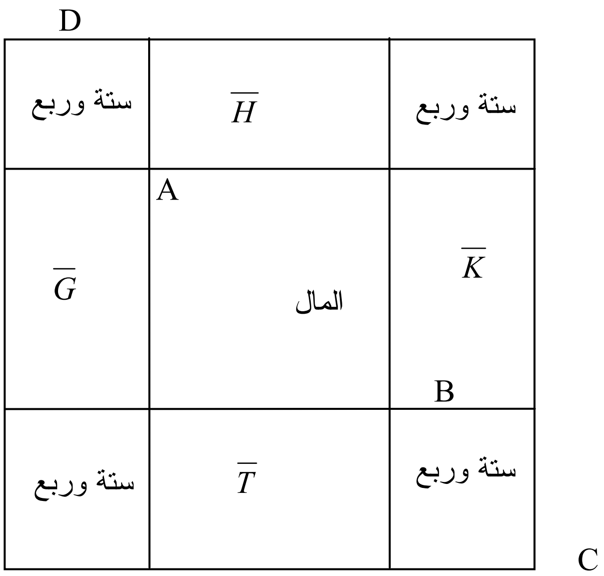
وهذا الصنف من المعادلات من الشكل $ax^2+bx=c$ فيقترح الخوارزمي كمثال $x^2 + 10x = 39$ وفي حله يقول : "فبابه أن تنصف الأجذار وهي في هذه المسألة خمسة فتضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو الجذر والمال الذي تريده تسعة".

مقارنة طريقة حل الخوارزمي مع الطريقة التي نستعملها حاليا نرى تطابق في كيفية الحل، والجدول الآتي يبين ذلك.

$a\neq0$ $\quad ax^2 + bx = c \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$	$x^2+10x=39$
$\frac{b}{2a}$	ننصف الأجذار $\frac{10}{2}=5$
$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	نضربها في نفسها $5^2=25$
$\Delta = \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a}$	نزيد عليها التسعة والثلاثين $25+39=64$
$x = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2+4ac}{4a^2}}$	نأخذ $\sqrt{64}=8$ ننقص منها 5: $8 - 5 = 3$
	$x=3$ وهو الحل

وبعد ذلك يقدم التبرير الهندسي على النحو التالي:

"فأما علة مال وعشرة أجذاره تعدل تسعة وثلاثين درهما فصورة ذلك سطح مربع مجهول الأضلاع وهو المال الذي تريد أن تعرفه وتعرف جذره وهو سطح $\overline{AB}$ وكل ضلع من أضلاعه فهو جذره وكل ضلع من أضلاعه إذا ضربته في عدد من الأعداد فما بلغت الأعداد فهي أعداد جذر وكل جذر مثل جذر ذلك السطح فلما قيل إن مع المال عشرة أجذاره أخذنا ربع العشرة وهو اثنان ونصف وصيرنا كل ربع منها مع ضلع من أضلاع السطح فصار مع السطح الأول الذي هو سطح $\overline{AB}$ أربعة سطوح متساوية الطول كل سطح منها مثل جذر سطح $\overline{AB}$ وعرضه اثنان ونصف وهي سطوح $\overline{H}$، $\overline{K}$ ، $\overline{T}$ ، $\overline{G}$ فحدث سطح متساوي الأضلاع مجهول أيضا ناقص من زوياه الأربع في كل زاوية من النقصان اثنان ونصف في اثنين ونصف فصار الذي يحتاج إليه من الزيادة حتى يتربع السطح اثنان ونصف في مثله أربع مرات ومبلغ ذلك جميعه خمسة وعشرين وقد علمنا أن السطح الأول الذي هو سطح المال والأربعة سطوح التي حوله وهي عشرة أجذاره وهي تسعة وثلاثون من العدد، فإذا زدنا عليها الخمسة والعشرين التي هي المربعات الأربع التي هي على زوايا سطح $\overline{AB}$ ثم السطح الأعظم وهو سطح $\overline{DC}$ وقد علمنا أن ذلك كله أربعة وستون وأحد أضلاعه جذره وهو ثمانية فإذا نقصنا من الثمانية مثل ربع العشرة مرتين من طرفي ضلع السطح الأعظم الذي هو سطح $\overline{DC}$ وهو خمسة بقي من ضلعه ثلاثة وهو جذر ذلك المال.

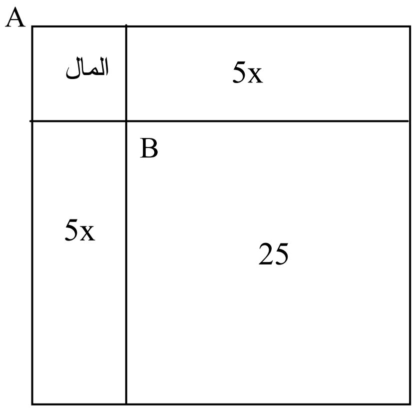


وهناك تبرير هندسي آخر وهو:

نضع سطح مربع $\overline{AB}$ وهو المال (أي طول ضلع هذا المربع x)، ننصف العشرة فتصير خمسة، نضيف خمسة على جنبي السطح $\overline{AB}$، فينتج بعد الإكمال مستطيلين طول أحد الضلعين x وطول الآخر 5، إذن مساحة كل منهما $5x$، وبجمع المساحتين نحصل على $10x$. بعد هذا نكمل المربع الأعظم، فنرسم المربع الذي طول ضلعه 5 ومساحته 25. مساحة المربع الأعظم هي 64، لأنه لدينا $x^2 + 10x = 39$ و $64 = 25 + 39$.

إذن طول ضلع المربع الأعظم هو 8، ومنه طول ضلع المربع $\overline{AB}$ هو $x = 3$

لأن: $x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$



5. مال وعدد تعدل جذور

"فنحو قولك مال وأحد وعشرون من العدد يعدل عشرة أجذاره" .

إذن الصنف الخامس هو ما نعبر عنه حاليا ب $ax^2+c=bx$، وعن المثال المقترح فهو $x^2+21=10x$، في حله يقول الخوارزمي: "وأما الأموال والعدد التي تعدل الجذور فمثل قولك مال وأحد وعشرون من العدد يعدل عشرة، فبابه أن تنصف الأجذار فتكون خمسة فتضربها في مثلها تكون خمسة وعشرين فتنقص منها الواحد والعشرين التي ذكرناها مع المال فيبقى أربعة فخذ جذرها وهو اثنان فانقصها من نصف الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة، وإن شئت فزد الجذر على نصف الأجذار فيكون سبعة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة وأربعين".

هذا هو الصنف الخامس ،يمكن التأكد من أنه الصنف الوحيد الذي يمكنه أن يقبل حلين موجبين، وقد تفطن الخوارزمي لذلك لذا أكمل قائلا: "...وهذا الباب يعمل بالزيادة والنقصان جميعا وليس في غيره من الأبواب الثلاثة التي يحتاج فيها إلى تصنيف الأجذار. واعلم أنك إذا نصفت الأجذار في هذا الباب وضربتها في مثلها فكان مبلغ ذلك أقل من الدراهم التي مع المال فالمسألة مستحيلة وإن كانت مثل الدراهم بعينها فجذر المال مثل نصف الأجذار سواء لا زيادة ولا نقصان ...." .

بإجراء جدول نقارن فيه عمل الخوارزمي مع العمليات التي تستعمل حاليا لحل هذا النوع من المعادلات، نلاحظ تطابق الطريقتين.

$a\neq 0 \quad ax^2+c=bx \Leftrightarrow x^2+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}x$	$x^2+21=10x$
$\frac{b}{2a}$	ننصف الأجذار $5=\frac{10}{2}$
$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	نضربها في مثلها $\left(\frac{10}{2}\right)\times\left(\frac{10}{2}\right)=25$
$\Delta=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$	ننقص منها الواحد والعشرين $25-21=4$
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$	خذ جذرها وهو اثنان $\sqrt{4}=2$
$x=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\Delta}$	$x_1=5-2=3$ ، $x_2=5+2=7$

وكما رأينا يشير الخوارزمي إلى الحالتين: $\Delta=0$ فيكون الحل $x=\frac{b}{2a}$، و $\Delta\leq 0$ $(\Delta\neq 0)$ أين لا يوجد حل.

يبرر الخوارزمي هندسيا كيفية الحل التي قدمها على النحو التالي :

" وأما علة مال واحد وعشرون درهما تعدل عشرة أجذاره فإننا نجعل المال سطحا مربعا مجهول الأضلاع وهو سطح $\overline{AD}$ ثم نضم إليه سطحا متوازي الأضلاع عرضه مثل أحد أضلاع سطح $\overline{AD}$ وهو ضلع $\overline{CN}$ والسطح $\overline{CB}$ فصار طول السطحين جميعا ضلع $\overline{GC}$ ود علمنا أن طوله عشرة من العدد لأن كل سطح مربع متساوي الأضلاع والزوايا فإن أحد أضلاعه مضروبا في واحد جذر ذلك السطح وفي إثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون تعدل عشرة أجذاره علمنا أن طول $\overline{GC}$ عشرة أعداد لأن ضلع $\overline{GD}$ جذر المال فقسمنا ضلع $\overline{GC}$ نصفين على نقطة H فيتبين لنا أن خط $\overline{HC}$ مثل خط $\overline{GH}$ وقد تبين لنا أن خط $\overline{TH}$ مثل خط $\overline{GD}$ فزدنا على خط $\overline{TH}$ على استقامة مثل فضل $\overline{GH}$ على $\overline{TH}$ ليتربع السطح فصار خط $\overline{TK}$ مثل خط $\overline{KM}$ وحدث سطح مربع متساوي الأضلاع والزوايا وهو سطح $\overline{MT}$ وقد تبين لنا أن خط $\overline{TK}$ خمسة وأضلاعه مثله فسطحه إذا خمسة وعشرون وهو ما اجتمع من ضرب نصف الأجذار في مثلها وهو خمسة في خمسة يكون خمسة وعشرين. وقد كان تبين لنا أن سطح $\overline{BC}$ هو الواحد والعشرون التي زيدت على المال فقطعنا من سطح $\overline{CB}$ بخط $\overline{TK}$ الذي هو أحد أضلاع سطح $\overline{MT}$ بقي سطح $\overline{TA}$ وأخذنا من خط $\overline{KM}$ خط $\overline{KL}$ وهو مثل خط $\overline{HK}$ فتبين لنا أن خط $\overline{TH}$ مثل خط $\overline{ML}$ وفضل من خط $\overline{MK}$ خط $\overline{LK}$ وهو مثل خط

$\overline{KH}$ فصار سطح $\overline{MZ}$ مثل سطح $\overline{TA}$ فيتبين لنا أن سطح $\overline{CT}$ مزيدا عليه سطح $\overline{MZ}$ مثل سطح $\overline{CB}$ وهو واحد وعشرون وقد كان سطح $\overline{MT}$ خمسة وعشرون فلما نقصنا من سطح $\overline{MT}$ سطح $\overline{CT}$ وسطح $\overline{MZ}$ اللذين هما واحد وعشرون بقي لنا سطح صغير وهو سطح $\overline{KZ}$ وهو فضل ما بين خمسة وعشرين وواحد وعشرين وهو أربعة وجذرها خط $\overline{ZH}$ وهو مثل خط $\overline{HA}$ وهو اثنان. فإن نقصتهما من خط $\overline{HG}$ الذي هو نصغ الأجذار بقي خط $\overline{AG}$ وهو ثلاثة وهو جذر المال الأول. فإن زدته على خط $\overline{GH}$ الذي هو نصف الأجذار بلغ ذلك سبة وهو خط $\overline{ZG}$ ويكون جذر مال أكثر من هذا المال إذا زدت عليه واحدا وعشرين صار ذلك مثل عشرة أجذاره وهذه صورته، وذلك ما أردنا أن نبين".

نلخص التبرير الذي قدمه الخوارزمي عند حله للمعادلة $x^2+21=10x$:

نرسم ضلع $\overline{AG}$ طوله x، ثم انطلاقا من هذا الضلع نكمل المربع $ABDG$، مساحته هي x^2. نمد هذا الضلع إلى غاية النقطة C ونرسم مستطيل عرضه x فيكون طول الضلع $\overline{GC}=10$ (وهذا للحصول على الطرف الثاني للمعادلة).

فتكون بهذا مساحة المستطيل $GDNC$ هي $10x$، ومنه تكون مساحة $ACNB$ هي 21 لأنه لدينا $x^2+21=10x$.

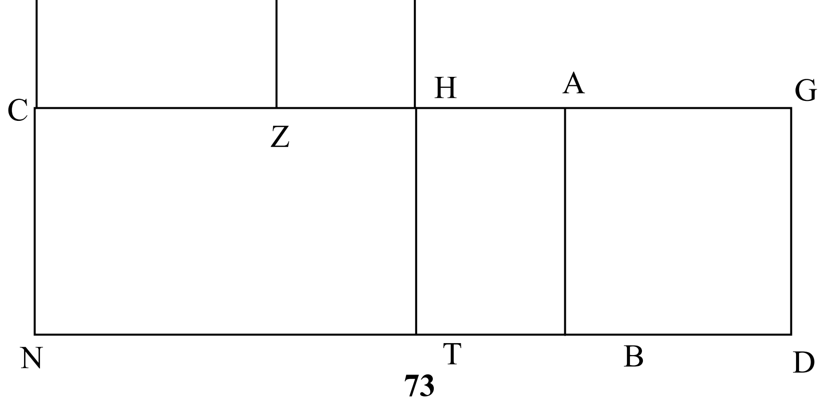
نضع H منتصف $\overline{GC}$ $(HC=GH=5)$، ثم نرسم قطعة مستقيمة $[HT]$ مثل $[GD]$، إذن $HT=x$، بعد ذلك نمد المستقيم (TH) حتى يكون $TK=GH$ (إذن $TK=\frac{10}{2}=5$)، نكمل المربع $TKMN$، مساحته هي $5\times5=25$. نأخذ من الخط KM خط KL مثل خط HK $(KL=5-x)$ فينتج $ML=HT$، وكذلك $LK=KH=5-x$، فيكون السطح $MLZC$ يساوي السطح $ABTH$، ومنه مساحة السطح $KLHZ=25-21=4$.

إذن $KL=AH$ وطول AH هو $\sqrt{4}$ وهو 2.

ونعلم أن $GH=5=x+2$ إذن $x=3$.

ثم بعد ذلك يقول فإن زدنا على GH وهو نصف الأجذار بلغ ذلك سبعة $(5+2=7)$.

والشكل المحصل عليه هو كالآتي :



6. جذور وأعداد تعدل أموال

"فمثل قولك ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالا".

آخر صنف هو من الشكل $bx+c=ax^2$ ،والمثال المقدم هو $3x+4=x^2$.

في حله يقول الخوارزمي : "... وأما الجذور والعدد التي تعدل الأموال فنحو قولك ثلاثة أجذار وأربعة من العدد يعدل مالا فبابه أن تنصف الأجذار فتكون واحدا ونصفا فاضربها في مثلها فتكون اثنين وربعا فزدها على الأربعة فتكون ستة وربعا وهو جذر المال والمال ستة عشر...".

بإجراء جدول مقارنة

$bx+c=ax^2 \Leftrightarrow \frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2$	$3x+4=x^2$
$a\neq0$	ننصف الأجذار $\frac{3}{2}=1,5$
$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	اضربها في مثلها $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=2.25$
$\Delta=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$	زدها على الأربعة $2.25+4=6.25$
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}$	خذ جذرها $\sqrt{6.25}=2.5$
$x=\frac{b}{2a}+\sqrt{\Delta}$	فزده على نصف الأجذار $2.5+1.5=4$

تبريره الهندسي جاء على الشكل الآتي:

"وأما ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالا فإننا نجعل المال سطحا مربعا مجهول الأضلاع متساوي الأضلاع والزوايا وهو سطح $\overline{AD}$ فهذا السطح كله يجمع الثلاثة الأجذار والأربعة التي ذكرنا وكل سطح مربع فإن أحد أضلاعه في جذره، فقطعنا من سطح $\overline{AD}$ سطح $\overline{CD}$ فجعلنا أحد أضلاعه الذي هو $\overline{CG}$ ثلاثة التي هي عدد الأجذار وهو مثل $\overline{ZD}$ فتبين لنا أن سطح $\overline{CB}$ هو الأربعة المزيدة على الأجذار فقطعنا ضلع $\overline{CG}$ الذي هو ثلاثة أجذار نصفين على نقطة Hثم جعلنا منه سطحا مربعا وهو سطح $\overline{CT}$ وهو ما كان من ضرب نصف الأجذار الذي هو واحد ونصف في مثله وهو اثنان وربع ثم زدنا في خط $\overline{HT}$ مثل خط $\overline{AC}$ وهو خط $\overline{TL}$ فصار خط $\overline{HL}$ مثل خط $\overline{AH}$ وخط $\overline{KN}$ مثل خط $\overline{TL}$وحدث سطح مربع متساوي الأضلاع

والزوايا وهو سطح $\overline{HM}$ وقد تبين لنا أن خط $\overline{AH}$ مثل خط $\overline{ML}$ وخط $\overline{AH}$ مثل خط $\overline{HL}$ فبقي خط $\overline{HG}$ مثل خط $\overline{NZ}$ وخط $\overline{MN}$ مثل خط $\overline{TL}$ فيفصل من سطح $\overline{CB}$ مثل سطح $\overline{KL}$ وقد علمنا أن سطح $\overline{AZ}$ هو الأربعة الزائدة على الثلاثة الأجذار فصار سطح $\overline{AN}$ وسطح $\overline{KL}$ مثل سطح $\overline{AZ}$ الذي هو الأربعة العدد ،فتبين لنا أن سطح $\overline{HM}$ هو نصف الأجذار الذي هو واحد ونصف في مثله وهو اثنان وربع وزيادة الأربعة التي هي سطح $\overline{AN}$ وسطح $\overline{KL}$ وقد بقي لنا من ضلع المربعة الأوله التي هي سطح $\overline{AD}$ وهو المال كله نصف الأجذار وهو واحد ونصف وهو خط $\overline{HG}$ فإذا زدناه على خط $\overline{AH}$ الذي هو جذر سطح $\overline{HM}$ اثنان ونصف وزدنا عليه خط $\overline{HG}$ الذي هو نصف الثلاثة الأجذار وهو واحد ونصف فبلغ ذلك كله أربعة وهو خط $\overline{AG}$ وهو جذر المال الذي هو سطح $\overline{AD}$ وهذه صورته ، وذلك ما أردنا أن نبين ."

ملخص التبرير الهندسي الذي قدمه الخوارزمي هو كما يلي:

نرسم مربع $ABDG$ مساحته x^2.

نختار نقطة C على القطعة $[AG]$ حيث $CG = 3$ ،فيكون مساحة السطح $CZDG$ هي $3x$، إذن الجزء الباقي هو 4 لأنه لدينا $x^2 = 3x + 4$.

عين النقطة H متصف القطعة $[CG]$ أي $CH = \frac{3}{2}$، نرسم مربع $HTKC$ مساحته هي $1.5\times1.5 = 2.25$.

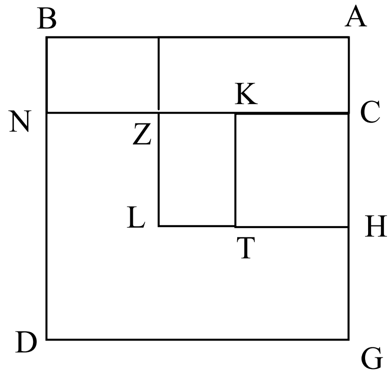
بعد ذلك نمدد الخط HT إلى HL حيث $TL=AC$ فيصبح $AH=HL$ و $KN=TL$، ويتشكل مربع $AHLM$ ،ومنه $AH=ML$ و $HG=NZ$

لأنه $HG = AG - AH = CZ - HL = CZ - CN = NZ$.

فيكون مساحة السطح $AHLM$ مساوية ل 6.25 $(6.25 = 2.25 + 4)$.

إذن $AH = \sqrt{6.25} = 2.5$.

نضيف له $HG = 1.5$، فيكون $AG = x = 2.5 + 1.5 = 4$ وهو جذر المال، والمال 16.



يقول الخوارزمي في كتابه المختصر في حساب الجبر والمقابلة : "ووجدنا كل ما يعمل به من حساب الجبر والمقابلة لابد أن يخرجك إلى أحد الأبواب الستة التي وصفت في كتابي هذا وقد أتيت على تفسيرها فاعرف ذلك". إذن نستطيع رد أي معادلة إلى إحدى هذه المعادلات.

من شروط الجبر والمقابلة عند الخوارزمي رد الأموال إلى مال واحد، إما عن طريق الضرب، أو القسمة، أو الإكمال، فهو بعد حله لأي مسألة يعطي أمثلة لحالات حيث معامل الحد ذو أعلى درجة يختلف عن الواحد.

عندما انتهى من حل المعادلة $x^2+10x=39$ قال : "وكذلك لو ذكر مالين أو ثلاثة أو أقل أو أكثر فاردده إلى مال واحد واردد ما كان معه من الأجذار والعدد إلى مثل ما رددت إليه المال".

وبعد حله للمعادلة $x^2+21=10x$ قال : "وكل ما آتاك من مالين أو أكثر أو أقل فاردده إلى مال واحد كنحو ما بينت لك في الباب الأول".

وأيضا عندما حل المعادلة $x^2=3x+4$ قال : "وكل ما كان أكثر من مال أو أقل فاردده إلى مال واحد".

والرد إلى مال واحد يكون بعدة طرق كما ذكرنا سابقا، حسب حالات معامل الحد ذو أكبر درجة، إما يكون أكبر من واحد أو أقل. نختار أمثلة منها:

* ثلث مال يعدل أربعة أجذار فالمال كله يعدل اثني عشر جذرا، أي $\frac{1}{3}x^2=4x \Leftrightarrow x^2=12x$

* خمسة أموال تعدل ثمانين، فالمال الواحد خمس الثمانين وهو ستة عشر، أي $5x^2=80 \Leftrightarrow x^2=\frac{80}{5}=16$ إذن $x=4$.

* وكذلك إذا قيل ثلث وثمن شيء يعدل ثلاثة دراهم ونصف وربع، فخذ مخرجا يخرج منه ثلث وثمن وربع ونصف تجده أربعة وعشرون ضربته في ثلث وثمن يكون أحد عشر وفي الثلاثة ونصف وربع يكن تسعين والشيء الواحد هو تسعون جزءا من أحد عشر

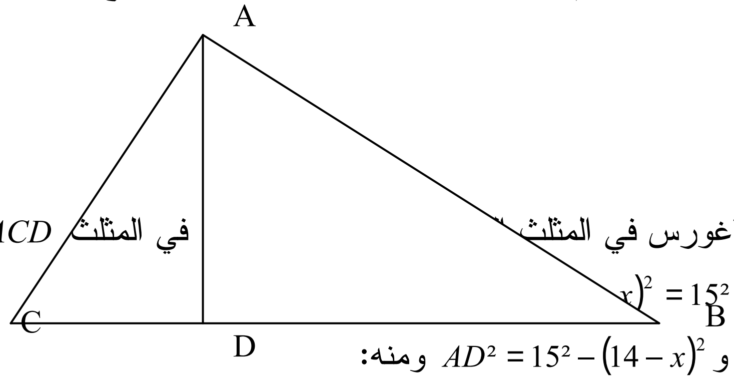
هذه الحالة هي $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$، لحلها يبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لكل من $(3,4,8,2)$ وهو 24، يضرب طرفي المعادلة ب 24 ليحصل على $11x=90 \Leftrightarrow x=\frac{90}{11}$.

يذكر الخوارزمي في كتابه المختصر في حساب الجبر والمقابلة بعض من المسائل الهندسية، يستخدم في حلها معادلة من المعادلات السابقة.

المسألة الأولى هي :

مثلث أطوال أضلاعه هي 13,14,15، نريد معرفة طول العمود.

لحلها يرسم مثلث ABC ، ويرسم العمود AD على القاعدة CB ويضع $CD=x$ (وهو المجهول الذي يريد إيجاده).



بتطبيق نظرية فيثاغورس في المثلث في المثلث ACD

وفي المثلث ADB $x)^2 = 15^2$

إذن $AD^2=13^2-x^2$ و $AD^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ ومنه:

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$$

إذن $169-x^2=225-(196-28x+x^2)$

ثم يبسط المعادلة الأخيرة هذه باستعمال الجبر والمقابلة فيتحصل على المعادلة $28x=40$ (الصنف الثالث: جذور تعدل عدد)

فيكون $x=5$

ومنه $AD^2+5^2=13^2$

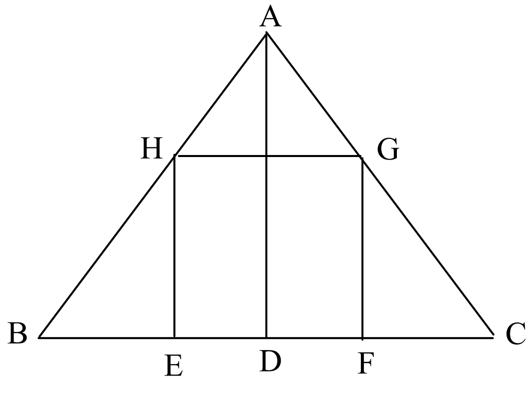
إذن $AD^2=144$ (الصنف الأول: أموال تعدل عدد) ومنه $AD=12$.

طول العمود المجهول هو 12، ومساحة المثلث هي $12\times\frac{14}{2}=84$ وحدة مربعة.

المسألة الثانية:

"فإن قيل أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع عشرة أذرع والقاعدة اثنا عشر ذراعا في جوفها أرض مربعة، كم كل جانب من المربعة ؟ ".

لحلها نضع مثلث متساوي الساقين ABC ، أطوال أضلاعه 12,10,10



مساحته M ($M=\frac{1}{2}BC\times AD$)

لمعرفة طول AD نطبق نظرية فيثاغورس على المثلث ADC

$AD^2+DC^2=AC^2$ ، حيث $DC=6,\ AC=10$

ومنه $AD^2+36=100$ ، إذن $AD^2=64$

طول العمود $AD = 8$

بهذا تكون $M=\frac{1}{2}\times 12\times 8$

إذن $M=48$

نضع طول أحد أضلاع المربع $EFGH$ هي x ، إذن مساحته هي x^2.

ونضع $M1$ مساحة المثلث EBH ، $M2$ مساحة المثلث FCG ،

$M3$ مساحة المثلث GHA ، $M4$ مساحة المربع $EFGH$.

لدينا $M=M1+M2+M3+M4$ ، مع العلم أن $M1=M2$ ، و

$M1=x(6-x)$ ، $M3=\frac{1}{2}x(8-x)$.

بهذا تكون $M1+M2+M3=10x-x^2$

ومنه $M=10x-x^2+x^2$ ، أي $M=10x$.

وجدنا سابقا أن $M=48$

إذن $10x=48$

ومنه $x=4+\frac{4}{5}$.

إذن كل جانب هو $4+\frac{4}{5}$.

أسبقية الخــوارزمي : لم تفت معاصري الخوارزمي ولاحقيه أهمية القفزة النوعية التي يمثلها كتاب الجبر والمقابلة للخوارزمي، لذلك ليس من المدهش في شيء أن يحدث ذلك جدالات ونقاشات حوا اسبقية الخوارزمي وأصالة كتابه وجديته، وهكذا نقرأ في كتاب الفهرست لابن النديم (ت. 995م) أن رياضيين آخرين معاصرين للخوارزمي قد نشرا كتابا خصصها للجبر وعنوان كل منهما كتاب الجبر، هذان الرياضيان هما سند بن علي وعبد الحميد بن ترك، ونعلم أيضا أن حفيد هذا الأخير والمعروف بابن برزة (ت. 910) وقد كان رياضيا أيضا، قد أكد في هذا الميدان أسبقية جده فيه، إلاّ أن علماء آخرين لا يشاطرونه الرأي فيما ذهب إليه، ويؤكدون عكسه، أحد هؤلاء هو أبو كامل المصري (ت. 930م) الذي يقول في كتابه المتعلق بالجبر : "وكنت كثير النظر في كتب _العلماء بالحساب والبحث عن أقاويلهم أو النفيس لما رسموا في

كتبهم، فرأيت كتاب محمد بن موسى الخوارزمي، المعروف بالجبر والمقابلة أصحها أصلا وأصدقها قياسا وكان مما يجب علينا معشر الحسّاب من التقدمة والإقرار له بالمعرفة والفضل إذ كان السابق إلى كتاب الجبر والمقابلة والمبتدي له والمخترع لما فيه من الأصول".
وفي كتاب آخر من كتبه عنوانه كتاب الوصايا بالجبر والمقابلة يضيف أبو كامل التدقيقات التالية : "أقمت الحجة في كتابي الثاني بالتقدمة والسبق في الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى والرد على المخترق والمعروف بابن برزة مما ينسب إلى عبد الحميد الذي ذكر أنه جده وبينت تقصيره وقلة معرفته فيما ينسب إلى جده".

لقد كانت الغلبة في النهاية لرأي أبي كامل، إذ أعترف أهل العلم ابتداء من القرن 10 م للخوارزمي بأسبقيته وكان ذلك في الشرق والغرب على السواء كما يؤكد عبد الرحمن بن خلدون (ت. 1404م) في مقدمته.

أصول الجبر العربي

لا تردد المؤرخون ومؤرخو السير متى م تعلق الأمر بالطب أو الفلسفة أو علم الفلك أو بعض المواد الرياضية الأخرى كالهندسة والحساب في إعطائنا تفاصيل حول المؤلفات الأساسية وأساسا اليونانية منها والهندية، التي غزت بحوث التقليد العلمي العربي الإسلامي الأولى. الأمر يختلف بالنسبة للجبر هو الصمت غير المنقوص. ولم يبق للمؤرخين سوى النصوص الجبرية ومحتوياتها وان يقارنوا محتوى هذه النصوص بالنصوص البابلية أو اليونانية أو الهندية. وهذا العمل الذي بدأ منذ عقود والذي يتواصل اليوم قد سمح بتقديم بعض الاطروحات سنذكرها بإيجاز.

الطرح الأول : يميل إلى تفضيل الأصيل اليوناني لقد تم تقديم هذا الطرح والدفاع عنه في القرن 19م. ولكنه تم التخلي عنه شيئا فشيئا بعد اكتشاف الألواح المسمارية البابلية التي احتوت مناهج جبرية. ويتركز هذا الطرح على بعض افتراضات كتاب الارثمطيقي لصاحبه ديوفنطس (بين 350 و 150 ق م) وكتاب الأصول لأقليدس(315−255 ق م). لكننا نعرف اليوم أنه لم تتم ترجمة كتاب ديوفنطس إلى العربية إلا في نهاية القرن التاسع أو في بداية القرن 10م أي بعد نصف قرن من تأليف الخوارزمي لكتابه. أما عن كتاب الأصول لأقليدس فإن محتواه هندسي ولا يمكن أن نقرأ فيها مسائل جبرية إلا متى ما عرفنا الجبر العربي إضافة إلى هذه الحجج صمت الخوارزمي حول الموارد اليونانية عموما.

الطرح الثاني : يميل إلى تأكيد التأثير الهندي ونحن نعرف أن هناك بعثة من الهند تم إرسالها

منذ نهاية القرن الثامن إلى قصر الخليفة المنصور (754-774) ولقد وضعت كتب السند هند على ذمة علماء بغداد وسرعان ما ترجمت هذه الكتب إلى العربية. تحتوي هذه المؤلفات عادة على فصل المناهج الحسابية والجبرية الضرورية لحل المسائل الفلكية. إلا أنه ليس من كتاب عربي واحد يسند التقنيات الجبرية لعلماء الهند وحتى عندما تخصص هذه الكتابات للحساب الهندي فإنها لا تحتوي على فصل الجبر. هذا ما نلاحظه ونحن نقرأ كتاب الأقليدسي (القرن 10م) "الفصول في الحساب الهندي" أو كتاب كشيار بن لبان (القرن 11م) "أصول حساب الهند".
الطرح الثالث : يفضل التأثير البابلي، وهنا أيضا يكتنف الصمت الرياضيين العرب إلا أن الكتب التي ألفوا تنطق مكانهم، فتكشف كشف اليقين عن شبه بالغ مع بعض تقنيات الجبر الخاصة بالتقليد البابلي.

تقليد الخوارزمي (مدرسة الخوارزمي)

لقد ظهرت شروحات كثيرة لكتاب الخوارزمي في النصف الثاني من القرن التاسع وبداية القرن العاشر، نذكر شروحات ، سنان بن الفتح والصيدناني، وأبي الوفاء. وكانت مؤلفات أخري تحمل عنوان الجبر والمقابلة كمؤلفات الدينواري والمصيصي، لكن لسوء الحظ وباستثناء شرح سنان بن الفتح، لم يعثر لحد الآن على مؤلف واحد من هذه المؤلفات التي أشرنا إليها.
إلى جانب هذه المؤلفات نلاحظ إنتاج كتابات أخرى خاصيتها المشتركة تحقيق تداخل أو تفاعل الجبر العربي والهندسة اليونانية. ومثال على ذلك ما ألفه ثابت بن قرة (ت.901م) تحت عنوان تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية.

مدرسة أبي كامل (تقليد أبي كامل)

من هو أبو كامل :

أبو كامل شجاع بن أسلم المصري (عاش في النصف الأول من القرن الثالث الهجري).
كان من أهم علماء الجبر في التراث العلمي العربي الإسلامي، وتقع أهم أعماله -وهو كتاب الجبر والمقابلة- في ثلاثة أجزاء .
اعتاد المؤرخون المعاصرون الإشارة إلى الجزء الأول للكتاب فقط تحت عنوان "الجبر والمقابلة"، وهذا الجزء الأول يماثل في تركيبه كتاب "الجبر والمقابلة" للخوارزمي (ت. 850م) ويبحث في معادلات من الدرجتين الأولى والثانية. غير أن عمل أبي كامل ذو مستوى أعلى، لأن الأعداد الصماء لا تكون فقط جذورا للمعادلات من الدرجة الثانية بل أيضا في الأعداد المعاملة للمجهولات. فإن تحاشي الإغريق من الأعداد الصماء يغيب عن البصر فيما بعد.

وفي الجزء الثاني من كتابه (ص. 134–156) يبرهن أبو كامل أن طرقه الجبرية يمكن أن تستعمل لإيجاد حلول سهلة لمسائل هندسية كانت صعبة أو حتى غير قابلة للحل لدى أسلافه. وتتضمن المسائل التحديد العددي لضلع المخمس المنتظم والمعشر المنتظم والشكل ذي الزوايا الخمس عشرة المنتظم المرسومة في دائرة ذات قطر يتألف من عشرة وحدات. فالأضلاع مجهولة الطول يستخرج أبو كامل معادلات ويحلها. بعدئذ يمكن تقريب المقادير كما ترجم الجزئين الأول والثاني مع أول بداية الجزء الثالث إلى اللاتينية، وكلا الترجمتين موجود حاليا.
لكتاب أبي كامل نفوذ عميق في التطور الباكر للجبر في أوروبا من خلال ليونادو فيبوناتشي (Leonardo Fibonacci) (1170-1240) الذي اقتبس من أبي كامل أقساما كبيرة في كتابيه (Liber Abaci) و (Practica geometriae).
درس مؤرخون حديثون أجزاء الكتاب الثلاثة وأقروا عموما بأهميتها. غير أنه لم يتيسر تحقيق للنص العربي لحد الآن وأن الترجمات التي ظهرت لا تفي بالغرض دائما.
يضم هذا التقليد (القرنين 10م وَ 11م) مجموعة من الرياضيين الذين ستتعلق إسهاماتهم بالميدانين اللذين تعرض لهما الخوارزمي في مختصره: ميدان موضوعات الجبر وميدان العمليات التي يطبق فيها.
فتظهر المعاملات للمعادلات من الدرجة الأولى والثانية أعداد صحيحة وناطقة موجبة ولأول مرة أعداد صماء تربيعية من الشكل:

1. $a+\sqrt{b}$
2. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$
3. $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$
4. $a-\sqrt{b}$
5. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

لاسيما في كتاب الكامل في الجبر ولمقابلة لأبى كامل. أما الموضوع الثاني الذي تمت دراسته أو على الأقل التطرق إليه كمن طرف بعض الرياضيين الذين ينتمون إلى هذه المدرسة (مدرسة آبي كامل) فهو تعميم مفهوم الأس وتطبيقه في دراسة المعادلات ومنهم سنان بن الفتح الذي ينسب إلى نفسه أنه أول من حرر عرضا كاملا ومتماسكا حول هذه المسألة الا وهي تعميم مفهوم الأس1، إذ يقول : "إن جل معرفة الحساب هو النسبة والتعديل، وقد وضع محمد بن موسى الخوارزمي كتابا سماه الجبر والمقابلة، وقد فسرنا ذلك وسنح لنا بعده تفسيره بابا يتشعب على قياسه يقال له باب الكعب ومال المال والمداد، ولم نر من أهل العلم ممن سبقنا وانتهى إلينا

خبره وضع في ذلك عملا أكثر من التسمية فأحببنا أن نضع في ذلك كتابا نبين فيه مذهب قياسه والله الموفق لما احب والمعين عليه."

مدرسة الكرجي

من هو الكرجي : هو أبوبكر محمد بن الحسن الكرجي عاش في بغداد في عهد فخر الملـــك أي غالب بن خلف (ت 1016م). لا نعرف عن الكرجي أي شيء، إلا أن أغلب الآراء تميل إلى أن الكرجي توفي سنة 1029م، حيث عرف لفترة طويلة باسم الكرخي نسبة الكرخ (هـــي منطقـــة بضواحي بغداد). وبعد دراسة الفروق في النسخ المتوفرة حول كلمتي الكرجي والكرخي، فـــإن الكفة مالت نحو الكرجي ، فأصبح بعدها يطلق عليه اسم الكرجي نسبة إلى كرج (بإيران حاليا)

أعمال الكرجي:

كتب الكرجي كتبا كثيرة أغلبها مفقودة، لكن جميع كتبه التي نعرفها كتبت أثناء إقامتـــه ببغـــداد وأهما:

1. كتاب في حساب الهند.
2. كتاب نوادر الأشكال.
3. كتاب الدور والوصايا.
4. كتاب الفخري (أهداه إلى فخر لملك)
5. البديع.
5. الكافي في الحساب.
7. علل حساب الجبر والمقابلة.
8. كتاب المحيط في الحساب.

وهناك رياضي ينتمي إلى هذه المدرسة ألا هو السموءل المغربي (ت. 1175م) ألف كتابا هاما في سماه "الباهر في الجبر "

من هو السموءل : هو ابن يحي بن عباس المغربي رياضي وطبيب ولد بالمغرب وسكن بغداد مدة، وانتقل إلى فارس ومات بالمراغة بأدربجان. يقول عنه ابن أبي أصيبعة في كتابه "عيـــون الأنباء في طبقات الأطباء" : كان أي السموءل فاضلا في العلوم الرياضية عالما بصناعة الطب وأصله من بلاد المغرب وسكن مدة بغداد ثم انتقل إلى بلاد العجم ولم يزل بها إلى آخر عمـــره، وكان أبوه أيضا يشدو شيئا من الحكمة.

لقد أرّخ السموءل نفسه حياته في ملحق بكتاب مشهور نقل إلى اللاتينية، وهو كتاب "بدل المجهود في إفحام اليهود" إذ يقول فيه عن نفسه : وشغلني أبي بالكتابة بالعلم العبري ثم بعلـــوم

التوراة وتفاسيرها حتى إذا أحكمت علم ذلك عند كمال السنة الثالثة عشرة من مولدي شغلني حينئذ بتعلّم الحساب الهندي وحلّ الزيجات عند الشيخ الأستاذ العالم أبي الحسن الدسكري وقرأت علم الطب على الفيلسوف أبي البركات ... فأما الحساب الهندي والزيج فاني أحكمت علميهما في أقل من سنة وذلك حين كمل لي أربع عشرة سنة وأنا في خلال ذلك لا أقطع القراءة في الطب ومشاهدة علاج الأمراض.

لقد كانت دراسة السموءل كما يمكن أن نشهد في كتابه الباهر منهجيا ونقديا ونعني بهذا اهتمامه بنظرية البرهان وإرساء البراهين السابقة بشكل دقيق وفي ترجمته يكتب السموءل بهذا الشأن : "حللت جميع تلك الكتب الرياضية، وشرحتها ورددت على من أخطأ فيها وأظهرت أغلاط ممضعيها وعزمت ما عجز واعنى تصحيصه وتحقيقه. أدربت على أقليدس في ترتيب أشكال كتابه بحيث امكنني اذا غير نظام أشكاله ان استغنى عن عدة منها لا يبقى إليها حاجة بعد إن كان كتاب أقليدس معجزا لسائر المهندسين إذ لم يحدثوا أنفسهم بتغير نظام أشكاله ولا بالاستغناء عن بعضها."

وللسموءل كتب عديدة نذكر أهمها:

1. الباهر في الجبر
2. الزاهر في الجبر (مذكور في الباهر)
3. رسالة في التحليل والتركيب
4. رسالة الموجز المضوي في الحساب
5. التبصرة في علم الحساب
6. الكافي في حساب الدرهم والدينار
7. المنبر في مساحة الجواهر المختلطة لاستخراج مجهولها.

مضمون هذه المدرسة

تتمثل أعمال هذه المدرسة في:

1. تعميم وتغيير تعريفات وحيدات الحد، حيث أصبحت الأسس تجمع عند التسمية أي أن.
2. دراسة كثيرات الحدود كأشياء مستقلة
3. ظهور لأول مرة جداول تسمح بكتابة كثيرات الحدود باستعمال عواملها فقط.

مثال : 3 مال كعب إلا مال مال و2 جدرو7 من العدد.

يضعها في جدول كما يلي:

مال كعب	مال مال	كعب	مال	جذر	عدد
3	إلا 1	0	0	2	7

وتعتبر هذه الخطوة الأولى لظهور الترميز في الرياضيات.

4. توسيع مفهوم العمليات الحسابية لكثيرات الحدود من طرح وجمع وضرب وقسمة.

5. هناك محاولة لتجذير كثيرات وظهور المثلث العددي الذي يسمى مثلث باسكال .

مدرسة عمر الخيام (ت.1131م)

في تواز مع البحوث التي قام بها رياضيو مدرسة أبي كامل والكرجي، نلاحظ ولادة وتدعم وتوجه جديد يتمثل في حل معادلات من الدرجة أكبر أو تساوي ثلاثة. يمكن أن نعيد ولادة هذا التوجه إلى فشل الماهاني في محاولته اعتماد الجذور لحل المعادلة $x^3 + c = x^2$ حيث cأكبر تماما من الصفر. وهذه المعادلة ناتجة من الترجمة الجبرية للشكل الرابع من المقالة الثانية من كتاب الكرة والاسطوانة لأرخميدس، ويتعلق الأمر فيها بقسمة كرة معلومة إلى جزئين بشكل تتساوى فيه علاقة حجميهما مع عدد معلوم.

وهذا الفشل سيدفع البحث خطى إلى الأمام وستؤدي هذه البحوث إلى حل عدد من معادلات من الدرجة الثالثة والدرجة الرابعة ذات المعاملات الموجبة. وهكذا وبشكل مستقل اثبت أبو جعفر الخازن من القرن العاشر الميلادي وابن الهيثم كل على لا حدة وجود حل موجب لمعادلة الماهاني وذلك بفضل تقاطع مخروطين، وفي نفس الفترة تقريبا وضع الكوهي وحل مسألة هندسية جديدة أدت إلى معادلة من الدرجة الثالثة.

من هو ابن الهيثم ؟

ابن الهيثم

أبو علي الحسن بن الهيثم أحد اشهر علماء الحضارة العربية. إلاّ أنه وفي نفس الوقت أحد أولئك الذين تظل حياتهم وأعمالهم غير معروفة، على الرغم من كل ما خصص لهم على امتداد هذا القرن من مقالات ومؤلفات ولقاءات وندوات تعريف .

يرجع ذلك إلى عدة أسباب نذكر منها:

– نقص الموارد العلمية من وثائق جديدة التي تسمح إذا عثر عليها بمزيد معرفة هذا العالم الفريد من نوعه والذي تعكس أعماله عبقرية الرجل وديناميكية عصره العلمية.

.الاهتمام بأنشطة ابن الهيثم العلمية المتعلقة بالفيزياء ثم بالبصريات على وجه الخصوص التي حظيت منذ قرون باهتمام مؤرخي العلوم وكان ذلك أحيانا على حساب بقية أنشطته. هذه الأنشطة التي حظاها ابن الهيثم بأهمية بالغة ومكانة مرموقة في حياته واهتماماته العلمية.

حياة ابن الهيثم وأنشطته : لقد ولد ابن الهيثم سنة 965م وتوفي في حدود 1040م لذلك فقد عاش خلال النصف الثاني من القرن العاشر والنصف الأول من القرن الحادي عشر. لقد كانت هذه الفترة تتميز بسيطرة الدولة الإسلامية على التجارة الدولية مما ساعدها على تطور وازدهار اقتصادها.

ابن الهيثم في البصرة : بالفعل ولد ابن الهيثم في العراق ابان حكم الخليفة العباسي المطيع (946 – 973). ويدقق في ذلك ابن ابي أصيبعة في كتاب "عيون الأبناء في طبقات الأطباء" "ان أصله من البصرة". إلاّ أننا لا نعلم بعد شيئا عن عائلته وطفولته ومراهقته وعن الوسط الذي ترعرع فيه سوى انه قضى الجزء الأول من حياته في البصرة، ونواحيها حسب تعبير ابن ابي اصيبعة والبصرة كما نعلم كانت في الثلث الأخير من القرن العاشر (وهو الثلث الذي نشأ فيه ابن الهيثم) كون الميناء الدولي الكبير الذي كان يجلب أكبر بواخر المحيط الهندي والبحر الأحمر.

كما كانت هذه المدينة منذ القرن الثامن الميلادي مركزا لداسة اسس اللسانيات والنحو العربين (مع الخليل بن احمد وسيبويه) وكمكان ولادة المعتزلة والمتصوفة (مع الحسن البصري) وكذلك المدينة التي ولد فيها شعراء بشهرة بشار بن برد وأبى نواس وأهل نثر بمكانة عبد الله بن المقفع والجاحظ.

لذلك ليس من الغرابة في شيء أن تحافظ البصرة في القرن العاشر على نوع من الحيوية في العلم والفلسفة أكدها فيما بعد إنتاج موسوعة اخوان الصفا.

لابد أيضا أن نشير في هذا الصدد إلى أن هذه الحيوية الثقافية تفترض بالطبع توفر حد أدنى من بنية تحتية قوامها المدارس ومؤسسات التعليم العالي والمكتبات العامة والمتخصصة.

ولا غرابة إذن في أن تكون لابن الهيثم في هذا الإطار محيط علمي وفي سن مبكر نفس تميل إلى الفضائل والحكمة والنظر فيها ويمكن أن نحصل بشكل دقيق وبالاعتماد على عناوين أعمال ابن الهيثم على فكرة تقريبية حول المواد العلمية التي درسها في مراهقته ثم كذلك عن الكتابات التي سمحت له بأن يتكون في كل هذه المواد.

أما عن تكوينه العالي فليست لدينا أية فكرة عن أساتذته في الفيزياء وعلم الفلك والرياضيات. إلاّ أنه يتوفر لنا من المعلومات ما يكفي لمعرفة محتوى هذا التكوين. ففي ميدان الفيزياء لابدّ أن يكون ابن الهيثم قد استفاد من مجموع الأعمال اليونانية التي ترجمت إلى العربية في القرنين

التاسع والعاشر والتي كانت في متناوله وبالأخص منها أعمال اقليدس وبطليموس وهيرون وارخميدس وإضافة إلى هذا الموروث اليوناني لا بد وان يكون صاحبنا ابن الهيثم قد استفاد كذلك من بعض إسهامات العلماء العرب في القرنين التاسع والعاشر كأعمال الكندي (ت . 870م) (القرن التاسع) حول المرايا المحرقة.

وفي علم الفلك، درس ابن الهيثم ولخص المجسطي لبطليموس وكذلك كتاب الأكبر لمينلاوس وتضاف إلى هذه المؤلفات الاساسية شروح النيريزي حول المجسطي. ومن المحتمل ايضا أن يكون ابن الهيثم قد درس علاوة على علم الفلك اليوناني، بعض جوانب علم الفلك الهندي وامتدادته في التقليد الفلكي العربي. في القرن التاسع وخاصة اعمال الخوارزمي وحبش الحاسب، الاّ أنه لا يصرح بذلك كما لا تدل عناوين مؤلفاته الهندسية المعروفة على انه قد اهتم بهذه المادة.

وفي الرياضيات : تسمح لنا وبحرد قراءة عناوين المؤلفات التي كتبها ابن الهيثم بأن نؤكد أنه قد بدأ باكتساب اسس هندسة اقليدس وامتداداتها المتمثلة أساسا في هندسة الخروطات لابوليبتوس وهندسة القياس لأخميدس. وكذلك درس ابن الهيثم المؤلفات الأساسية لنظرية الأعداد خاصة المقالات : السابعة، الثامنة والتاسعة من كتاب الأصول لاقليدس.الافتراض الأخير الذي يمكن أن نقدمه حول تكوينه والذي تدعمه توجهات العالم يتعلق باختبارات ابن الهيثم العلمية اذ يبدو فعلا أنه قد كان لديه وبالنظر لأهمية الإنتاج الرياضي ميل قوي للهندسة.

إبن الهيثم في القاهرة : تاريخ وصول ابن الهيثم للقاهرة غير معروف، إلاّ ذلك حدث في العشرية الأولى من القرن الحادي عشر ميلادي بل ربما أيضا بعد ذلك ولأسباب عدة :

فحسب المعلومات التي بحوزتنا لم يكن ارتحال ابن الهيثم للقاهرة مرتجلا. وفعلا يبدو أنه قد نجح في أن يصبح معروفا سواء بفضل تعلم متميزا وبنشر اعمال علمية أصيلة وقوية أو بفضل مواقف فلسفية. كما يبدو أن شهرته قد تجاوزت حدود خلافة بغداد مما ان الخليفة الفاطمي الحاكم حاكم مصر وملاحقها منذ 996 هو الذي استدعاه بنفسه ليقيم في القاهرة. ومن جهة أخرى، واذا سلمنا برأي مؤرخي السير العرب. فلقد كانت لاستدعاء ابن الهيثم إلى مصر غاية أخرى أقل تجريدا هي محلولة اعداد برنامج ماني لتنظيم وضبط فيضانات النيل وذلك ببناء سدود تتماشى مع نهر النيل وتستجيب لحاجته. وفي هذا السباق يقول ابن القفطي في كتابه إخبار الحكماء بأخبار العلماء أن ابن الهيثم هو الذي أكد بنفسه أيام كان بالبصرة انه يستطيع انجاز هذا المشروع. وهذا جائز اذا ما اعتبرنا ان ابن الهيثم كان يهت بأدوات الهندسية والمسائل التطبيقية

مثل مقالته : "مقالة في اجارات الحضور والابنية بجميع الاشكال الهندسية". لم تحل السنوات الاولى التي قضاها ابن الهيثم في القاهرة من تعب وكل لتحقيق مشروع السد.

اعمال ابن الهيثم الرياضية : لفترة طويلة ظل اسهام ابن الهيثم الوحيد الذي عرفه مؤرخو العلوم ودرسوه وحله الهندسي للمسألة البصرية الشهيرة في المقالة الخامسة من كتاب المناظر والمسماة مسألة الحسن. وكان لابد من ان ننتظر القرن التاسع عشر لكي يولي مؤرخو العلوم اهتمامهم لمؤلفاته الرياضية الأخرى.

اذا كان نعرف اليوم بشكل افصل إسهام ابن الهيثم في هذا الميدان، فإن كثيرا يبقى حبيس الظل حول محتوى هذا الإسهام وأهميته النوعية اذ رغم التقدم الذي تحقق في البحث مازالت عشرات النصوص ومنها ماهو هام حيزا لم تحلل ولم تقارن مع بقية أعماله بل إن منها أيضا ما لم يعتر عنه بعد. وإذا ما اعتمدنا نتائج تحليل النصوص والبحث المرجعي المتعلق بعمل ابن الهيثم فإننا نصل إلى الموازنة التالية : لقد ألف ابن الهيثم 64 مؤلفا في مجال الرياضيات منها 50 في نظرية الأعداد. لم يصلنا من بين المؤلفات 64 سوى 23 فقط لم يحلل منها إلى البعض. لهذه الأسباب يظل حكمنا على إسهام ابن الهيثم الحقيقي في الرياضيات جزئيا (نفس الشيء بالنسبة للفلك).

ففي الهندسة : تدخل أعمال ابن الهيثم في إطار التقليد اليوناني إلا أنها تجدد هذا التقليد وتمدده.

مثال : مقالة مستقاة من الأشكال الهلالية : تعود إلى حساب مساحة بشكل هلالي.

كتاب في حل شكوك اقليدس وشرح مصادرات اقليدس : يقدم هذا الكتاب تحليلا نقديا لمسلمات وتعريفات ومناهج اقليدس الهندسية والحسابية مع تعويضها أحيانا بمسلماته هو برهانه الجديدة.

دون أن ننسى هندسة القياس كحساب حجم الكرة والمجسم المكافئ.

أما في الهندسة المخروطية فقد نشر ابن الهيثم 7 كتب. خاصة بالمخروطات، نذكر دراسة الخطوط المقاربة لقطع زائد وكذلك خصص الكتب لوصف آلة البركان التام وهي أداة تسمح برسم المنحنيات المخروطية الأربعة : الدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد والقطع الناقص. ونستطيع ان نقول مع الأسف الشديد إن مؤلفا واحدا فقط قد نشر إلى يومنا هذا وهو إتمام الكتاب الثامن في هندسة المخروطات. إضافة إلى ذلك 8 كتب في الحساب لم ندرس إلا واحدة من هذه الكتب وهي مقالة التلاقي.

إضافة إلى إسهاماته الأصلية في حل عدة مسائل رياضية وفيزيائية اهتم ابن الهيثم بالأدوات النظرية التي خوّلت له حل هذه المسائل. وهي الاستقراء والبرهان بالخلف والتصحيحات بالتحليل والتركيب .

من هو عمر الخيام : ولد إبراهيم الخيامي أبو الفتح عمر في أواسط القرن الخامس الهجري الموافق للأواسط القرن الحادي عشر الميلادي بنيشابور، فهو الرياضي الشاعر. رغم شهرة الخيام الفائقة، ورغم الاهتمام بأدبه وعلمه فإننا لا نعرف عن حياته الكثير.

مصنفات الخيام :

ينسب إلى الخيام كثير من المصنفات، من رياضية وفلكية وطبيعية، هذا غير رباعيته المشهورة، التي ترجمت إلى عديد من اللغات. وهو كأهل عصره قد كتب معظم مؤلفاته العلمية والفلسفية بالعربية. ومصنفاته هي:

. كتاب في صنعة ميزان الحكمة.

. رسالة في شرح ما أشكل من مصادرات اقليدس.

. رسالة في قسمة ربع الدائرة.

. مقالة في الجبر والمقابلة.

يقول عمر الخيام في مقدمة رسالته الجبر والمقابلة ما يلي :

"إن أحد المعاني التعليمية المحتاج إليها في جزء الحكمة المعروف بالرياضي هو صناعة الجبر والمقابلة الموضوعة لاستخراج المجهولات العددية والمساحية، وأن فيها أصنافا يحتاج فيها إلى أصناف من المقدمات معتاصة جدا، متعذر حلها على أكثر الناظرين فيها . أما المتقدمون فلم يصل الينا منهم كلام فيهاý، لعلهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب والنظر أو لم يضطر البحث إياهم إلى النظر فيها أو لم ينقل إلى لساننا كلامهم فيها. وأما المتأخرون فقد عنّ للماهاني منهم تحليل المقدمة التي استعملها ارشميدس مسلمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه في الكرة والاسطوانة – بالجبر، فتأدى إلى كعاب وأموال وأعداد متعادلة فلم يتفق له حلها بعد ان أفكر فيها مليا. فجزم القضاء بأنه ممتنع حتى نبغ أبو جعفر الخازن وحلها بالقطوع المخروطية، ثم أفتقر بعده جماعة من المهندسين في عدة أصناف منها، فبعضهم حل البعض، وليس لواحد منهم في تعديد أصنافها وتحصيل أنواع كل صنف منها والبرهان عليها كلام يعتد به إلا على صنفين سأذكرهما. وإني، لم أزل، كنت شديد الحرص على تحقيق جميع أصنافها وتمييز الممكن من الممتنع في أنواع كل صنف ببراهين لمعرفتي بأن الحاجة إليها في مشكلات المسائل ماسة جدا. ولم أتتمكن من التجرد لتحصيل هذا الخير والمواظبة على الفكر فيه لاعتراض ما كان يعوقني عنه من صروف الزمان، فإنا قد منينا بانقراض أهل العلم، إلا عصابة قليلي العدد كثيري

المحن، همهم افتراض غفلات الزمان ليتفرغوا في أثنائها إلى تحقيق وإتقان علم. وأكثر المتشبهين بالحكماء في زماننا هذا يلبسون الحق بالباطل فلا يتجاوزون حد التدليس والترائي بالمعرفة، ولا ينفقون القدر الذي يعرفونه من العلوم إلا في أغراض بدنية خسيسة، وإن شاهدوا إنسانا معنيا بطلب الحق وإيثار الصدق، مجتهد في رفض الباطل والزور وترك المراءاة والخداع، استحمقوه وسخروا منه."

مضمون هذه المدرسة

- كانت حلول هؤلاء العلماء تعتمد على الهندسة.
- تصنيف المعادلات من الدرجة أقل أو تساوي 3.
- إعطاء بعض الحلول الهندسية للمعادلات من الدرجة الثالثة عن طريق القطوع المخروطية.

بعض مظاهر الجبر في التقليد الرياضي العربي للغرب الإسلامي (مدرسة الغرب الإسلامي)

شكل غياب النصوص وضعف الأبحاث المتعلقة بالمخطوطات المعروفة، عائقا أمام معرفة تاريخ الجبر في الغرب الإسلامي، فبالرغم من أعمال فوبك Woepecke في القرن 19 وأبحاث Peres- Sanchez وSuter في بداية القرن العشرين التي كشفت عن بعض الملامح الهامة من التقليد الجبري في القرنين الثاني عشر و13 فإن كثيرا من النقط بقت غامضة.

وهكذا لازلنا نتساءل عن المحيط الثقافي والعلمي الذي ترعرع في إطاره الجبر. في بعض الدن الأندلسية والمغربية وعن نوعية المصادر التي كانت وراء ظهور هذه المادة الرياضية وعن مختلف المراحل التي قد تكون مرت بها، وما هو التوجه الذي تحكم فيها في إطار علاقاتها مع الميادين الأخرى وأخيرا عن انتقالها إلى أوروبا الوسيطة.

بداية الجبر في الغرب الإسلامي

إن أقدم مصدر في التراجم من الأندلس المتوفر لدينا هو كتاب طبقات الأطباء والحكماء لابن جلجل فقد كتب في عام987 م.

حيث كان العلم الغربي في تطور مستمر لهذا كثرت كتب التراجم أمثال الفهرست لابن النديم القرن 10 وتاريخ الأطباء والحكماء لإسحاق بن حنين القرن 9 ولتقتصر على مجال الجبر لنذكر بأنه في الوقت الذي صنف فيه ابن جلجل كتابة، كانت هذه المادة قد سجلت تقدما ملحوظا في

دار الإسلام ومع ذلك فإنه بالرغم من كون كتاب ابن جلجل يحتوي على معلومات ثمينة عن ترجمة وانتقال المؤلفات الطبية فإنه يبقى للأسف شديد العمومية فيما يخص باقي العلوم وخاصة الرياضيات. وفي حديثة عن حكم عبد الرحمن الثالث (912-961).

يقول ابن جلجل : "ودخلت الكتب الطبية من المشرق وجميع العلوم وقامت الهمم" وكذلك يشير ابن سعيد في كتابه "المغرب في حلى المغرب" إلى أن كتبا علمية من بينها السند الهند في الفلك. جاء به من المشرق عباس ابن نصيح. وانه ذا تكوين رياضي حسب ابن سعيد ومنه يحتمل انه أحضر معه كتاب الجبر للخوارزمي أو لابن ترك أو سند بن علي. ويبقى المصدر الرئيسي لكتابة تاريخ العلوم في الأندلس هو كتاب طبقات الأهم لصاعد الأندلسي (ت. 1070). ولكنه لا يتكلم إطلاقا عن الجبر وعندما يذكر الخوارزمي يذكره في ازياجه وكتابه في الحساب. غير انه في سرده لكتب رياضية في المعاملات ومسح الأراضي والفرائض يجعلنا نستنتج حضور مصنفات جبرية أساسية منتجة في المشرق في تدريس الرياضيات بالأندلس وذلك منذ نهاية القرن التاسع. وشهادات ابن خلدون.

ويمكننا أن نشير من هذه المؤلفات إلى كتاب ثمار العدد للزهراوي والكتاب الكامل لابن سمح وهما كتابان مفقودان غير أننا وجدنا لهما بعض الآثر في كتاب الكامل في صناعة العدد للحصار في شرح ابن زكريا الغرناطي.

فالمصدر الأول الذي كان مجهولا إلى وقت قريب هو عبارة عن رسالة في تصنيف العلوم الرياضية لأبي الحسن ابن رشيق، رياضي ألف في عدة مجالات وعاش في سبتة في القرن 13م. وهو واسع الإطلاع على الإنتاج الرياضي للغرب الإسلامي بما فيها الجبر.

أما المصدر الثاني فهو مشهور لكن بعض أقسامه لم تحظ بعد بدراسات وافية وبالتالي لم تستغل إلا قليلا. ويتعلق الأمر بمقدمة ابن خلدون وخاصة القسم المتعلق بتصنيف العلوم العربية ووصفها ويعنون الفقرة الخاصة العلوم العددية بـ "علم الجبر."

مضمون الكتب الجبرية للغرب الإسلامي

بعد أن أشار ابن خلدون إلى الخوارزمي ومختصره في الجبر يضيف خلال حديثه عن كتاب أبى كامل بأن »كتاب في مسائل الست من أحسن الكتب الموضوعة فيه، وشرحه كثير من أهل الأندلس فأجادوا ومن أحسن شروحاته كتاب القرشى« إن الرياضي الذي يشير إليه ابن خلدون هنا هو أبو القاسم القرسي الذي تقدمه مغربية أخرى كأستاذ أندلسي كبير عاش في بجاية، ربما في القرن الثالث عشر، ودرّس بها الجبر والفرائض وكتابه للأسف مفقود.

ان شرح القرشي لكتاب أبي كامل الذي نعرف ثراءه، يكفي لوحده للتدليل على المستوى العالي الذي وصل إليه تدريس الجبر في الأندلس وفي المغرب في القرن الثاني عشر. والذي استمر فيما بعد هذا القرن لبعض الوقت في المراكز العلمية الأكثر حيوية كمراكش وبجاية وتونس.

الأرجوزة في الجبر لابن الياسمين

ظلت هذه الأرجوزة الرياضية التي كتبها ابن الياسمين في أواخر القرن الثاني عشر الشهادة العلمية الوحيدة وذلك لفترة طويلة من الزمن عن الإنتاج الجبري في الأندلس كإنتاج مستقل عن الحساب والمعاملات. وهذه الأرجوزة ليست بحق هي المستوى الحقيقي للجبر في الغرب الإسلامي وحتى في الشرق بل هي مذكرة للطلبة والأساتذة وهذا ما يفسر كثرة الإشارات الجزئية لها عند الرياضيين الذين كتبوا حول الموضوع بابن زكرياء في الأندلس ابن غازي المكناسي في المغرب ابن المجدي في مصر بينما آخرون يشرحونها كاملة بإفاضة كابن قنفذ والقلصادي في المغرب، وسبط المارديني وابن الهائم والعراقي وآخرين في الشرق. وله كتاب آخر : "تلقيح الأفكار في العمل لرسوم الغبار" يشمل على الحساب والجبر وظهور بداية الترميز الرياضي.

كتاب اختصار الجبر والمقابلة لابن بدر

باستثناء الاسم الكامل للمؤلف الذي هو أبو عبد الله محمد بن عمر بن محمد بن بدر فإننا لا نعرف سيئا آخر عنه سوى كونه صنف كتابه هذا قبل سنة 1343م. تاريخ نسخ المخطوطة التي وصلت إلينا من كتابه.

كتاب الأصول والمقدمات في الجبر والمقابلة لابن البناء

يبدو حسب الشهادات المتوفرة لدينا أن هذا الكتاب كتبه في مراكش في البداية الأولى لمرحلة الإنتاج العلمي لابن البناء. وله تلخيص أعمال الحساب ورفع الحجاب عن وجهوه أعمال الحساب .

الشروح الجبرية بعد القرن الثالث عشر

حسب معرفتنا الحالية، فإن الشرحين الوحيدين اللذين وصلا إلينا يخصان الأرجوزة الياسمنية رسالة ابن قنفذ. مبادئ السالكين في شرح زجر ابن الياسمين رسالة القلصادي تحفة الناشئين عن أرجوزة ابن الياسمين.

الجبر في الكتب الحسابية للقرنين الرابع عشر والخامس عشر باستثناء كتاب القطراوني "رشفة الرضاب في ثغور أعمال الحساب فكل كتب الحساب المغربية التي وصلت إلينا هي عبارة عن شروح تلخيص أعمال الحساب لابن البناء.

نذكر : حط النقاب عن وجوه أعمال الحساب لابن قنفذ القسنطيني (ت. 1407م).
حط النقاب بعد رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب لابن زكرياء الغرناطي (ت. 1408م).
التمحيص في شرح التلخيص لابن هيدور التادلي (ت. 1413م).

مضمون هذه المدرسة

- استقلال الجبر عن الهندسة نهائيا.
- ظهور الترميز في الرياضيات حيث تظهر للأول مرة الرمز ، فيرمز إلى الشئ بـــ شـــ أو .. وللمال بـــ مـــ وللكعب ب كـــ .... للمساواة لـــ وللجذر جـــ.

مثال : 10 أموال و5 من العدد يعدل 3 جذورا.

ويرمز لها كما يلي : 10ـمـ 5 لـــ **3ـشـ**

- ظهور الصفر كطرف ثاني في معادلة من الدرجة الأولى وذلك باستعمال الرموز وهي من الشكل .

8ـشـ **لا 7 لـــ 0** **(8x-7=0)**

في قسمة المربعات وتأليفها (تقطيع المربعات وتلصيقها)

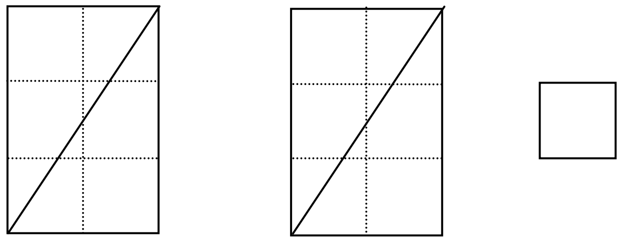
يذكر أبو الوفاء في هذا المجال تقطيع الأشكال التي يكثر استعمال الصناع لها والمسألة عنها، وهو قسمة المربعات وتأليفها وما يتركب منها ونجعل لها قوانين يرجع إليها، فإن جميع ما يستعمله الصناع في هذا الباب بلا أصول يعمل عليها، ولأجل ذلك يقع لهم الغلط الكثيـــر فيمـــا يقسمونه ويرتبونه، وإذا دبر الأمر على واجبه يسهل الأمر فيما يراد من هذا الباب.

أمثـلة

1 . فان كانت المربعات التي معنا عدها مؤلف من مربعين مختلفين، ركبنا مستطيلين طول كل منهما مثل ضلع أكبر المربعين وعرضه مثل أصغر المربعين، وقطعنا كل واحد منهما بنصفين على القطر فيصير لنا أربع مثلثات متساويات بضلعين مساويين لضلعي المـــربعين، وقطراهـــا مساو لضلع المربع المطلوب. ويبقى لنا من المربعات عدد مربع، فنركبها مربعا فـــي الوســـط، وتركب أضلاع المثلثات عليه فيحصل لنا مربع واحد معمول من المربعات.

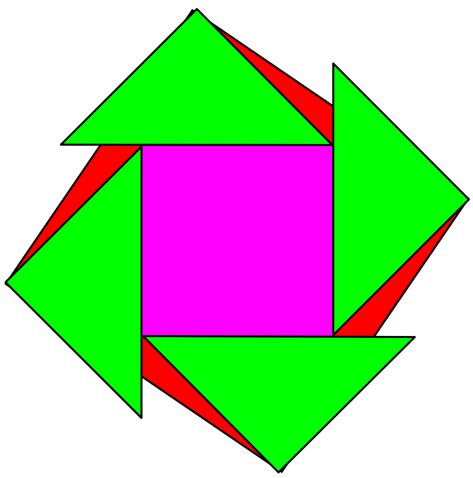
مثال ذلك : إذا أردنا أن نعمل من ثلاثة عشر مربعا متساويات الأضلاع والأقطار مربعة واحدة وهي مؤلفة من مربعين أحدهما تسعة وضلعه ثلاثة والأخر أربعة وضلعه اثنان.

ركبنا مربعين مستطيلين أحد أضلاعهما ثلاثة والأخر اثنان فيكون مستطيلين كل واحد من ستة مربعات، ثم قطعناهما على قطريهما فيصير لنا أربع مثلثات طول كل مثلث منهم ثلاثة، وعرضه اثنان، وقطره جذر ثلاثة عشر. على هذه الصورة، ونفصل ويبقى من المربعات واحد، فإذا جعلناه في الوسط وأضفنا إليه المربعات فيكون الجانب الأطول منها إلى جانب المربع، صار منها مربعا كل جانب منها قطر المثلث وهو جذر ثلاثة عشر وهذه صورتها :



2 . إذا أردنا أن نعمل من ثلاث مربعات متساويات وهي مربعات أ ب جـ د ، هـ و ر ح ، ط ن ك ل مربعا.

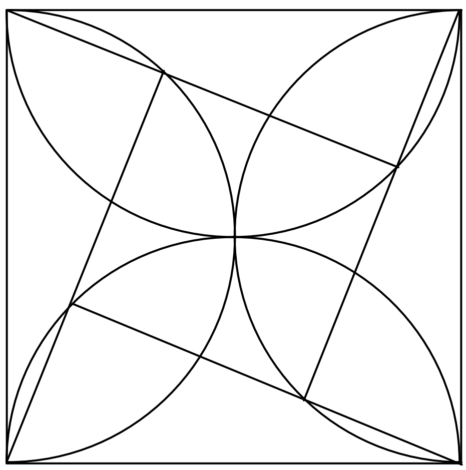
قسمنا مربعين من المربعات بنصفين نصفين على قطر خط أ جـ ، هـ ر ويلقاهما إلى أضلاع المربع. ثم وصلنا بين الزوايا القائمة من المثلثات بخطوط ب ر، ر و ، و د ، د ب وحدث في كل جانب من أضلاع المثلث مثلث صغير مساو للمثلث الذي انفصل من المثلث الكبير. فصار مثلث ب جـ م مساو لمثلث م ر ح ، لأن زاوية ح نصف قائمة، والزاويتان المتقابلتان من المثلثين عند م متساويتان والضلع ب جـ مساو لضلع ط ر فصار باقي الأضلاع للمثلث مساويا لباقي الأضلاع، والمثلث مساو للمثلث. فإذا أخذ مثلث ب جـ م ووضع في موضع مثلث م ر ح صار خط ب ر ضلع المربع المعلوم من ثلاث مربعات. وهذه صورته :



3 . في قسمة مربع واحد بمربعات غير مؤلف عددها من مربع، ينبغي أن نبين في هذا الموضع قسمة مربع واحد بمربعين : كبير وصغير، ويجب أن يكون أحد المربعين مقدار ضلعه معلوم، فإنه متى لم يكن معلوما صاغ أن يقسم دفعات كثيرة بمربعين، وإنما يسأل عن هذه المسألة فيقال كيف نفصل من مربع كبير مربعا صغيرا مقداره كذا وكذا ونعمل من الباقي مربعا.

فإذا كان الأمر على ما ذكرنا فيجب أن نعكس الأمر فيما قدمناه من الأعمال فإنه متى كان لنا مربع كبير مثل مربع أ ب جـ د ومربع صغير مثل مربع هـ . وقيل لنا كيف نفصل من المربع الكبير مثل أصغريها ونعمل من الباقي مربعا؟

عملنا على ملا ذكرناه في هذا المثال. وهو أنا أردنا أن نفصل من مربع أ ب جـ د مثل مربع هـ ونعمل من الباقي مربعا . عملنا على كل ضلع من أضلاع مربع أ ب جـ د نصف دائرة وجعلنا كل نقطة من زوايا أ ب جـ د مركزا وببعد ضلع مربع علامات على أنصاف الدوائر مثل علامات ح ط ي ر ووصلنا خطوط أ ر ح ، ب ي ر ، د ح ط ، ح ط ي . فيحصل لنا مربع في وسط المربع، وخطوط د ح ، ح ط ، ب ي ، أ ر كل واحد منها مساو لضلع المربع الأصغر. فيحصل لنا أربع مثلثات ومربع صغير. عملنا من كل مثلثين منها مستطيلا. وضممنا المربع في الوسط إلى إحداهما وقطعنا من الأخر ما يفصل من طوله على طول المربع فيكون ذلك أصغر المربعين. وما قطع منه يضاف الى المستطيل الأخر والمربع فيحصل المربع الكبير وهذه صورتها :



تجبير المبرهنات الهندسية

المبرهنات المدروسة هنا، مأخوذة عن نص محقق لنسختين عربيتين، من كتاب الأصول. النسخة الأولى هي النقل المأموني – من المقالة الأولى إلى السادسة – للحجاج بن يوسف بن مطر مع شرح النيريزي، عن المخطوطة رقم 399/1 في مكتبة لايدن (Leiden) بهولندا، والنسخة الثانية هي تجريد كتاب الأصول لاقليدس للنسوي (ت. 1039/431)، عن المخطوطة رقم 4871 في مكتبة الظاهرية بسوريا، والمخطوطة رقم 3142 في حيدرأباد بالهند[31].

وفي هذا الجزء، نحاول إثبات بعض المبرهنات الموجودة في كتاب الأصول، باستعمال الجبر والتي أثبتها اقليدس بطريقة هندسية بواسطة الإنشاءات .

المقالة الثانية[32]

تعريف

كل سطح متوازي الأضلاع، قائم الزوايا فإنه يحيط به الخطان المحيطان بإحدى زواياه القائمة.

المبرهنة الأولى

كل خطين مستقيمين، يقسم أحدهما بأقسام، كم كانت، فإن السطح الذي يحيط به الخطان مساو لجماعة السطوح التي يحيط بها الخط الذي لم يقسم، وكل واحد من أقسام الخط الآخر المقسوم.

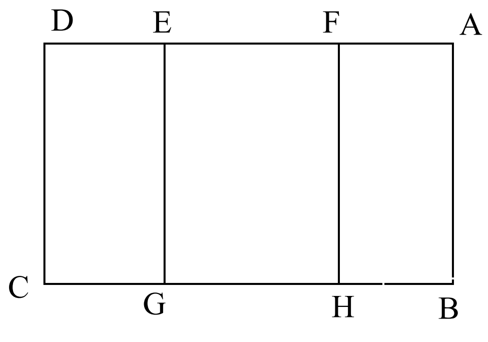
مثاله

لتكن القطعة $[AB]$ و E و F نقطتين من القطعة $[AD]$ فإن

$$AB.CD = AB.CE + AB.EF + AB.FD .$$

البرهان

نقيم سطح المستطيل $ABCD$ كما في الشكل 1.



الشكل 1

[31] أحمد سليم سعيدان ،هندسة اقليدس في أيد عربية، المرجع السابق، ص. 24.

[32] المرجع السابق، ص. 203.

نضع $AD = a \ , \ AB = b \ , \ AF = d \ , \ FE = q \ , \ ED = p$ و $AD = AF + FE + ED$ ، فيكون:

$$\begin{aligned} AB.AD &= b.a \\ &= b(d+q+p) \\ &= b.d + b.q + b.p \\ &= AB.AF + AB.FE + AB.ED \end{aligned}$$

وبصفة عامة نحصل بالتعبير الحالي على: $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow b.a = \sum_{i=1}^{n} b.a_i$

المبرهنة الثانية

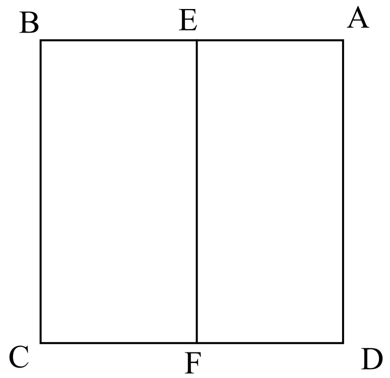
كل خط مستقيم يقسم بأقسام كم كانت، فإن مربع الخط كله، مساو لجماعة السطوح التي يحيط بها الخط كله، مع كل واحد من أقسامه.

مثاله : إذا كانت E نقطة من القطعة $[AB]$ فإن

$AB^2 = AB.AE + AB.BE$.

البرهان

نقيم سطح المستطيل $ABCD$ ، كما في الشكل 2.



الشكل 2

نضع $AB = b \ , \ AE = a \ , \ BE = c$. فيكون:

$$\begin{aligned} AB^2 &= b^2 \\ &= (a+c)(a+c) \\ &= (a+c).a + (a+c).c \\ &= AB.AE + AB.BE \end{aligned}$$

وبصفة عامة نحصل بالتعبير الحالي على:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[a_i (\sum_{i=1}^{n} a_i) \right]$$

المبرهنة الثالثة

كل خط يقسم بقسمين، أي قسمين كانا، فإن السطح الذي يحيط به الخط كله، وأحد القسمين مساو للسطح الذي يحيط به قسما الخط مع مربع ذلك القسم.

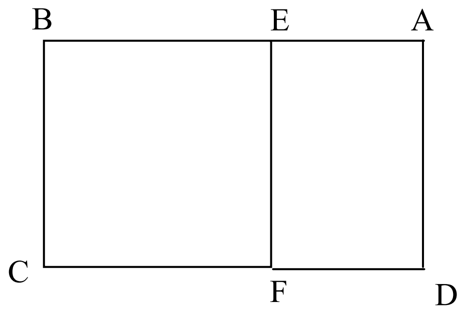
مثاله

إذا كانت E نقطة من القطعة $[AB]$ فإن

$$AB.BC = AE.AB + BC^2 .$$

البرهان

نقيم على القطعة $[EB]$ مربع، وعلى المستطيل $ABCD$ كما في الشكل 3.



الشكل 3

نضع $AE = a\ ,\ EB = b$ ، فيكون:

$$\begin{aligned} AB.BC &= (a+b).b \\ &= a.b + b^2 \\ &= AE.EB + BC^2 \end{aligned}$$

المبرهنة الرابعة

كل خط قسم بقسمين، قسمة كيف وقعت، فإن مربع الخط كله، مساو لمربعي قسميه، مع ضعف السطح الذي يحيط به قسما الخط.

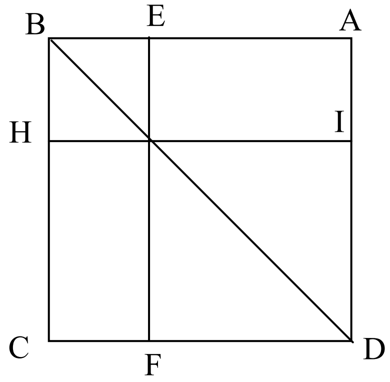
مثاله

إذا كانت E نقطة من القطعة $[AB]$ فإن

$$AB^2 = AE^2 + 2AE.EB + EB^2 .$$

البرهان

نقيم سطح المربع $ABCD$ ، كما في الشكل 4.



الشكل 4

نضع $EB = b$, $AE = a$.

التفسير الهندسي:

لدينا: $EBGH$ سطح مربع لأن:

$AB = AD$ فالمثلث ABD متساوي الساقين ومنه $A\hat{B}D = A\hat{D}B$.

لدينا: $(EF)//(AD)$ و (BD) قاطع لهما، فحسب المبرهنة التاسعة والعشرون من المقالة الأولى[33]، فإن: $A\hat{D}B = E\hat{H}B$.

ومنه $A\hat{B}D = E\hat{H}B$ إذن المثلث BEH متساوي الساقين وعليه $EB = EH$.

وبما أن $EBGH$ متوازي الأضلاع و $EB = EH$ فإن $EBGH$ مربع طول ضلعه b .

وبنفس الطريقة فإن: $IHFD$ مربع طول ضلعه a .

و لدينا: $AEHI$, $HGCF$ مستطيلين متساويين حسب المبرهنة الثالثة والأربعون من المقالة الأولى[34]. فمساحة كل منهما ab .

لدينا:

[33] المقالة الأولى، الشكل التاسع والعشرون : إذا أخرج خط مستقيم على خطين متوازيين، فإن الزاويتان المتبادلتان متساويتان، والزاويتان الخارجة والداخلة التي تقابلها متساويتان، والزاويتان الداخلتان، في أي الجهتين كانتا، فإن مجموعهما يعدل مجموع زاويتين قائمتين، أحمد سعيدان، هندسة اقليدس في أيد عربية، المرجع السابق، ص.142.

[34] المقالة الأولى، الشكل الثالث والأربعون : كل سطح متوازي الأضلاع على قطره سطحان متوازيا الأضلاع،فإن السطحين المتممين الذين على جنبتي القطر متساويان، أحمد سليم سعيدان، هندسة اقليدس في أيد عربية، المرجع السابق، ص. 160.

$$\begin{aligned} AB^2 &= (a+b)^2 \\ &= (a+b).(a+b) \\ &= a^2 + 2a.b + b^2 \\ &= AE^2 + 2AE.EB + EB^2 \end{aligned}$$

وبصفة عامة نحصل بالتعبير الحالي على :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$$

المبرهنة الخامسة

كل خط مستقيم يقسم بقسمين متساويين، ويقسم أيضا بقسمين مختلفين، فإن السطح الذي يحيط به القسمان المختلفان، مع مربع الخط الذي بين نقطتي القسمة، مساو لمربع نصف الخط .

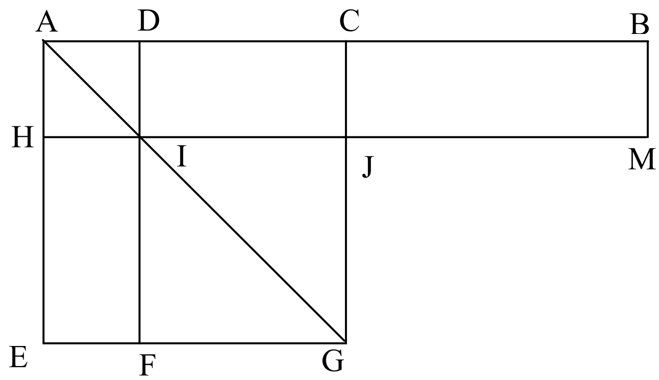
مثاله

إذا كانت C منتصف القطعة $[AB]$ و D نقطة من القطعة $[AB]$ فإن

$AD.BD + CD^2 = CB^2$.

البرهان

نقيم على $[CB]$ مربع، وعلى $[AC]$ مستطيل، كما في الشكل 5.



الشكل 5

نضع $AD = a$, $CD = b$ ، فيكون:

$$\begin{aligned} AD.BD + CD^2 &= a.(a+2b) + b^2 \\ &= a^2 + 2a.b + b^2 \\ &= (a+b)^2 \\ &= CB^2 \\ &= \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

وبصفة عامة نحصل بالتعبير الحالي على :

$$(a+2b).a + b^2 = (a+b)^2$$

المبرهنة السادسة

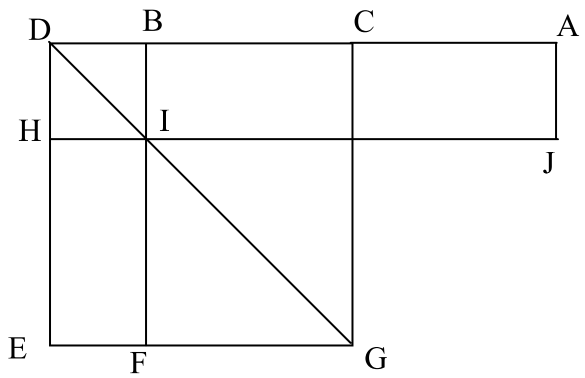
إذا قسم خط مستقيم بنصفين، وزيد في طوله خط أخر مستقيم، فإن السطح الذي يحيط به الخط كله مع الزيادة، والزيادة مع مربع نصف الخط الأول، مساو لمربع نصف الخط مع الزيادة.

مثاله

إذا كانت C منتصف القطعة $[AB]$ و D نقطة من امتداد القطعة $[AB]$ فإن $AC^2 + AD.BD = CD^2$.

البرهان

نقيم على القطعة $[CD]$ مربع، وعلى القطعة $[AC]$ مستطيل، كما في الشكل



الشكل 6

نضع $AB = b$ ، $CD = a$ ، فيكون:

$$\begin{aligned} AC^2 + AD.BD &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(a+\frac{b}{2}\right).\left(a-\frac{b}{2}\right) \\ &= \frac{b^2}{4} + a^2 - \frac{b^2}{4} \\ &= a^2 \\ &= CD^2 \end{aligned}$$

وبصفة عامة نحصل بالتعبير الحالي على :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

المبرهنة السابعة

كل خط مستقيم يقسم بقسمين، أي قسمة كانت، فإن مربع الخط كله مع مربع أحد القسمين، إذا جمعا مساو لضعف السطح الذي يحيط به الخط كله وذلك القسم، مع مربع القسم الأخر إذا جمعا.

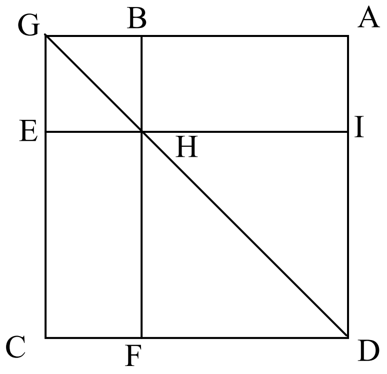
مثاله

إذا كانت نقطة E من القطعة $[AB]$ فإن

$$AB^2+EB^2=AE^2+2AB.EB .$$

البرهان

نقيم سطح مربع $ABCD$ ، كما في الشكل 7.



الشكل 7

نضع $EB=a$, $AB=b$ ، فيكون بالتعبير الحالي:

$$\begin{aligned}
AB^2+EB^2 &= a^2+b^2 \\
&= (AE+EB)^2+EB^2 \\
&= [(a-b)+b]^2+b^2 \\
&= (a-b)^2+2(a-b).b+2b^2 \\
&= (a-b)^2+2a.b \\
&= AE^2+2AB.EB
\end{aligned}$$

فحسب التعبير الحالي :

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

المبرهنة الثامنة

كل خط مستقيم مفروض يقسم بقسمين، أي قسمة كانت، ويزاد في طوله مثل أحد القسمين فإن، مربع الخط المفروض مع الخط المزيد، مساو لأربعة أضعاف السطح الذي يحيط به الخط المفروض والخط المزيد مع مربع القسم الأخر.

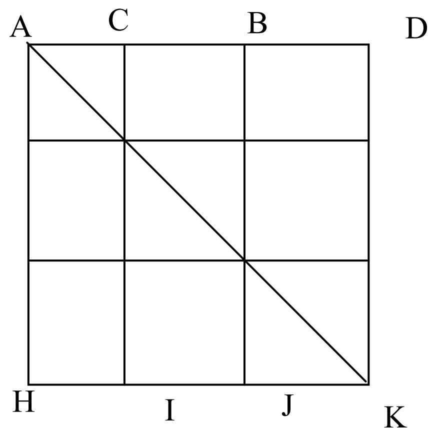
مثاله

إذا كانت C نقطة من القطعة المفروضة $[AB]$ و B منتصف القطعة $[CD]$ فإن

$AD^2 = 4AB.BD + AC^2$.

البرهان

نقيم على $[AD]$ مربع، كما في الشكل 8.



لشكل 8

نضع $AB = a$, $CB = b$ ، فيكون بالتعبير الحالي:

$$
\begin{aligned}
AD^2 &= (a+b)^2 \\
&= (AC+CD)^2 \\
&= \left[(a-b)+2b\right]^2 \\
&= (a-b)^2 + 4b^2 + 4(a-b).b \\
&= (a-b)^2 + 4ab \\
&= 4AB.BD + AC^2
\end{aligned}
$$

وبالتعبير الحالي :

$$(a-b)^2-(a-b)^2=4ab$$

المبرهنة التاسعة

كل خط مستقيم يقسم بقسمين متساويين وبقسمين مختلفين أي قسمة كانت، فإن مجموع المربعين الكائنين من نصف الخط الذي هو فصل نصف الخط على قسمة الأصغر .

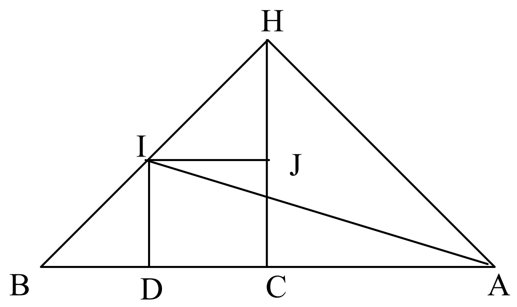
مثاله

إذا كانت C منتصف القطعة $[AB]$ و D نقطة من القطعة $[AB]$ فإن

$AD^2+BD^2=2BC^2+2CD^2$.

البرهان

نقيم العمود $[CH]$ يقايس القطعة $[AC]$ ونرسم المثلث AHB ، كما في الشكل 9.



الشكل 9

نضع $AC=b\ ,\ CD=a$ ، فيكون:

$$\begin{aligned}AD^2+BD^2&=(a+b)^2+(b-a)^2\\&=a^2+2a.b+b^2+b^2-2a.b+a^2\\&=2a^2+2b^2\\&=2BC^2+2CD^2\end{aligned}$$

وبالتعبير الحالي :

$$(a+b)^2+(b-a)^2=2a^2+2b^2$$

المبرهنة العاشرة

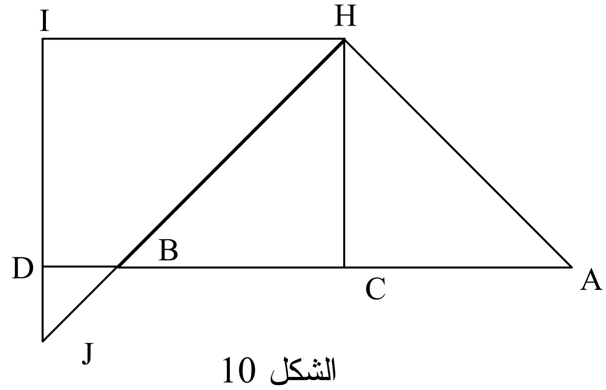
كل خط مستقيم يقسم بنصفين ويزاد في طوله خط أخر، فإن مربع الخط كله مع الزيادة، ومربع الزيادة، إذا جمعا مساو لضعف المربعين الكائنين من نصف الخط ومن نصف الخط مع الزيادة إذا جمعا.

مثاله

إذا كانت C منتصف القطعة $[AB]$ و D نقطة من امتداد القطعة $[AB]$ فإن $AD^2 + BD^2 = 2CD^2 + 2AC^2$.

البرهان

نقيم على C عمود $[CH]$ يقايس القطعة $[AC]$ وننشىء الشكل 10.



الشكل 10

نضع $AC = b$, $BD = a$ ، فتكون بالتعبير الحالي:

$$\begin{aligned} AD^2 + BD^2 &= (a+2b)^2 + a^2 \\ &= 2a^2 + 4a.b + 4b^2 \\ &= 2(a+b)^2 + 2b^2 \\ &= 2CD^2 + 2AC^2 \end{aligned}$$

المبرهنة الحادية عشر

نريد أن نبين، كيف نقسم خطا معلوما مستقيما مفروضا، قسمة يكون السطح الذي يحيط به الخط كله وأحد القسمين، مساويا للمربع الكائن من القسم الأخر.

مثاله

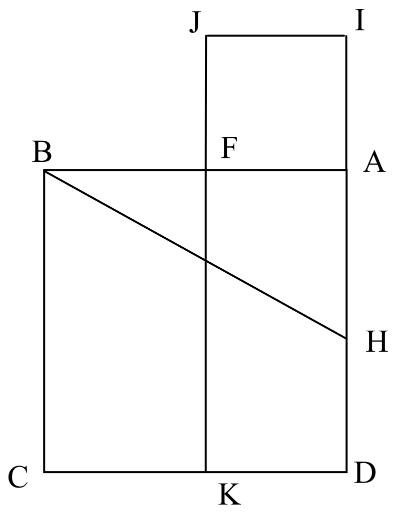
لتكن القطعة $[AB]$، نريد أن نبين كيف نقسم القطعة $[AB]$ في نقطة F حتى يكون

$$AB.BF = AF^2$$

البرهان

نريد أن نعين موقع نقطة F على $[AB]$ حتى تكون مساحتا $AFJI$, $BCKF$ متساويتين،

فنقيم سطح المربع $ABCD$ و H منتصف $[AD]$ ونمد $[AH]$ إلى نقطة I بحيث $[IH]$ تقايس $[BH]$ وننشىء المربع $AFJI$ ، كما في الشكل 11.



الشكل 11

نضع $AB = b\ ,\ AF = x\ ,\ BF = b - x$ ، فيكون:

$$AB.BF = AF^2 \Leftrightarrow b(b-x) = x^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 - bx = x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + bx - b^2 = 0$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية حلولها هي $x_1\ ,\ x_2$.

إذن:

$$\Delta = 5b^2 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{(-1+\sqrt{5}).b}{2}\ \ ,\ \ x_2 = \frac{-(1+\sqrt{5}).b}{2}$$

الحل الثاني مرفوض لأنه سالب إذن الطول AF مساو للقيمة $\frac{(-1+\sqrt{5}).b}{2}$.[35]

المبرهنة الثانية عشر

[35] من أجل $b = 1$ ، فالحل يسمى العدد الذهبي β وهو الحل الوحيد الموجب للمعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ ومن خواصه $\beta^2 = 1 + \beta$. $\beta = 1 + \frac{1}{\beta}$.

كل مثلث منفرج الزاوية، فإن مربع الضلع الذي يوتر الزاوية المنفرجة أعظم من مربعي الضلعين المحيطين بالزاوية المنفرجة بمثل ضعف السطح الذي يحيط به أحد الضلعين المحيطين بالزاوية المنفرجة، والخط الذي يخرج على استقامة هذا الضلع ما بين الزاوية المنفرجة ومسقط العمود.

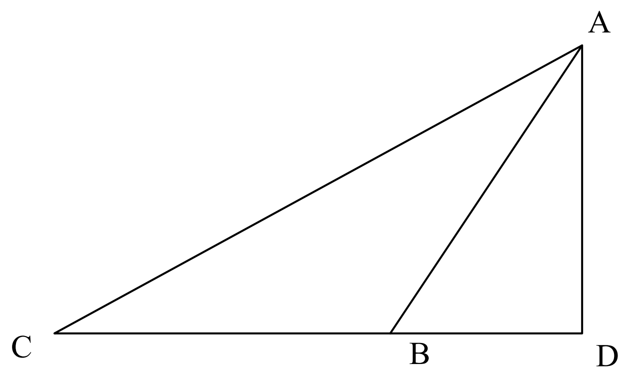
مثاله

ليكن المثلث ABC بحيث $[AB,BC]$ زاوية منفرجة، D هي المسقط العمودي للنقطة A على (CB) فإن

$$AC^2-(AB^2+BC^2)=2CB.BD \text{ .}$$

البرهان[36]

ننشىء المثلث القائم ADC، كما في الشكل 12.



الشكل 12

نضع $AB=b\ ,\ BC=c\ ,\ BD=d$. لدينا:

المثلث ABD قائم في D فإن $AB^2=AD^2+BD^2$ ومنه $AD^2=b^2-d^2$.

والمثلث ACD قائم في D فإن $AC^2=CD^2+AD^2$ ومنه $AC^2=(c+d)^2+(b^2-d^2)$.

فيكون:

[36] هذه المبرهنة تمثل إحدى العلاقات المترية في مثلث وهي:
$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos A\hat{B}C$$

$$\begin{aligned} AC^2-(AB^2+BC^2) &= (c+d)^2+(b^2-d^2)-(b^2+c^2) \\ &= c^2+2c.d+d^2+b^2-d^2-b^2-c^2 \\ &= 2c.d \\ &= 2CB.BD \end{aligned}$$

المبرهنة الثالثة عشر[37]

المبرهنة الرابعة عشر

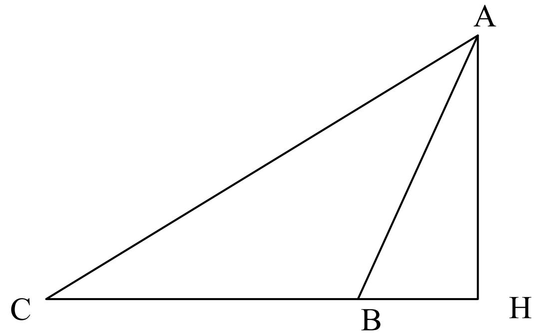
نريد أن نبين كيف نعمل سطحا مربعا مساويا لمثلث معلوم.

مثاله

ليكن المثلث ABC ، نريد أن نبين كيف ننشيء مربعا مساحته تساوي مساحة ABC .

البرهان

ننشيء المثلث ABC كما في الشكل 13.



الشكل 13

نضع $CB=b$, $AH=a$ فتكون مساحة المثلث ABC هي $\frac{a.b}{2}$.

وبفرض أن المراد إنشاؤه طول ضلعه x فتكون مساحته x^2. إذن:

$$x^2=\frac{a.b}{2} \Leftrightarrow x_1=\sqrt{\frac{a.b}{2}}\ ,\ x_2=-\sqrt{\frac{ab}{2}}$$

ومنه طول ضلع المربع المراد إنشاؤه هو $\sqrt{\frac{a.b}{2}}$.

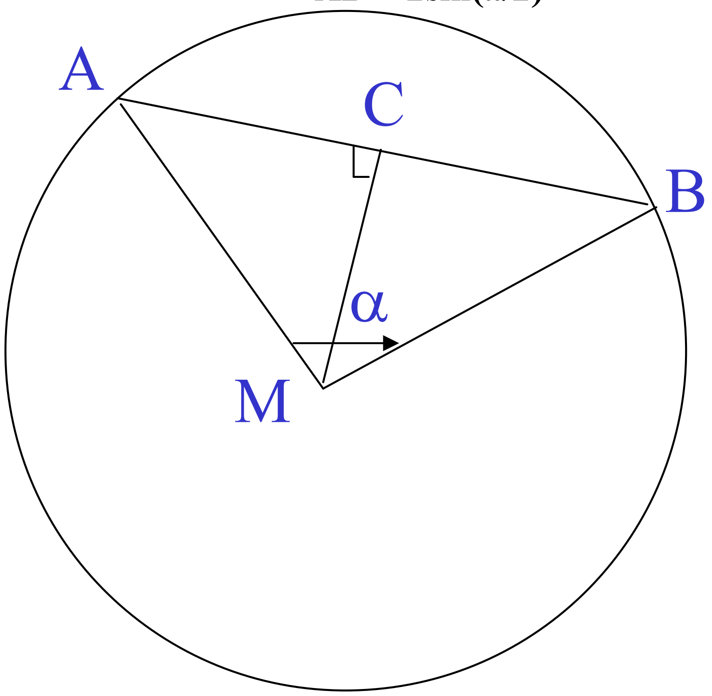
علم المثلثات

نبذة عن علم المثلثات قبل العرب :

[37] تماثل المبرهنة الثانية عشر بأخذ الزاوية حادة.

كان ظهور أولى المعلومات في علم المثلثات نتيجة لتطور علم الفلك وازدهاره في العصور القديمة في بلاد وادي الرافدين ومصر واليونان.
لم يعرف حتى وقتنا الحاضر من هو بالضبط أول من قسم الدائرة إلى 360 درجة ، والأهم من ذلك لم يعرف سبب هذه القسمة.
استند العلماء الهنود على أعمال الفلكيين اليونانيين منذ القرون الأولى للميلاد واستطاعوا التوصل إلى بعض الإنجازات الخاصة بهم.
فقام اليونانيون بوضع جداول لأطوال الأوتار في الدائرة، المقابلة لأقواس التي تمثل أجزاء من 360 درجة من محيط الدائرة.
يعني ذلك، اذا أخذنا دائرة نصف قطرها 1 فإن طول الوتر المقابل للقوس AB َ هو ضعف نصف الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس أي أن :

$$\mathbf{Sin(a/2) = (AC/AM) = AC = (½)AB}$$
$$\mathbf{AB = 2sin(a/2)}$$



وابرز إنجاز هندي في علم المثلثات هو استبدال أوتار الأقواس بجيوب الزوايا.
وكان علماء الهنود يعرفون الجيب وجيب التمام ومقابل الجيب.
كان الهنود يسمون الجيب (أردها جيفا) أي نصف الوتر ثم اختصروا هذا الاصطلاح إلى (جيفا) . أما جيب التمام فكان الهنود يسمونه "كوتيجيفا" أي الباقي. (أو جيب المتممة إلى 90 درجة).
وفي القرن الثاني عشر قام الأوربيون بترجمة "جيب التمام" العربية إلى اللاتينية " Snus

Resiolui واستبدل هذا الاصطلاح في القرن الخامس عشر " "Sinus Complement الـذي اختصر فيما بعد إلى " "Cosinus ثم إلى " "Cosin المستعملة في الوقت الحاضر في اللغـات الأوربية.

المثلثات في الحضارة العربية

احتل علم المثلثات مكانا مرموقا في الرياضيات العربية. إذ كان حلقة وصل بـين الرياضـيات وبعض العلوم الأخرى التي كان لها أهمية خاصة في ذلك العصر مثل الفلك والجغرافيا ووضع التقويم وعمل الساعات الشمسية. وابتدأ العلماء العرب بحوثهم في علم المثلثات بالتعرّف علـى إنجازات علماء الهنود واليونانيين في هذا المجال.

ففي حوالي عام 773م قام العالم الفلكي أبوعبد الله محمد بن إبراهيم الفزاري بترجمة الكتـاب الهندي "سندهند" المتضمن للمعلومات المثلثية والفلكية عند الهنود إلى العربية. وفي القرن التاسع الميلادي تمت ترجمة كتاب المجسطي لبطليموس وكتاب "الكرات" لمـنلاوس إلـى العربيـة. وأصبحت هذه الكتب العمود الأساسي الذي بني عليه العلماء العرب بحوثهم.

قام محمد بن موسى الخوارزمي (ت 850م) بتأليف أحد الكتب الفلكية الأولى باللغـة العربيـة بالإستناد إلى المؤلفات الهندية واليونانية. ويتضمن هذا الكتاب أول الجداول العربيـة للجيـوب والظلال. ولكنه لم يصلنا في صورته العربية بل وصلنا باللاتينية ترجمة اديلاد الباثي في القرن الثاني عشر الميلادي.

ولكن يمكننا التأكيد بصورة يقينية أن مفهوم الظل والظل التمام كان معروفا عند أحد معاصري الخوارزمي وزميله في بيت الحكمة في بغداد وهو أحمد بن عبد الله المروزي الذي غالبـا مـا يدعى بالحبش الحاسب (توفي 874م). لم يظهر مفهوم الظل وظل التمام في البدايـة كخطـوط مرتبطة بالدوائر بل ظهر هذا المفهوم في البحوث الفلكية الخاصة بتحديد زاوية ارتفاع الشمس.

وهكذا أول من أدخل ظل وظل التمام للزاوية هم العلماء العرب في بغداد فـي القـرن التاسـع الميلادي وبعد ذلك بفترة، خرج استعمال مفهومي الظل وظل التمام عن نطاق الدراسات الفلكية والساعات الشمسية، وإدراك العلماء العرب علاقة هذين المفهومين الجديدين بمفهـومي الجيـب وجيب التمام بإرجاع جميع هذه المفاهيم إلى المثلث قائم الزاوية.

ويمكننا القول ان نشوء علم المثلثات باعتباره علما مستقلا بذاته بدأ في تلك الفترة في الإسلام إذ أن كل ما عرف قبل ذلك في هذا المجال كان عبارة عن مجموعة من معلومات متفرقة مرتبطة ارتباطا وثيقا بعلم الفلك.

ثم استمر العلماء العرب بعد الخوارزمي والحاسب في الاهتمام بمؤلفاتهم الفلكية بدراسة أضلاع المثلث قائم الزاوية وعلاقتها بزوايا هذا المثلث. وتطورت هذه الدراسة علـــى يـــد البتـــاني (ت 929م) الذي وضع كتابا بعنوان "إصلاح المجسطي" أورد فيه العلاقات التالية :
تم عرضت مبادئ علم المثلثات بشكل أوسع وأكثر تفصيلا في "الكتاب الشامل" الذي ألفـــه أبـــو الوفا البوزجاني (ت 997م). وفي هذا الكتاب قام بتعريف جميع القيم المثلثية بطريقـــة موحـــدة بواسطة دائرة نصف قطرها 1.

تمارين

1. أعط عنوان كتاب في الرياضيات من تأليف كل من هؤلاء العلماء : ابن الياسمين، الكاشي، ابن قنفذ القسنطيني، القطرواني، ابن زكريا الغرناطي، ابن منعم، ابن البنا، ابن الهيثم (كتاب المناظر غير مقبول).

2. ظهر علم الجبر والمقابلة على يد محمد بن موسى الخوارزمي (ت. 850) في بغداد في الفترة ما بين 813م و833م:

1. عرف الجبر والمقابلة (يطلب مثال توضيحي) مع ذكر أدوات الجبر ووسائله والمعادلات الست مرتبة كما وردت عند الخوارزمي دون استعمال الرموز.

2. أذكر المصادر التي يكون قد أعتمدها الخوارزمي في اكتشاف علمه الجديد (يطلب دراسة التأثير الهندي، اليوناني، المصري والبابلي إن كان هناك تأثير، مع إعطاء أمثلة واضحة ومختصرة).

3. حسب معلوماتك، هل أول من كتب في الجبر والمقابلة هو الخوارزمي؟ برر إجابتك.

3. أكتب ما يلي بالرموز المعاصرة مع التأكد من صحة العلاقات الرياضية، ثم قل ماذا تلاحظ؟

1. كل عدد يقسم بقسمين فإن مربع مربع العدد المقسوم مساو لمربع مربع كل واحد من القسمين وضرب كل واحد من القسمين في مكعب الأخر أربع مرات وضرب مربع احدهما في مربع الأخر ست مرات.

2. كل عدد يقسم بقسمين فإن مال كعب العدد المقسوم مساو لمال كعب كل واحد من القسمين، وضرب كل واحد منهما من مال مال الأخر خمس مرات ومربع كل منها في مكعب الأخر عشرة مرات وما يتلوا ذلك مضاعفا.

3. إن قيل لك اجمع مربع مربع واحد إلى مربع مربع كذا فاضرب المنتهى إليه ونصف واحد في المنتهى إليه ثم في المنتهى إليه وواحد احفظ الخارج ثم اضرب المنتهى إليه في خمسة بزيادة خمس واحد والخارج منقوص منه ثلث خمس واحد في المحفوظ يكن الجواب.

4. 1. حلل النص التالي : قال الخوارزمي : فإن قيل أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع والقاعدة أثنا عشر ذراعا في جوفها أرض مربعة كم كل جانب من المربعة.

فقياس ذلك أن تعرف عمود المثلثة وهو أن تضرب نصف القاعدة وهو ستة في مثله فيكون ستة وثلاثين فأنقصها من أحد الجانبين الأقصرين مضروبا في مثله وهو مائة يبقى أربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو العمود وتكسيرها ثمانية وأربعون ذراعا وهو ضربك العمود في نصف القاعدة وهو ستة فجعلنا أحد جوانب المربعة شيئا وضربناه في مثله فصار مالا فحفظناه ثم علمنا أنه قد بقى لنا مثلثتان عن جنبتي المربعة ومثلثة فوقها فأما المثلثتان على جنبتي المربعة فهما متساويتان. وعموداهما واحد وهما على زاوية قائمة فتكسيرها أن تضرب شيئا في ستة إلا نصف شئ فيكون ستة أشياء إلا نصف مال وهو تكسير المثلثتين جميعا اللتين هما على جنبتي المربعة. فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية غير شئ وهو العمود في نصف شئ فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال فهذا هو تكسير المربعة وتكسير الثلاث مثلثات وهو عشرة أشياء تعدل ثمانية وأربعين هو تكسير المثلثة العظمى فالشئ الواحد من ذلك أربعة أذرع وأربعة أخماس ذراع وهو كل جانب من المربعة.

2. ماذا تلاحظ عن علاقة الجبر والمقابلة بالهندسة الاقليدية من خلال النص السابق؟

5. 1. اكتب التحليل الرياضي للمبرهنة التالية :

<مبرهنة> : المثلث القائم الزاوية مربع وتر قائمته كمربعي الضلعين المحيطين بها.

<برهان> : فليكن زاوية أ من مثلث أ ب جـ قائمة. ونعمل على أب مربع أد وعلى أجـ مربع أ ز، فلأن الزاويتين الحادثتين عند أ وزاوية المثلث كل منها قائمة، فـ ب أ ح مستقيم وجـ أ هـ أيضا مستقيم. ونخرج د هـ، ز ح في جهتي هـ، ح على استقامتهما حتى يتقاطعا على ط. ود ب، زجـ في جهتي ب، جـ حتى يتقاطعا على ك. ونفصل كلا من د ل، ط م كـ ب ك، ونصل ب ل، ل م، م جـ. فخطوط ك د، جـ هـ، زط متوازية وكذلك خطوط د ط، ب ح، ك ز متوازية و ك جـ كـ ب أ، أي كـ ب د وجـ ز كـ جـ أ، أي كـ ب ك. فجميع ك ز كجميع ك د وزاوية ك قائمة، فسطح ك ط مربع، وك جـ، ب د، ل ط، م ز الخطوط المفصولة من أضلاعه متساوية. فسطح جـ ل أيضا مربع، بل هو مربع ب جـ ولأن متمم أ ك ضعف مثلث ب جـ ك، فمتمما أ ك، أ ط المتساويان أربعة أمثال مثلث ب جـ ك، والأربع المثلثات

التي هي جـ ب ك، ب ل د، ل ط م، م ز جـ أيضا أربعة أمثال مثلث ب جـ ك، فالمتممان كالمثلثات الأربع. وإذا نقصنا المتممان منه بقى مربع ب م والمنقوصان متساويان والمنقوص منه شيء واحد. فمربع ب م الباقي كمربعي د أ، أ ز الباقيين. وذلك ما أردناه.

ويتبين باستعانة من هذا، أنه لو كان مربع ضلع من أضلاع مثلث كمربعي الضلعين الباقيين كانت الزاوية المحيط بها الضلعان الباقيان قائمة.

وذلك أنا لو فرضنا أن مربع ب جـ كمربعي ب أ، أجـ وعملنا على نقطة أ من خط ب أ قائمة وفصلنا الضلع الحادث كـ أ جـ، ووصلنا بين ب والطرف الحادث من الضلع الحادث كان مربع الموصول كمربعي الحادث وب أ أي كمربعي جـ أ وب أ بل كمربع ب جـ، فكان الموصول كـ ب جـ. وكان ثلاثة أضلاع مثلث ب أ جـ كثلاثة أضلاع المثلث الموهوم، فكان زاوية ب أ جـ كالقائمة المعمولة، فكانت قائمة المثلث المنفرج الزاوية.

2. بماذا تذكرك هذه المبرهنة، وما هو الفرق بينها وبين ما تعرفه؟

6. أكتب ما يلي بالرموز المعاصرة مع التأكد من صحة العلاقات الرياضية :

1. وأما الجمع على توالي الأعداد فهو أن تضرب نصف المنتهى إليه في المنتهى إليه وواحد. وتربيعه بضرب ثلثي المنتهى إليه وزيادة ثلث واحد في المجموع. وتكعيبه بتربيع المجموع. وأما الجمع على توالي الأفراد فهو أن تربع نصف المنتهى إليه المؤلف مع الواحد. وتربيعه بضرب سدس المنتهى إليه في مسطح العددين الذين يليانه بعده. وتكعيبه بضرب المجموع في ضعفه إلا واحدا. وأما الجمع على توالي الأزواج فهو أن تحمل على المنتهى إليه اثنين أبدا وتضرب نصف المجتمع في نصف المنتهى إليه. وتربيعه بضرب ثلثي المنتهى إليه وثلثي واحد في المجموع، أو بضرب سدس المنتهى إليه في مسطح العددين اللذين يليانه بعده. وتكعيبه بضرب المجموع في ضعفه.

2. إن قيل لك اجمع مربع مربع واحد إلى مربع مربع كذا فاضرب المنتهى إليه ونصف واحد في المنتهى إليه ثم في المنتهى إليه وواحد أحفظ الخارج ثم اضرب المنتهى إليه في خمسة بزيادة خمس واحد والخارج منقوص منه ثلث خمس واحد في المحفوظ يكن الجواب.

7. من خلال تحليلك الرياضي للنص الأتي، أوجد الكلمات التي يكون الناسخ قد نسيها، ثم أكتب ما تلاحظه من خلال دراستك للجبر العربي حول تطور المعادلات في التقليد الرياضي العربي، مبرزا مصادر علم الجبر والمقابلة :

قال الكرجي (ت. 1029م) : وأما المقترن الثالث وهو أشياء يعادل أموالا فإذا كان واحدا زدنا مربع الأشياء على العدد فما بلغ نزيد على جذره عدد الأجذار فما بلغ فهو المال وإذا كانت أكثر

من مال واحد أو كان في المسألة بعض المال قسمنا أعداد المسألة على بأسرها فيخرج من القسمة كامل والنسبة باقية بحالها.

فبعضها يعدل بعضا عددا ، مركبا مع غيره أو مجردا
فثلث ستة نصفها من كعبه ، ونصفها بيه في رتبه
أولها في الاصطلاح الجبر ، أن تعدل الأموال للأجذار
وأن تكون عادلت الأعداد ، فهي تليها وبهم المراد
وإن تعادل الجذور عددا ، فتلك تتلوها على ما حددا
فاقسم على الأموال أو جذرتها ، واقسم على الأجذار إن عددته
فهذه المسائل البسيطة ، خارجها الجذر سوى الوسيطة
فإنما يخرج فيه المال ، بحسب ما قد اقتضى السؤال
والشيء والجذر بمعنى واحد ، كالقول في لفظ أب ووالد
واعلم هديت رشدا أن العدد ، في أول المركبات ينفرد
وقد رووا أيضا جذور الثانية ، وأفرد والأموال هم في الثالثة
فربع النصف من الأشياء ، واحمل على الأعداد باعتناء
وخذ من الذي تناهى جذره ، ثم انقص التنصيف وابقه
فما بقي فهو جذر المال ، وهذه رابعة الأحوال
وانقص من التربيع في أخرى العدد ، وجذر ما بقي عليه يعتمد
فانقصه من تنصيفك الأجذارا ، وإن تشا جمعته اختيارا
فذاك جذر المال بالنقصان ، وذاك جذر المال بال[illegible]

1

بسم الله الرحمن الرحيم ... وصلى الله على سيدنا ومولانا محمد

الحمد لله على ما ألهما ... ومن من تعليمه وفهما

وصلوات الله طول الأبد ... على النبي المصطفى محمد

والشكر للحبر الزكي العالم ... أستاذنا محمد بن قاسم

فهو الذي يبديها إن أشكلا ... ويبين الغامض حتى يسهلا

جزاه رب الناس عنا خيرا ... وأجزل الأجر له في الأخرى

كلفني أبر من أسعى به ... وأن أوجهها إلى خلافه

أرجوزة الجبرية المقدمة ... في أحرف قليلة منظمة

موزونة على نظام الرجز ... كثيرة المعنى بلفظ موجز

فلم أزل معتذرا من هذا ... ولم أجد عن أمره ملاذا

فقلتها فوقفوا على اعتذاري ... فليستر الزلة فيها القاري

على ثلاثة يدور الجبر ... المال والأعداد ثم الجذر

فالمال كل عدد مربع ... وجذره واحد تلك الأضلع

والعدد المطلق ما لم ينسب ... للمال والجذر فافهم تصب

[illegible]

وإن تجد التربيع مثل العدد … فجذره التنصيف دون [illegible]

وإن يكن يزيد عليه العدد … فإن ذلك لا يكون أبدا

وإلا فغلط من بيان الناقصة … فلنترك بيان الناقصة

فاجمع إلى الأعداد ذا التربيعا … واستخرج من جذرهما جميعا

واحمل على التنصيف ما الخذرا … جذر المال المجهول فارددنه

وحط الأموال إذا ما كثرت … واجبر كسورها إذا ما قصرت

حتى يصير الكل مالا مفردا … وحظ جذر المال المجهول ما قد عددا

أو ما ضربت الأموال في أعدادها … وحظ على ما قد ذا العتماد

واضمم تكميل الجذر من بعد … أعداد الأموال وحظ ما يحصلا

ويعزى ما استثنيت في المسائل … حتى إذا ما تم في المعادل

وبعد ما يجبر فليقابل … بطرح ما نظيره يماثل

ثم أقول بعزة المنازل … مقابل المال بعض فاضل

فالجذر الأول يليه المال … وبعده كعب له انتقال

وهكذا يركب عليه أبدا … ما بلغت وما انتهى أطباقه

وما ضربته من منازله … تعرف من ذلك أمر الحاصلة

ثلاثة لكل كعب كررا … واثنان للمال متى ما ذكرا

وإن ضربت عددا في الجنس … فالخارج الجنس بغير لبس

[illegible]

المراجع

ابن إبراهيم المراكشي، عباس 1974: الأعلام، تحقيق بن منصور، الرباط، المطبعة الملكية، 10 أجزاء .

ابن القاضي 1899 : جذوة الاقتباس، مطبعة حجرية، فاس.

ابن القاضي 1970 : درة الرجال في أسماء الرجال، تحقيق، م.الأحمدي بوالأنوار، القاهرة، دار التراث، 3 أجزاء.

ابن سعيد 1954 : الغصون اليانعة في محاسن شعراء المائة السابعة، تحقيق إبراهيم الأبياري، القاهرة، دار العارف.

ابن قنفذ، أحمد 1965 : أنس الفقير وعز الحقير، تحقيق محمد الفاسي وأدولوف، الرباط، منشورات المركز الجامعي للبحث العلمي، .

ابن قنفذ، أحمد 1968 : الفارسية في مبادئ الدولة الحفصية، تحقيق محمد الشاذلي النفير وعبد المجيد التركي، تونس الدار التونسية للنشر.

ابن قنفذ، أحمد 1976: شرف الطالب في أسنى المطالب، تحقيق محمد حجي، الرباط، دار المغرب للتأليف والترجمة والنشر، سلسلة التراجم، بعنوان ألف سنة من الوفيات.

ابن قنفذ، أحمد 1983 : الوفيات، تحقيق عادل النويهض، بيروت، دار الآفاق الجديدة.

ابن قنفذ، أحمد 1984 : وسيلة الإسلام بالنبي عليه الصلاة والسلام، تقديم وتعليق سليمان الصيد المحامي، بيروت، دار الغرب الإسلامي.

ابن مريم 1986 : البستان في ذكر الأولياء والعلماء بتلمسان، تحقيق محمد بن شنب، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية.

البوني، أحمد 1904 : شمس المعارف الكبرى، القاهرة.

التنبكتي، أحمد بابا بدون تاريخ: نيل الابتهاج، فاس، مطبعة حجرية.

جلال، شوقي، منظومات ابن الياسمين في أعمال الجبر والحساب، سلسلة التراث العلمي العربي، مؤسسة الكويت للتقدم العلمي، الكويت، 1988.

الحفناوي، محمد : تعريف الخلف برجال السلف، بيروت، مؤسسة الرسالة والمكتبة العتيقة.

زمولي، التهامي 1993: الأعمال الرياضية لابن الياسمين (ت. 601هـ/1204م)، رسالة ماجستير في تاريخ الرياضيات، المدرسة العليا لأساتذة، القبة، الجزائر.

سعد الله، أبو القاسم 1990 : تاريخ الجزائر الثقافي، الجزائر، بيروت،دار الغرب الإسلامي، 9 أجزاء.

سويسي، محمد 1969 : تلخيص أعمال الحساب لابن البنّا المراكشي، تحقيق وترجمة فرنـــسية، تونس،منشورات الجامعة التونسية.

قرقور، يوسف 1990 : الأعمال الرياضية لابن قنفذ القسنطيني (ت. 810هــ/1407م)، رسالة ماجستير في تاريخ الرياضيات، المدرسة العليا لأساتذة، القبة، الجزائر.

قرقور، يوسف 2006 : لمحة عن الإسهام الرياضي لبعض علماء مغاربة وأندلسيين في الفترة ما بين القرنين 8م و16م، مجلة آفاق الثقافة والتراث، بدبي (الإمارات العربية المتحدة)، العـــدد 55 ، أكتوبر، ص. 149-163.

المنوني، محمد 1985 : نشاط الدراسات الرياضية في مغرب العصر الوسيط الرابع (عصر بني مرين)، الرباط، مجلة المناهل، عدد33.

اليعقوبي، محمد : اللمعة الماردينية في شرح الياسمينية في الجبر والمقابلة، لبدر الدين محمد بن محمد سبط المارديني، المجمع العربي للتأليف والدراسات والترجمة، دمشق، 1985.

Bencheneb, M. 1928 : La Farisiya ou la dynastie Hafside par Ibn Qunfudh de Constantine, *Hésperis*, T. 8.

Brockelmann, C. 1898-1942 : *Geschichte der Arabischen Literatur*, Bd. I, II, Suppl. I, II, III, Weimar-Berlin-Leyde.

Cherbonneau, A. 1948 : La Farésiade, *Revue Asiatique*, 4eme série, n°12, Paris.

Djebbar, A. 1981 : *Enseignement et Recherche Mathématique au Maghreb des XIIIe-XIVe siècles*, Publication mathématiques d'Orsay, n° 81-02, Orsay, Université Paris-Sud.

Djebbar, A. 1988 : *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman*, Premier Colloque Maghrébin d'Alger sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, 1-3 Décembre 1986. Paru dans les Actes du Colloque, Alger, Maison des Livres, , pp. 99-123.

Djebbar, A. 1990 : Mathématiques et Mathématiciens du Maghreb médiéval (IXe-*XVI*^{e} *siècles) : contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes-Université de Paris-Sud.

Djebbar, A. 2001 : *Une Histoire de la Science Arabe*, Le Seuil.

Djebbar, A. 2005 : *L'algèbre arabe : Genèse d'un Art*, Vuibert, Paris.

Guergour, Y. 2006 : *La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn H⅄d (m. 478/1085) : Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb*, Thèse de Doctorat, Université d'Annaba (Algérie).

Lamrabet, D. 1994 : *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, Rabat, Imprimerie al-Marif al-jadida.

Suter, H. 1900 : *Die Matimatiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig, Teubner.