كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

رياضيات 2

السنة أولى ليسانس -جذع مشترك-

جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة-

الأستاذة: بوكريطة خديجة

ماي 2022

قائمة المحتويات

وحدة

من خلال المحور الخاص بالفضاءات الشعاعية:

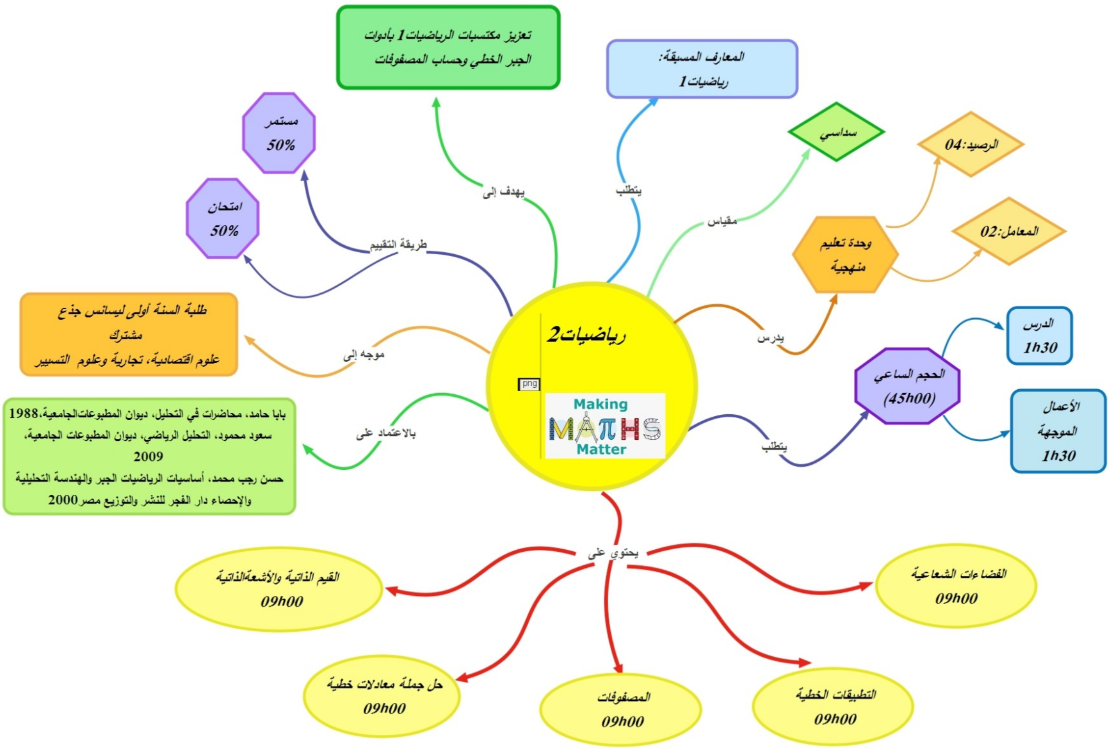
1/ يتعرف الطلاب على الخصائص الأساسية للفضاءات الشعاعية مع تحديد مختلف المفاهيم المتعلقة ببنية الفضاء الشعاعي الجزئي.

2/ يقوم الطلاب بالتمييز بين العناصر الرئيسية للدرس وأجزائه، من خلال التفريق بين كل من مفاهيم التركيبات الخطية، الارتباط الخطي والاستقلال الخطي.

3/ يربط الطلاب بين مختلف المفاهيم الأساسية المقدمة وتركيبها مع مفهوم الأساس والبعد مما يساعدهم على إيجاد الحلول للمسائل المقدمة.

4/ يتم تقييم الطلاب عن طريق تمارين شاملة تتضمن كل ما تم التطرق إليه فيما يخص الفضاءات الشعاعية.

مقدمة



فرنسية

يتمحور مقياس رياضيات 2 حول المفاهيم المتعلقة بجانب الجبر الخطي، ويعتبر كتكملة لجانب التحليل الذي تم التطرق إليه في مقياس رياضيات 1 والذي تم فيه اكتساب مهارة التحليل الرياضي التطبيقي، حيث يغطي هذا المقياس عدة محاور تتمثل في الفضاءات الشعاعية، التطبيقات الخطية، المصفوفات، حل جملة معادلات خطية، القيم الذاتية والأشعة الذاتية.

المحور الأول: الفضاءات الشعاعية

أ. الفضاءات الشعاعية على R:

1. بنية الفضاء الشعاعي:

الجمع الشعاعي "+" عملية داخلية في مجموعة الأشعة V ، وهذه العملية تزود V ببنية زمرة تبديلية، وعملية ضرب شعاع بعدد سلمي "." هي عملية خارجية في مجموعة الأشعة V . وهي تحقق:

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x + y = y + x$$

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\exists O_E \in E \quad \forall x \in E \quad x + O_E = O_E + x$$

$$\forall x \in E \quad \exists -x \in E \quad x + (-x) = (-x) + x = O_E$$

نقول عن مجموعة الأشعة V المزودة بهاتين العمليتين بأنها فضاء شعاعي على R .

2. تعريف الفضاء الشعاعي:

ليكن K حقل تبديلي، نقول عن مجموعة غير خالية E مزودة بعمليتين (+) و (.) أنها فضاء شعاعي على الحقل K (ف ش على K) إذا تحقق:

(E،+) زمرة تبديلية،

والعملية الخارجية (.) على K تحقق:

$$\forall \alpha \in K \quad \forall x,y \in E \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

$$\forall \alpha,\beta \in K \quad \forall x \in E \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

$$\forall \alpha,\beta \in K \quad \forall x \in E \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

$$\forall x \in E \qquad 1\cdot x = x$$

ملاحظة

عناصر E تسمى أشعة ويرمز لها (X,Y,Z,T,......)، بينما عناصر K تسمى سلميات ويرمز لها (α,β,δ,......).

مثال

R و R^2 هما فضاءان شعاعيان على R. وبصورة عامة ($R^*R^*.............^*R=R^n$) هو فضاء شعاعي على R.

3. الفضاء الشعاعي الجزئي

نسمي فضاء شعاعيا جزئيا (ف.ش.ج) من الفضاء الشعاعي E على الحقل K ، كل مجموعة جزئية F غير خالية من E تتحقق على نفسها بنية الفضاء الشعاعي. أو F ف. ش. جزئي من E إذا تحقق:

$$\forall \alpha \in K,\forall x \in F:\ \alpha x \in F \quad \text{و} \quad \forall x \in F,\forall y \in F:\ x+y \in F \quad \text{و} \quad (E\supset)F \neq \varnothing$$

قضية:

ليكن E فضاء شعاعي على K. و F مجموعة جزئية غير خالية من E. لدينا:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \forall x,y \in F,\ \ \alpha x+\beta y \in F \iff F \text{ ف.ش.ج من } E$$

ب. التركيبات الخطية:

1. تعريف العبارة الخطية:

ليكن E فضاء شعاعي على K. ولتكن الأشعة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ من E.

العبارة الخطية للأشعة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ ما هي إلا شعاع x من E بحيث:

$x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots\ldots+\lambda_n a_n$

2. فضاء مولد بشعاعين:

ليكن E فضاء شعاعي على K، و a ،b من E. نعتبر الفضائين الشعاعيين المولدين ب a و b .

يسمى المجموع K.a+K.b بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالمجموعة {a,b} . ونكتب:

. K.a+K.b=({a,b})I

إذا كانت ($a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$) أشعة من E، فإن كل العبارات الخطية في الأشعة ($a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$) هي فضاء جزئي من E، يسمى هذا الفضاء بالفضاء المولد بهذه الأشعة.

3. تعريف الفضاء المنته:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. و A مجموعة جزئية من E.
إن الفضاء الشعاعي المنته المولد ب A ، هو مجموع العبارات الخطية المنتهية في عناصر A ، ونرمز له ب <A> أو (A)، حيث:

$$x \in (A) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^* \\ \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \quad : \quad x = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in K \end{cases}$$

4. مجموع فضائين جزئيين:

إذا كان E فضاء شعاعي على K. و F_1 و F_2 فضائين جزئيين من E.
نعتبر المجموعة $E=F_1+F_2$ حيث:

$$Z \in E \Leftrightarrow \exists x \in F_1, \exists y \in F_2 : z = x + y$$

• إذا كان z و w من E فإنه يوجد (x_1,y_1) و (x_2,y_2) من F_1*F_2 :
$z=(x_1,y_1)$I و $w=(x_2,y_2)$I

$$z+w=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\in F_1+F_2$$

• إذا كان z من E و λ من K ، فإنه يوجد x من F_1 و y من F_2 بحيث $z=x+y$
ويكون لدينا:

$$\lambda z = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in F_1 * F_2$$

ومنه $E=F_1+F_2$ فضاء شعاعي من E.
وعندما يكون $F_1 \cap F_2=\{0\}$I يسمى ف.ش.ج F_1+F_2 بالمجموع المباشر ل F_1 و F_2 .
ونرمز له بالرمز $(F_1 \oplus F_2)$ ، ونقول أيضا أن F_1 إضافي ل F_2 في E ، أو F_1 و F_2 إضافيان في E .

ب. تمرين

ليكن في الفضاء الشعاعي R^3 المجموعة F حيث:
$F=\{(x,y,z) \in R^3 : x=y=z \}$.
- بين أن F ف.ش.ج من R^3 .

ت. الارتباط الخطي والاستقلال:

1. الارتباط الخطي:

ليكن E فضاء شعاعي على K. ولتكن الأشعة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ من E.
• تكون الأشعة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ مرتبطة خطيا ⇔ وُجد سلمي : $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ليست كلها معدومة.
بحيث : $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0_E$

2. الاستقلال الخطي :

ليكن E فضاء شعاعي على K. ولتكن الأشعة $a_1,a_2,\dots\dots,a_n$ من E.

تكون الأشعة $a_1,a_2,\dots\dots,a_n$ مستقلة خطيا إن لم تكن مرتبطة خطيا.

- الأشعة $a_1,a_2,\dots\dots,a_n$ مستقلة خطيا ⇔ من أجل كل سلمي : $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ يتحقق الاستلزام:

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0_E \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

قضية:

$a_1,a_2,\dots\dots,a_n$ أشعة من E. و F هو الفضاء المولد بهذه الأشعة.

الشرطان الآتيان متكافئين :

1. الأشعة $a_1,a_2,\dots\dots,a_n$ مستقلة خطيا.
2. كل شعاع x من F ، يُكتب كعبارة خطية وحيدة في الأشعة $a_1,a_2,\dots\dots,a_n$.

أي توجد سلميات وحيدة $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ بحيث: $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

3. تقاطع فضائين جزئيين:

إذا كان E فضاء شعاعي على K. و F_1 و F_2 فضائين جزئيين من E.

إن $F_1\cap F_2$ فضاء شعاعيا من E إذن: $F_1\cap F_2=\{x\in E, x\in F_1 \wedge x\in F_2\}$

وبصورة عامة، تقاطع عدد منته من الفضاءات الجزئية هو ف.ش.ج.

غير أن الاتحاد $F_1\cup F_2$ ليس فضاء شعاعيا على العموم.

مثال

في R^2 ، إذا اعتبرنا الفضائين الجزئيين :

$F_1=\{(x,y)\in R^2, x=0\}; F_2=\{(x,y)\in R^2, y=0\}$

واخترنا على سبيل المثال الشعاعين (0,1) و (1,0) من $F_1\cup F_2$ ، فسيكون مجموعهما خارج هذا الاتحاد.

وبالتالي $F_1\cup F_2$ ليس ف.ش.ج من R^2.

ث. تمرين

[15 ص 1 حل رقم]

هل الأشعة (2,2,1) ، (2,0,1) ، (2,0,0) :

- ○ مرتبطة خطيا
- ○ مستقلة خطيا

ج. الأساس والبعد:

1. تعريف الأساس:

E فضاء شعاعي على K، و $B\subset E$.

نقول عن B أنه أساس لـ E إذا كانت B تولد E و B مجموعة مستقلة خطيا، وعندئذ كل شعاع x من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية في أشعة B.

الكتابة الآتية وحيدة: $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

تسمى السلميات $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ بمركبات الشعاع x في الأساس B ونكتب:

$X_{|B}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

مثال

في الفضاء R^3 المزود بالأساس القانوني $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ ، تكون الأشعة :

e_1 و e_1+e_2 و $e_1+e_2+e_3$ تشكل أساسا آخر لـ R^3.

2. بعد فضاء شعاعي:

E فضاء شعاعي على K ، و card B يمثل عدد عناصر المجموعة B.

إذا كان B_1 و B_2 أساسين لـ E، فإن $cardB_1=cardB_2$

إذا كان B أساسا لـ E ، فإن card B يسمى بعد E ، ونرمز له بـ dim E .

- E فضاء شعاعي بعده n يكافئ E يقبل أساسا B و $\dim E=card\ B=n$
- كل فضاء جزئي F من E ، يكون بعده منته ويحقق $\dim F\le \dim E$

ولدينا : $\dim E=\dim F$ $E=F$

3. تعريف الرتبة:

E فضاء شعاعي بعده n ، و $v_1,v_2,\cdots,v_n$ أشعة من E ، نرمز بـ F للفضاء المولد بهذه الأشعة.

يسمى العدد الأعظمي من الأشعة المستقلة خطيا المأخوذة من بين الأشعة $v_1,v_2,\cdots,v_n$ رتبة $\{v_1,\cdots,v_n\}$ ، ونكتب: $r=rgF=rg\{v_1,\cdots,v_n\}$

إذا كان $r=rgF$ ، فإنه يكون لدينا : $r\le n$ و $r\le p$.

حالة خاصة:

عندما تكون الأشعة $v_1,v_2,\cdots,v_n$ مستقلة خطيا فإن $rgF=\dim F=n$.

ج. تمرين

[15 ص 2 حل رقم]

نعتبر الفضاء الجزئي : $A=\{(x,y,z)\in R^3 : x=2z\}$

- أساس الفضاء A هو:

- ○ $\{(2,0,1)\}$
- ○ $\{(2,0,1),(0,1,0)\}$
- ○ $\{(1,2)\}$

ح. سلسلة الأعمال الموجهة

السلسلة رقم 01: الفضاءات الشعاعية

serie1.docx

حل التمارين

< 1 (ص 12)

- ○ مرتبطة خطيا
- ◉ مستقلة خطيا

< 2 (ص 13)

- ○ {(2,0,1)}
- ◉ {(2,0,1) ،(0,1,0)}
- ○ {(1,2)}