

1	Logique et méthodes de raisonnement	3
1.1	Règles de logique formelle	3
1.2	La négation $\ll (non P) \gg, \ll \bar{P} \gg :$	3
1.3	Les connecteurs logiques.	4
1.4	L'implication	4
1.5	La réciproque de l'implication	5
1.6	La négation d'une implication	5
1.7	Conclusion	6
1.8	L'équivalence	6
1.9	Propriétés des connecteurs logiques	7
1.10	Les quantificateurs.	8
1.10.1	Quantificateur universel $\ll \forall \gg$	8
1.10.2	Quantificateur existentiel $\ll \exists \gg$	8
1.11	Règles de négations	9
1.12	Méthodes de raisonnement	9
1.12.1	Méthode de raisonnement direct	9
1.12.2	Méthodes du raisonnement par la contraposée	9
1.12.3	Raisonnement par l'absurde	10
1.12.4	Contre exemple	10
1.12.5	Raisonnement par recurrence	10
1.13	Exercices Corrigés	10

CHAPTER 1

LOGIQUE ET MÉTHODES DE RAISONNEMENT

1.1 Règles de logique formelle

Definition 1.1 Une proposition est une expression mathématique à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai ou faux.

Example 1 (1) $\ll$ Tout nombre premier est pair $\gg$, cette proposition est fausse.

(2) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, cette proposition est vraie

(3) 2 est inférieure à 4, cette proposition est vraie

Definition 1.2 Toute proposition démontrée vraie est appelée théorème (par exemple le théorème de PYTHAGORE, Thalès...)

1.2 La négation $\ll (nonP) \gg, \ll \bar{P} \gg$:

Definition 1.3 Soit P une proposition, la négation de P est une proposition désignant le contraire qu'on note $(nonP)$, ou bien $\bar{P}$, on peut aussi trouver la notation $\neg P$. Voici sa table de vérité.

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

Example 2 (1) Soit $E \neq \emptyset, P : (a \in E)$, alors $\bar{P} : (a \notin E)$.

(2) $P : \text{la fonction } f \text{ est positive}$, alors $\neg P : \text{la fonction } f \text{ n'est pas positive}$.

(3) $P : x + 2 = 0$, alors $(\text{non } P) : x + 2 \neq 0$.

1.3 Les connecteurs logiques.

Soit P, Q deux propositions

1. **La conjonction** $\ll \text{et} \gg, \ll \wedge \gg$

Definition 1.4 la conjonction est le connecteur logique $\ll \text{et} \gg, \ll \wedge \gg$, la proposition $(P \text{ et } Q)$ ou $(P \wedge Q)$ est la conjonction des deux propositions P, Q .

- $(P \wedge Q)$ est vraie si P et Q le sont toutes les deux.
- $(P \wedge Q)$ est fausse dans les autres cas. On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple 3 (1) 2 est un nombre pair et 3 est un nombre premier, cette proposition est vraie

(2) $3 \leq 2$ et $4 \geq 2$, cette proposition est fausse.

2. **La disjonction** $\ll \text{ou} \gg, \ll \vee \gg$

Definition 1.5 La disjonction est un connecteur logique $\ll \text{ou} \gg, \ll \vee \gg$ on note la disjonction entre P, Q par $(P \text{ ou } Q), (P \vee Q)$. $P \vee Q$ est fausse si P et Q sont fausses toutes les deux, sinon $(P \vee Q)$ est vraie.

On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

EXEMPLE 1.9. (1) 2 est un nombre pair ou 3 est un nombre premier. Vraie.

(2) $3 \leq 2$ ou $2 \geq 4$ Fausse

1.4 L'implication

Definition 1.6 L'implication de deux propositions P, Q est notée $P \Rightarrow Q$ on dit P implique Q ou bien si P alors Q . $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse, sinon $(P \Rightarrow Q)$ est vraie



dans les autres cas.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Example 4 (1) $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 3$. Vraie

(2) Il pleut, alors je prends mon parapluie. Vraie c'est une conséquence.

(3) Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto. Vraie c'est une conséquence.

1.5 La réciproque de l'implication

Definition 1.7 La réciproque d'une implication $(P \Rightarrow Q)$ est une implication $Q \Rightarrow P$.

Example 5 (1) La réciproque de: $0 \leq x \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 3$, est : $\sqrt{x} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 9$

(2) La réciproque de: (Il pleut, alors je prends mon parapluie), est: (je prends mon parapluie, alors il pleut).

(3) La réciproque de: (Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto), est: (Omar a joué au loto $\Rightarrow$ Omar a gagné au loto).

4) La contraposée de l'implication Soit P, Q deux propositions, la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, on a

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

Remark 1 $(P \Rightarrow Q)$ et $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ ont la même table de vérité, i.e., la même valeur de vérité.

Example 6 (1) La contraposée de : (Il pleut, alors je prends mon parapluie), est (je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas).

(2) La contraposée de : (Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto), est: (Omar n'a pas joué au loto $\Rightarrow$ Omar n'a pas gagné au loto).

1.6 La négation d'une implication

Soit P, Q deux propositions on a

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \iff (P \wedge \bar{Q}).$$

Example 7 (1) La négation de: (il pleut, alors je prends mon parapluie), est: (il pleut et je ne prends pas mon parapluie).

(2) La négation de: (Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto), est : (Omar a gagné au loto et Omar n'a pas joué au loto).

(3) $(x \in [0, 1] \Rightarrow x \geq 0)$ sa négation : $(x \in [0, 1] \wedge x < 0)$.



1.7 Conclusion

- (1) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \wedge \bar{Q})$.
 (2) La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.
 (3) La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

Remark 2 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$. *RO ÉLÉMENT DE LOGIQUE ET MÉTHODES DE RAISONNEMENT AVEC*

Preuve. Il suffit de montrer que $(P \Rightarrow Q)$ a la même valeur de vérité que $(\bar{P} \vee Q)$, on le voit bien dans la table de vérité suivante:

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \vee Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

□

1.8 L'équivalence

Definition 1.8 L'équivalence de deux propositions P, Q est notée $P \Leftrightarrow Q$, on peut aussi écrire $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. On dit que $P \Leftrightarrow Q$ si P et Q ont la même valeur de vérité, sinon $(P \Leftrightarrow Q)$ est fausse.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remark 3 (1) $P \not\Leftrightarrow Q$ c'est à dire P n'est pas équivalente à Q lorsque $P \neq Q$ ou $Q \neq P$.

(2) $P \Leftrightarrow Q$ peut être lue P si et seulement si Q .

Example 8 (1) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

(2) Omar a gagné au loto $\Leftrightarrow$ Amar a joué au loto.

Theorem 1 Soit P, Q deux propositions on a :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$



Preuve.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

□

1.9 Propriétés des connecteurs logiques

Quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q, R les propriétés suivantes sont toujours vraies.

- (1) $\bar{P} \vee P$
- (2) $\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P$
- (3) $P \wedge P \Leftrightarrow P$
- (4) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$. Commutativité de $\wedge$
- (5) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$. Commutativité de $\vee$ (6) $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$. Associativité de $\wedge$
- (7) $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$. Associativité de $\vee$
- (8) $P \vee P \Leftrightarrow P$
- (9) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- (10) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
- (11) $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
- (12) $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$
- (13) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$ Lois de Morgan
- (14) $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$ Lois de Morgan
- (15) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

Preuve. On a

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

□

(14)

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

1.10 Les quantificateurs.

1.10.1 Quantificateur universel $\ll \forall \gg$

La relation pour tous x tel que $P(x)$ est notée : $\forall x, P(x)$ se lit quel que soit $x, P(x)$.

1.10.2 Quantificateur existentiel $\ll \exists \gg$

La relation il existe un x tel que $P(x)$ est notée : $\exists x, P(x)$.

Remark 4 Il existe un et un seul élément x de E c'est à dire un unique $x, P(x)$ est notée : $\exists! x \in E, P(x)$

Example 9 Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

(1) $P(x)$: La fonction f est nulle pour tous $x \in \mathbb{R}$ devient

$$P(x) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

(2) $P(x)$: la fonction f s'annule en x_0 devient

$$P(x) : \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0.$$

Remark 5 Les relations $\forall x, \exists y, P(x, y)$ et $\exists y, \forall x, P(x, y)$ sont différentes, dans la première y dépend de x tandis que dans la seconde y ne dépend pas de x .

Example 10 (1) Tous les étudiants de la section 1 ont un groupe sanguin. $\forall$ étudiant $\in$ section 1, $\exists$ un groupe sanguin, étudiant a un groupe sanguin. Vraie (cela veut dire que chaque étudiant a un groupe sanguin).

(2) Il existe un groupe sanguin pour tous les étudiants de la section 1. $\exists$ un groupe sanguin O^- , $\forall$ l'étudiant de section 1, l'étudiant a O^- . Fausse (cela veut dire que tous les étudiants ont le même groupe sanguin ce qui est peut probable).

(3) La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0)$ est vraie en effet $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$.

(4) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq y$ c'est vraie car $\exists y = 0, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

1.11 Règles de négations

Soit $P(x)$ une proposition,

- (1) la négation de $\forall x \in E, P(x)$ est : $\exists x \in E, \bar{P}(x)$.
- (2) la négation de $\exists x \in E, P(x)$ est : $\forall x \in E, \bar{P}(x)$.

Remark 6 (1) $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$ veut dire que x est constante (fixé), il est indépendant de y qui varie dans E .

(2) $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y)$ veut dire y dépend x , par une certaine relation f telle que $y = f(x)$.

(3) On peut permuter entre deux quantificateurs de la même nature:

$$\forall x, \forall y, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, P(x, y).$$

$$\exists x, \exists y, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y).$$

Example 11 La négation de $\forall \epsilon > 0, \exists q \in \mathbf{Q}^+$ tel que : $0 < q < \epsilon$ est : $\exists \epsilon > 0, \forall q \in \mathbf{Q}^+$ tel que : $q \leq 0$ ou $q \geq \epsilon$

1.12 Méthodes de raisonnement

Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie on peut utiliser ce qui suit :

1.12.1 Méthode de raisonnement direct

On suppose que P est vraie et on démontre que Q l'est aussi.

Example 12 Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$ si n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.

On suppose que n est pair, i.e., $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$ donc

$$n.n = 2(2k^2) \Rightarrow n^2 = 2k'$$

on pose $k' = 2k^2 \in \mathbb{Z}$ ainsi $\exists k' \in \mathbb{Z}, n^2 = 2k'$, n^2 est pair, d'où le résultat.

1.12.2 Méthodes du raisonnement par la contraposée

Sachant que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, pour montrer que $P \Rightarrow Q$ on utilise la contraposée, c'est à dire il suffit de montrer que $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ de manière directe, on suppose que $\bar{Q}$ est vraie et on montre que $\bar{P}$ est vraie.

Example 13 Montrons que n^2 est impair $\Rightarrow n$ est impair. Par contraposée il suffit de montrer que si n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair voir l'exemple précédent.

1.12.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que R est une proposition vraie on suppose que $\bar{R}$ est vrai et on tombe sur une contradiction (quelque chose d'absurde), quand $R : P \Rightarrow Q$ est une implication par l'absurde on suppose que $\bar{R} : R \wedge \bar{Q}$ est vraie et on tombe sur une contradiction.

Exemple 14 (a) Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

(b) n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair, par l'absurde: on suppose que n est pair et que n^2 est impaire contradiction

1.12.4 Contre exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner ce qu'on appelle un contre-exemple c'est à dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

Exemple 15 (n est un nombre pair) $\Rightarrow (n^2 + 1$ est pair), fausse car pour $n = 2, 4 + 1 = 5$ n 'est pas pair, c'est un contre-exemple.

1.12.5 Raisonnement par recurrence

Pour montrer que $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n(x)$ est vraie on suit les étapes suivantes :

(a) On montre que $P(n_0)$ est vraie, (valeur initiale).

(b) On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n

(c) On montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$

Alors P est vrai pour tous $n \geq n_0$.

Exemple 16 Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(a) Pour $n = 1, P(1)$ est vraie $1 = \frac{1(2)}{2}$.

(b) On suppose que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie.

(c) On montre que $1 + 2 + \dots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie, $1 + 2 + \dots + n + 1 = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)}$ ainsi P est vraie à l'ordre $n+1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie.

1.13 Exercices Corrigés

Exercice 1.1 Donner la négation des propositions suivantes:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + y > 3$.

(2) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \epsilon$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 0 \vee x \in]2, 4])$.

(4) Il existe $M \in \mathbb{R}^+$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ tel que : $|U_n| \leq M$.

Solution. (1) $P : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + y > 3$ □

$\Leftrightarrow \bar{P} : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + y \leq 3$

(2) $P : \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \bar{P} : \exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, |x| < \alpha \wedge |x^2| \geq \epsilon$

(3) $P : \forall x \in \mathbb{R}, ((x = 0) \vee (x \in]2, 4]))$

$\Leftrightarrow \bar{P} : \exists x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \wedge (x \leq 2 \vee x > 4)$.

(4) $P : il\ existe\ M \in \mathbb{R}^+, \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } |U_n| \leq M \Leftrightarrow \bar{P} : \text{ pour tous } M \in \mathbb{R}^+, \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } |U_n| > M$.

Remark 7 (1) $a < b$ veut dire $(a < b) \wedge (a \neq b)$ sa négation est : $(a > b) \vee (a = b)$ c'est à dire $a \geq b$.

(2) $a < b < c$ veut dire $(a < b) \wedge (b < c)$ sa négation est : $(a \geq b) \vee (b \geq c)$.

Exercice 1.2 Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions :

(1) Le produit de deux nombres pairs est-il pair?

(2) Le produit de deux nombres impairs est-il impair?

(3) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair?

(4) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair?

Solution. (1) Le produit de deux nombres pairs est-il pair? □

Soit $\mathbb{P} = \{2k/k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des nombres pairs.

$\forall n, m \in \mathbb{P}, n \times m \in \mathbb{P}$?

Soient $n, m \in \mathbb{P}$, alors $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1, \exists k_2 \in \mathbb{Z}/m = 2k_2$ d'où $n \times m = 2(2k_1k_2) = 2k_3$, ainsi $\exists k_3 = 2k_1k_2 \in \mathbb{Z}/n \times m = 2k_3 \Rightarrow n \times m \in \mathbb{P}$ le produit est pair.

(2) Le produit de deux nombres impairs est-il impair?

Soit $I = \{2k + 1/k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des nombres impairs. $\forall n, m \in I, n \times m \in I$?

Soient $n, m \in I$, alors $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1 + 1, \exists k_2 \in \mathbb{Z}/m = 2k_2 + 1$ d'où $n \times m = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 2k_3 + 1$, ainsi $\exists k_3 = 2k_1k_2 + k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}/n \times m = 2k_3 + 1 \Rightarrow n \times m \in I$ le produit est impair.

(3) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair?

$\forall n \in \mathbb{P}, m \in I, n \times m \in \mathbb{P}, n \times m \in I$?

Soient $n \in \mathbb{P}, m \in I$, alors $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1, \exists k_2 \in \mathbb{Z}/m = 2k_2 + 1$ d'où $n \times m = 2(2k_1k_2 + k_1) = 2k_3$, ainsi $\exists k_3 = 2k_1k_2 + k_1 \in \mathbb{Z}/n \times m = 2k_3 \Rightarrow n \times m \in \mathbb{P}$ le produit est pair.

(4) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair? $\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ est pair}$. Montrons que $n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ est pair}$.

Soit $n \in \mathbb{P}$, alors $\exists k_1 \in \mathbb{Z}/n = 2k_1$, d'où $n^2 = n.n = 2(2k_1^2)$, ainsi $\exists k_2 = 2k_1^2 \in \mathbb{Z}/n^2 = 2k_2$ il est pair.

Montrons que n^2 pair $\Rightarrow n$ est pair.

Par contraposée, on doit montrer que n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair, c'est vrai cas particulier de la question 2), ainsi la proposition n^2 pair $\Rightarrow n$ est pair est vérifiée, de plus n pair $\Rightarrow n^2$ est pair $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, n$ pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair est vraie.

Exercice 1.3 Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses.

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$.
- (2) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$.
- (3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$.
- (4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$.
- (5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.
- (6) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ ou } 2x + y = 0)$.
- (7) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$.

Solution. (1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, est vraie car $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$. $\square$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, est fausse car, sa négation $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$, est vraie $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R}; 2x + y \leq 0$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, est fausse car sa négation $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$ est vraie, en effet $\exists x = 0, \exists y = 0; 0 \leq 0$.

(4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, vraie car $\exists x = 0, \exists y = 1; 1 > 0$.

(5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$, vraie $\exists x = -1 \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 > y$.

(6) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ ou } 2x + y = 0)$, Vraie car $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R} : 2x - 2x = 0$ (même si $2x + y \not> 0$) ou bien on peut dire que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 : 2x - 2x + 1 = 1 > 0$ (même si $2x + y \neq 0$).

(7) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$ est fausse car on ne peut jamais avoir $(2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$ en même temps.

Exercice 1.4 Par l'absurde montrer que :

- (1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ pair $\Rightarrow n$ est pair.

Solution. (1) Par l'absurde on suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel i.e., $\exists a, b \in \mathbb{N} \ a \wedge b = 1, / \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$ alors 2 divise a, a est pair $\exists k \in \mathbb{N}/n = 2k$, ainsi

$$2b^2 = 4k^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2,$$

on déduit que b est pair aussi or a, b sont premier entre eux contradiction, ce que nous avons supposé au départ est faux c'est à dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ par l'absurde supposons que n^2 est pair et n est impair, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$ d'où $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1, k' = (2k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}, n^2$ est impair contradiction car n^2 est pair. Ce que nous avons supposé au départ est faux c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$ est vraie.

Exercice 1.5 Par contraposée, montrer que

- (1) Si $(n^2 - 1)n'$ est pas divisible par 8 $\Rightarrow n$ est pair.
- (2) $(\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$

Solution. (1) Montrons que sa contraposée : (n est impair $\Rightarrow (n^2 - 1)$ est divisible par 8) est vraie. $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$ il suffit de montrer que $k(k + 1)$ est pair. $\square$

Montrons que $k(k + 1)$ est pair on a deux cas :

Si k est pair alors $k + 1$ est impair donc le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair voir exercice 2 question (3).

Si k est impair, alors $k + 1$ est pair donc le produit est pair c'est le même raisonnement, (il faut savoir que le produit de deux nombre consécutifs est toujours pair).

Ainsi $k(k + 1)$ est pair $\exists k' \in \mathbb{Z}' / k(k + 1) = 2k', d' \text{ où } n^2 - 1 = 4(2k') = 8k' \Rightarrow n^2 - 1$ est divisible par 8.

(2) Montrons que sa contraposée: $(x \neq 0 \Rightarrow (\exists \epsilon > 0, |x| > \epsilon))$ est vraie.

Exercice 1.6 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

Solution. $\circ$ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. $\square$

(1) Pour $n = 1$ on a : $1^3 = \frac{1^2(2)^2}{4} = 1, P(1)$ est vraie.

(2) On suppose que : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ est vraie.

(3) On montre que $1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ est vraie. En utilisant $p(n)$ on obtient:

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n + 1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} + (n + 1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n + 1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}.$$

$$\text{Ainsi } P(n + 1) \text{ est vraie, alors } \forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$\circ$ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9, c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{Z} / 4^n + 6n - 1 = 9k$ (1) Pour $n = 1$ on a : $\exists k = 1 \in \mathbb{Z}, 4 + 6 - 1 = 9 = 9(1), P(1)$ est vraie.

(2) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{Z} / 4^n + 6n - 1 = 9k$ est vraie.

(3) On montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k' \in \mathbb{Z} / 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'$. est vraie.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 6n + 6 - 1 \\ &= (9 - 5)4^n + 6n + 5 \\ &= 9 \cdot 4^n - 5 \cdot 4^n - 5(6n) + 36n + 5 \\ &= -5(4^n + 6n - 1) + 9 \cdot 4^n + 36n, \text{ en utilisant } P_n \\ &= -5(9k) + 9 \cdot 4^n + 9 \cdot (4n) = 9(-5k + 4^n + 4n) \\ &\Rightarrow \exists k' = -5k + 4^n + 4n \in \mathbb{Z} / 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'. \end{aligned}$$