كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

رياضيات 2

السنة أولى ليسانس -جذع مشترك-

- جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة-

الأستاذة: بوكريطة خديجة

ماي 2022

قائمة المحتويات

وحدة

من خلال المحور الخاص بالتطبيقات الخطية:

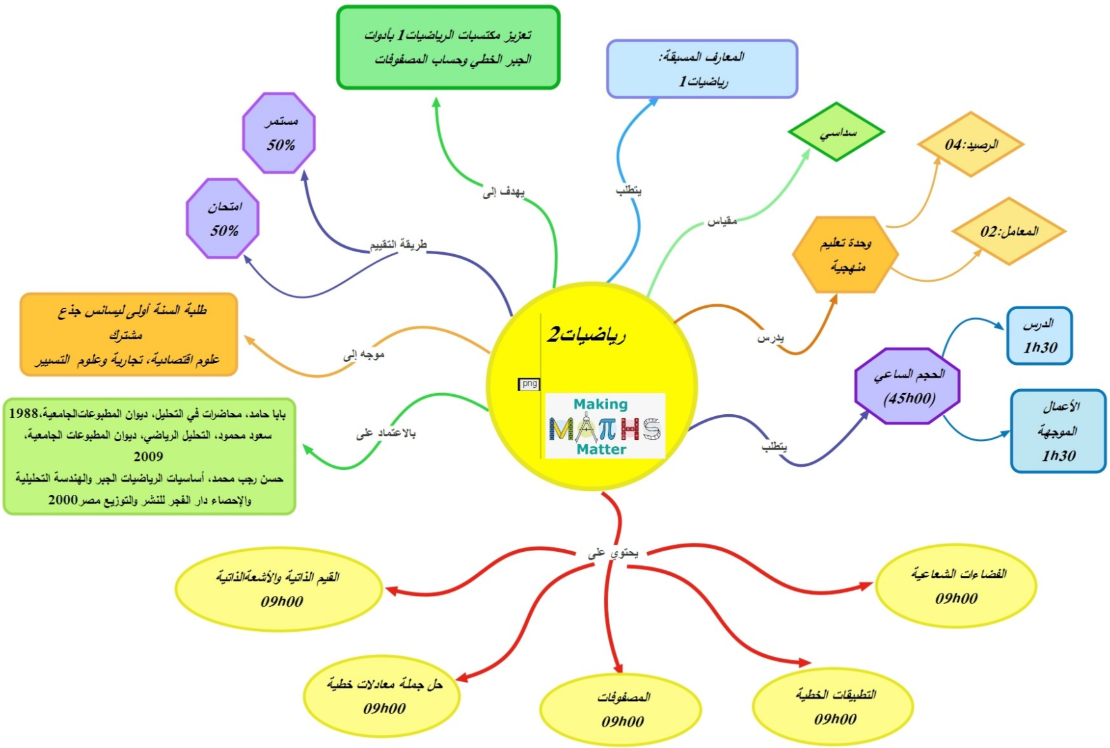
1/ يتعرف الطلاب على المفاهيم الأساسية المتعلقة بفضاء التطبيقات الخطية والعلاقة بينها.

2/ يقوم الطلاب بالتمييز بين العناصر الرئيسية للدرس وأجزائه، من خلال التفريق بين مفهوم صورة تطبيق خطي ونواة تطبيق خطي.

3/ يربط الطلاب بين مختلف المفاهيم المقدمة وتركيبها مع مفهوم بعد فضاء شعاعي ورتبة تطبيق خطي للتمكن من حل المسائل المقدمة.

4/ يتم تقييم الطلاب عن طريق تمارين شاملة تتضمن كل ما تم التطرق إليه فيما يخص التطبيقات الخطية.

مقدمة



فرنسية

يتمحور مقياس رياضيات 2 حول المفاهيم المتعلقة بجانب الجبر الخطي، ويعتبر كتكملة لجانب التحليل الذي تم التطرق إليه في مقياس رياضيات 1 والذي تم فيه اكتساب مهارة التحليل الرياضي التطبيقي، حيث يغطي هذا المقياس عدة محاور تتمثل في الفضاءات الشعاعية، التطبيقات الخطية، المصفوفات، حل جملة معادلات خطية، القيم الذاتية والأشعة الذاتية.

I الفصل الثاني: التطبيقات الخطية

آ. التطبيق الخطي:

1. تعريف 1:

ليكن E و F ف.ش على R ، نسمي تطبيق خطي، التطبيق $f : E \to F$ الذي يحقق :

$$\forall x_1, x_2 \in E \,,\; f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in K \,,\; f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

فرنسية

ينتج من هذا التعريف :

$$f(0_E) = 0_F$$
$$\forall x \in E \,,\; f(-x) = -f(x)$$

فرنسية

2. تعريف 2:

ليكن E ف.ش على K ، ولتكن $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ أشعة من E .

التطبيق $f : K^p \to E$ المعرف من أجل كل $(a_1, \ldots, a_p)$ من K^P بالشكل : $f(a_1, \ldots, a_p) = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p$

هو أيضا تطبيق خطي .

مثال

التطبيق f المعرف كما يلي : $f : R^2 \to R^3$

حيث : $(x,y) \mapsto (2x-y, x, -x+y)$ هو تطبيق خطي.

ب. فضاء التطبيقات الخطية:

1. تعريف:

F و E فضاءين منتهيي البعد $L(E , F)$

مجموعة كل التطبيقات الخطية من E في F والذي نرمز له بالرمز $L(E , F)$ هو فضاء شعاعي على K بالعمليتين + ، × المعرفتين كما يلي:

المجموع : $f+g$ حيث $\forall x\in E,(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

الجداء : λf حيث $\forall \lambda\in K,\forall x\in E,(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

إذا كان E و F منتهيي البعد فإن $L(E , F)$ منته البعد. ويكون $\dim L(E , F) =\dim E \times \dim F$

حالة خاصة:

عندما $F =R$ ، يسمى الفضاء $L(E ,F)$ بالفضاء الثنوي **dual** الذي يرمز له E^* .

$f:E\to R$ تطبيق خطي $\Leftrightarrow f\in E^*$

إذا كان E منتهي البعد فإن E^* منته البعد . ويكون $\dim E^* = \dim E$

2. تركيب تطبيقين خطيين:

وإذا كان $u : E\to E'$ و $v : E'\to E''$ تطبيقين خطيين، فإن التركيب $v\circ u : E \to E''$ هو تطبيق خطي.

ولدينا المخطط :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u"'] & E' \arrow[r, "v"] & E'' \end{tikzcd}$$

فرنسية

حيث: $\forall x\in E,(v\circ u)(x)=v(u(x))$

قضية:

E و F ف.ش على R ،

و$\{v_1,v_2, \dots\dots,v_n\}$أساس ل E ، إذا كانت $w_1,w_2, \dots\dots,w_n$ أشعة من F ،

فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f :E \to F$: يحقق $\forall i :(f(v_i)=w_i)$

- E و F ف.ش على R
  يوجد تشاكل خطي $\Leftrightarrow \dim E=\dim F$ f (تقابلي وخطي) بين E و F.
- إذا كان F ف.ش على K ، و $\dim E =n$ ، فإنه يوجد تشاكل خطي بين R^n و E.
- إذا كان f ت.خ فإن f^{-1} هو أيضا تشاكل .

3. صورة شعاع بتطبيق خطي:

يكون f تطبيق خطي من E في F إذا كانت صورة أي شعاع من الشكل $u =x_1e_1 +\dots+ x_ne_n$ من E

هي: $f(u) =f(x_1e_1 +\dots+ x_ne_n)=x_1f(e_1)+\dots\dots+x_nf(e_n)$

أي الصورة $f(E)$ هي الفضاء الجزئي المولد ب $f(e_1),\dots\dots,f(e_n)$

- إذا كانت الأشعة $x_1,\dots x_n$ أشعة مرتبطة في E فإن صورها $f(x_1),\dots, f(x_i)$ تكون أيضا مرتبطة في F .

إذا كانت الأشعة $x_1,\dots x_n$ من E مرتبطة ، فإنه توجد سلميات $\lambda_1,\lambda_g,\dots,\lambda_n$ ليست كلها معدومة ، أي يوجد على الأقل λ_{i0} غير معدوم $\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0 : i_0\in\{1,2, \dots\dots,n\}$

إذن $f (\lambda_1 x_1 +\dots+\lambda_n x_n) =\lambda_1 f (x_1) +\dots+\lambda_n f (x_n) = f (0_E) =0_F$

العبارة المعدومة $\lambda_1 f (x_1) +\dots+\lambda_n f (x_n) = f (0_E) =0_F$ تحققت مع و جود أحد المعاملات

غير معدوم ($\lambda_{i0}\neq0$) ، عموما، عكس هذه القضية، غير صحيح، إلا إذا كان f متباينا.

ب. صورة ونواة تطبيق خطي:

1. صورة فضاء جزئي بتطبيق خطي:

$f : E\to F$ تطبيق خطي.

إذا كان 'E فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ ف.ش.ج من F .

حيث $f(E')=\{y\in F : y=f(x) \;/\; x\in E'\}$

وإذا كان 'E =E فإن $f(E)$ يسمى صورة التطبيق الخطي f نرمز له $\mathrm{Im}\, f = f(E)$

حيث $f(E)=\{y\in F : y=f(x) \;/\; x\in E\}$

ملاحظة

f غامر إذا $\mathrm{Im}\, f = F$.

2. فضاء الصورة العكسية:

$f : E\to F$ تطبيق خطي.

إذا كان 'F فضاء شعاعي جزئي من F فإن $f^{-1}(F')$ ف.ش.ج من E .

لدينا: $x\in f^{-1}(F') \Leftrightarrow f(x)\in F'$

وعندما $F'=\{0_F\}$ يسمى ف.ش.ج $f^{-1}\{0\}$ نواة التطبيق f ونرمز له بالرمز $\ker f$.

$$\begin{aligned}\ker f &= f^{-1}(\{0_F\})=f^{-1}(0_F)\\ &=\{x\in E : f(x)\in\{0_F\}\}\\ &=\{x\in E : f(x)=0_F\}\end{aligned}$$

فرنسية

مثال

نعتبر التطبيق الخطي $f : R^2\to R^3$

حيث : $(x , y) \mapsto (2x - y , x + y , x)$

• تعيين $\ker f$ و $\mathrm{Im} f$

$$\ker f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\ker f \ni (x,y)=(2x-y,x+y,x)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=0\\ x+y=0\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=y=0$$

فرنسية

ومنه $\ker f=\{(0, 0\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im} f &= \langle f(e_1), f(e_2)\rangle\\ f(e_1) &= (1,0)=(2,1,1)\\ f(e_2) &= (0,1)=(-1,1,0)\\ \mathrm{Im} f &= \langle(2,1,1),(-1,1,0)\rangle\end{aligned}$$

فرنسية

ت. نظرية البعد:

1. نظرية:

E و F فضائين شعاعيين على K، و $f : E \to F$ تطبيق خطي.
إذا كان الفضاء E منته البعد ، فإن $\dim E = \dim \ker f + rgf$

2. بعد فضاء حاصل القسمة:

إذا كان E فضاء شعاعيا على K ، منته البعد، و F ف.ش.ج من E .
فإن: $\dim E/F' = \dim E - \dim F'$

3. بعد مجموع فضائين شعاعيين:

E فضاء شعاعي منته البعد ، F و G ف.ش.ج من E .
نعلم بأن $F \cap G$ و $F+G$ فضائين جزئيين من E .
لدينا $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

4. رتبة تطبيق خطي:

إذا كان $f : E \to F$ تطبيق خطي، و $Im(f)$ ف.ش.ج من F مولدة بصورة اساس من E. نلاحظ أن $Im(f)$ تملك جملة مولدة منتهية إذن هي عبارة عن فضاء شعاع منته البعد .
تعرف إذن رتبة التطبيق f والتي يرمز لها بالرمز $rang(f)$ بأنها بعد الفضاء $Im(f)$
حيث $rang(f) = \dim Im(f)$