Correction d'examen de rattrapage

Exo 1 : a)

1) On a $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $2\cdot0-0+0=0$, donc $F \neq \emptyset$

Soient $X=(x,y,z)$, $Y=(x',y',z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, On a :

$X \in F \Rightarrow 2x-y+z=0$, $Y \in F \Rightarrow 2x'-y'+z'=0$.

On vérifie que $X+\lambda Y \in F$:

On a : $X+\lambda Y = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$

$2(x+\lambda x')-(y+\lambda y')+(z+\lambda z') = 2x-y+z+\lambda(2x'-y'+z')$

$= 0+\lambda 0 = 0$

Ainsi F est un sous-e.v de $\mathbb{R}^3$.

2,5

2) Soit $(x,y,z) \in F$, donc $2x-y+z=0$, alors $y=2x+z$.

Ainsi $(x,y,z) = (x, 2x+z, z) = x(1,2,0)+z(0,1,1)$

d'où : $F = Vect((1,2,0),(0,1,1))$

3

Il est clair que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants donc forment une base de F.

b) 1) On a : $F = Vect((1,2,1,3),(2,0,0,1))$, et ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, donc forment une base de F

- Soit $(x,y,z,t) \in G$ donc $2x+y+z=0$ et $x-y=0$,

d'après la dernière équation, On a : $x=y$, ainsi :

$2x+x+z=0 \Rightarrow z=-3x$. Alors :

2

$(x,y,z,t) = (x,x,-3x,t) = x(1,1,-3,0)+t(0,0,0,1)$.

d'où $G = Vect((1,1,-3,0),(0,0,0,1))$ et ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, donc forment une base de G, $\dim F = \dim G = 2$.

2) Soit $(x,y,z,t) \in F \cap G$ donc : $(x,y,z,t) = \alpha(1,2,1,3) + \beta(2,0,0,1)$

$$= (\alpha + 2\beta, 2\alpha, \alpha, 3\alpha + \beta)$$

donc : $2(\alpha + 2\beta) + 2\alpha + \alpha = 0$ et $\alpha + 2\beta - 2\alpha = 2\beta - \alpha = 0$

Alors $\alpha = 2\beta$, d'où : $2(2\beta + 2\beta) + 2(2\beta) + 2\beta = 14\beta = 0$

$$\Rightarrow \beta = 0$$

Ainsi $\alpha = \beta = 0$ et donc $(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^4}$

3) On a : $F \subset \mathbb{R}^4$ et $G \subset \mathbb{R}^4$ donc $F + G \subset \mathbb{R}^4$.

De plus : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

$$= 2 + 2 - 0 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

Alors $F + G = \mathbb{R}^4$, ainsi $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

EXO 2 : 1) Il est facile de vérifier que φ est linéaire, donc la réponse est : "Vrai"

2) On a $\varphi((1,0,0)) = (2,-1) = 3(1,0) - (1,1)$.

$\varphi((0,1,1)) = (3,1) = 2(1,0) + (1,1)$.

$\varphi((0,-1,0)) = (-3,0) = -3(1,0) + 0(1,1)$

Ainsi la matrice est : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc "Vrai"

3) Soit $(x,y,z) \in \ker \varphi$ donc $\varphi((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Alors $(2x+3y, -x+z) = (0,0)$, d'où

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ -\frac{2}{3}x = y \end{cases}, \text{ ainsi :}$$

$$(x,y,z) = \left(x, -\frac{2}{3}x, x\right) = x\left(1, -\frac{2}{3}, 1\right)$$

donc $\ker\varphi = Vect((1, -\frac{2}{3}, 1))$, alors $\dim \ker\varphi = 1$ et donc la réponse est : "Vrai".

4) On a $Im\varphi = Vect(\varphi(1,0,0), \varphi((0,1,1)), \varphi((0,-1,0)))$.

De plus : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker\varphi + \dim Im\varphi$.

donc $\dim Im\varphi = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ 1,5

De même ; $(3,1)$ et $(-3,0)$ sont linéairement indépendants donc forment une base de $Im\varphi$, la réponse est : "Vrai"

5) On a : $Im\varphi \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim Im\varphi = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc $Im\varphi = \mathbb{R}^2$ et alors φ est surjective, ainsi la réponse est : "Vrai". 2