Chapitre 4 : Caractéristiques géométriques des sections planes

Dr. BOUARICHA Leyla

Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Technologie

émail : l.bouaricha@univ-dbkm.dz

2.0 Juin 2022

Table des matières

Pré-requis

Pour pouvoir suivre ce chapitre, l'étudiant a besoin d'avoir des connaissances sur :

Les caractéristiques géométriques des sections usuelles :

- Aire
- Coordonnées du centre de gravité

Introduction

Pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Pour toutes les autres sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre

jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre aux caractéristiques suivantes :

- Aire d'une section
- Moment statique par rapport à une droite (ou un axe)
- Centre de gravité
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite (ou un axe)
- Moment de résistance

Aire d'une section

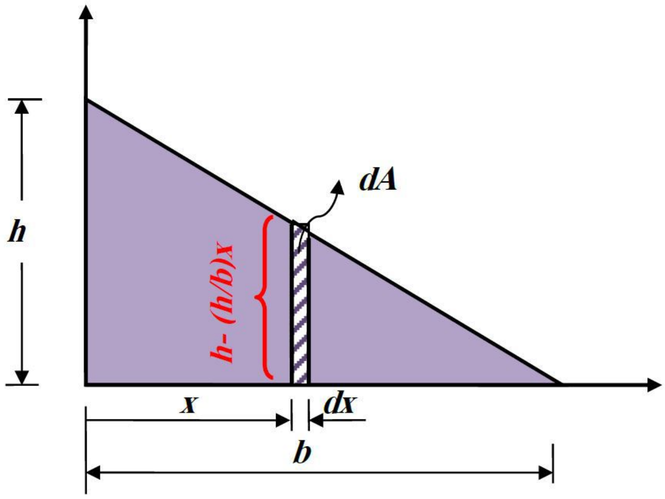
Par définition l'aire A d'une section est définie par l'intégrale :

$$A = \int_A dA \qquad (4.1)$$

Exemple 4.1

Exemple

Calculer l'aire de la surface triangulaire plane montrée par la figure ci-dessous.



Considérons une surface élémentaire telle que :

$$dA = h(1 - x/b)dx \rightarrow A = \int_A dA = \int_0^b h(1 - x/b)dx = \frac{bh}{2}$$

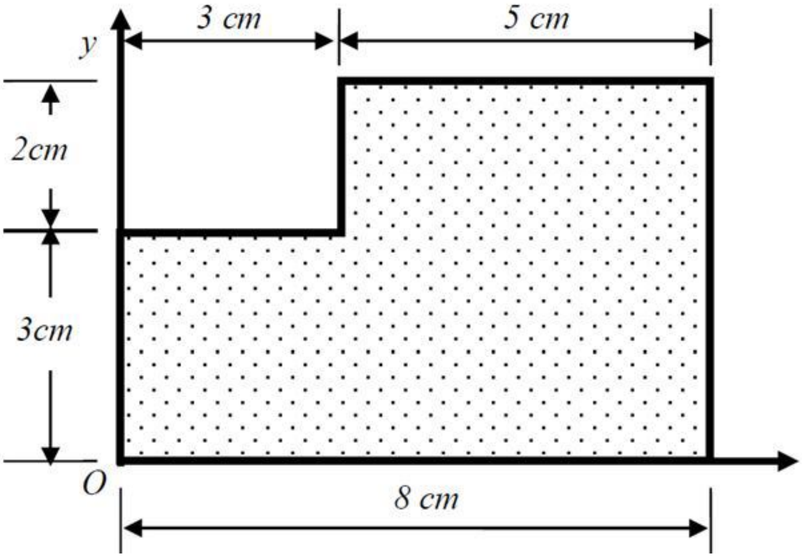
Remarque

Si la section est composée, nous la décomposons en sections usuelles et l'aire est calculée comme :

$$A = \sum_{(i=1)}^{n} A_i$$

Exercice

Calculer l'aire (en cm^2) de de la section plane montrée par la figure ci-dessous.



Moment statique

Le moment statique S d'une section par rapport à un axe ox ou oy (Fig. 4.1) est donné par l'une des expressions suivantes :

$$S_X = \int_A y dA \qquad (4.2)$$

$$S_Y = \int_A x dA \qquad (4.3)$$

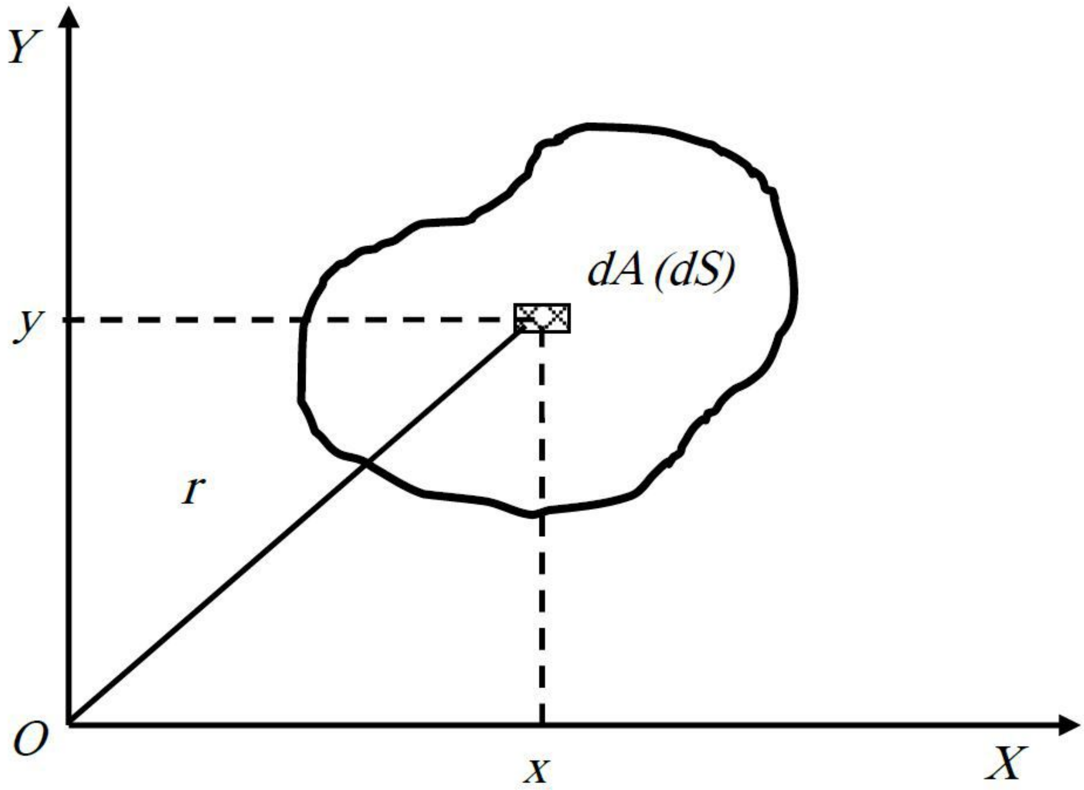


Fig. 4.1- Section plane.

Si on procède à des translations parallèlement aux axes ox et oy, les moments statiques changent. Soit la section montrée par la figure (4.2) telle que S_X, S_Y, A sont connus et on se propose de déterminer S_X' et S_Y'.

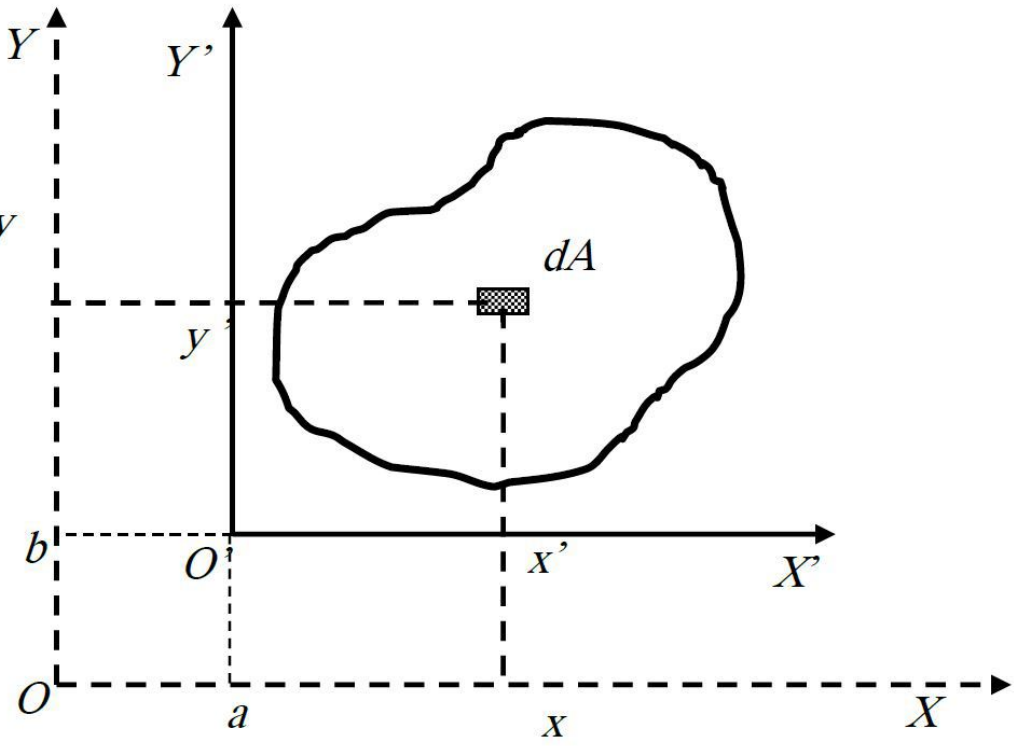


Fig. 4.2- Translation des axes.

De la figure (4.2), on a:

x' = x – a ; y' = y – b

Par définition, on a:

$$S_{X'} = \int_A y'\,dA = \int_A (y-b)\,dA$$

$$S_{Y'} = \int_A X'\,dA = \int_A (x-a)\,dA$$

d'où:

$$S_{X'} = S_X - b.A \qquad (4.4)$$

$$S_{Y'} = S_Y - a.A \qquad (4.5)$$

Centre de gravité

On peut choisir a et b de sorte que S_X' et S_Y' soient nuls, c-à-d :

$$a=\frac{S_Y}{A}\,;\,b=\frac{S_X}{A}$$

- l'axe pour lequel le moment statique est nul s'appelle axe central

- le point d'intersection de deux axes centraux s'appelle centre de gravité d'une section.

Ainsi, les coordonnées du centre de gravité d'une section s'écrivent :

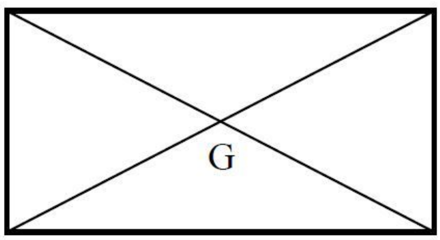
$$x_G = S_Y/A \quad ; \quad y_G = S_X/A \qquad (4.6)$$

Définition

Le centre de gravité G d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul.

On peut dire que le moment statique d'une section est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité G et l'axe.

Les figures (4.3) et (4.4) montrent des exemples de positions de centres de gravité.



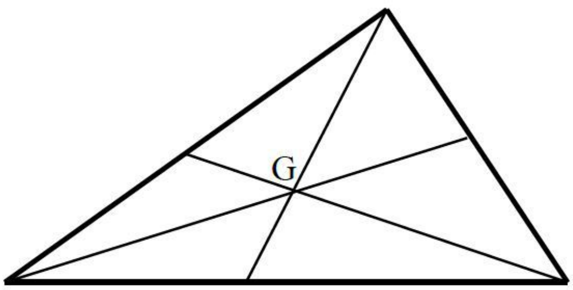


Fig. 4.3- Aire rectangulaire. Fig. 4.4- Aire triangulaire.

Remarque

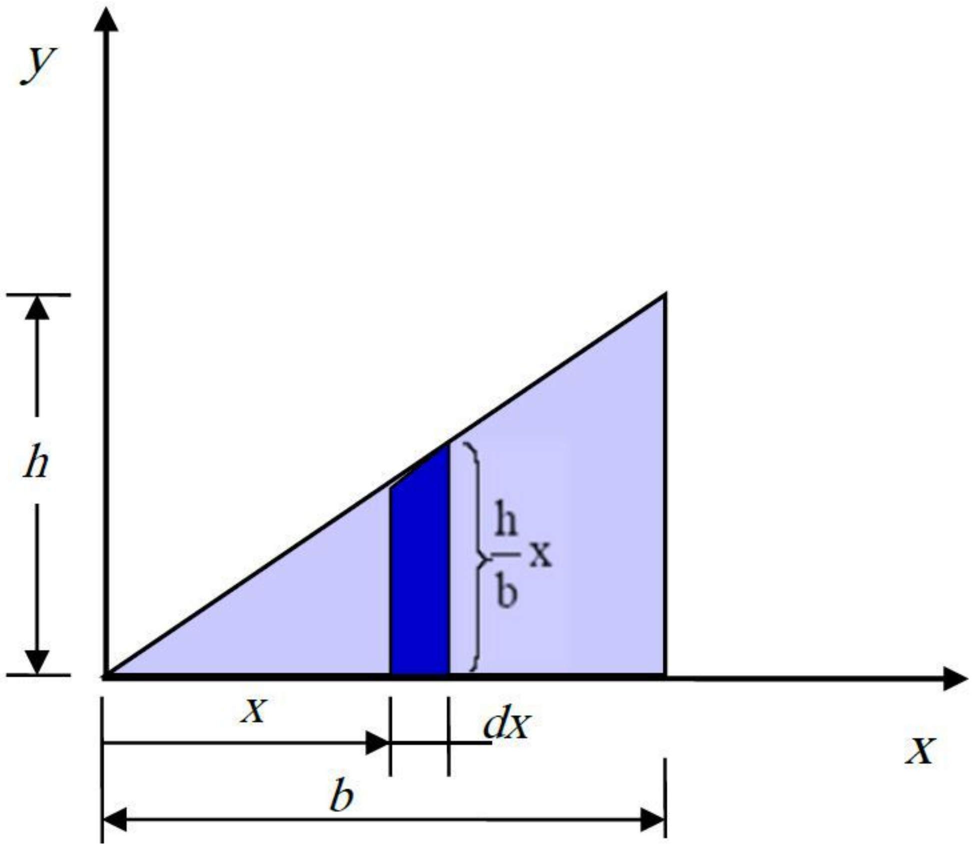
Pour une section composée, les coordonnées du centre de gravité sont données par les expressions

$$S_x = \Sigma y_{Gi}.A_i \; ; \; i = 1,\, n \qquad (4.7)$$

$$S_y = \Sigma x_{Gi}.A_i \; ; \; i = 1,\, n \qquad (4.8)$$

• Exemple 4.3 *Exemple*

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section triangulaire ci-dessous.



• Solution

$$X_G = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x\left(\frac{h}{b}x\,dx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}x\,dx}$$

D'où

$$X_G = \frac{2}{3}b$$

$$Y_G = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}x\right)\left(\frac{h}{b}x\,dx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}x\,dx}$$

D'où

$$Y_G = \frac{1}{3}h$$

Méthode

Si la section possède un axe de symétrie, le centre de gravité G est situé sur cet axe. A défaut d'axes de symétrie on procède à:

- Choisir un référenciel (O,x,y)

- Calculer le moment statique S de la section par rapport aux axes du référentiel

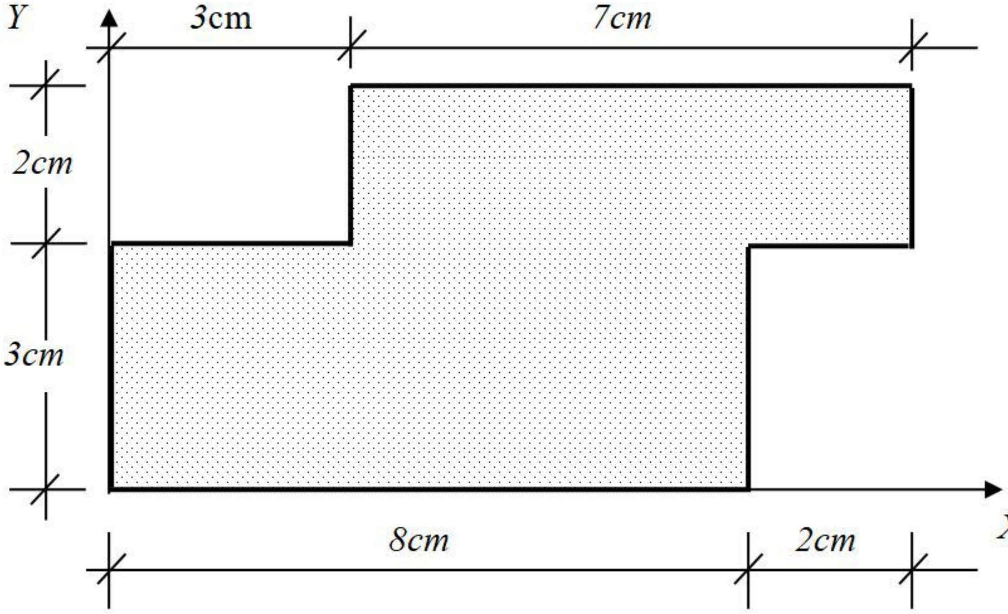
- Calculer l'aire totale de la section

- Utiliser la propriété du moment statique $S_Y = X_G .A$; $S_X = Y_G .A$

Exercice : Choisir la bonne réponse

VII

Les coordonnées du centre de gravité et les moments statiques de la section plane suivante sont :



- ☐ $S_X = 92\ cm^3$ et $S_Y = 187\ cm^3$
- ☐ $S_X = 187\ cm^3$ et $S_Y = 92\ cm^3$
- ☐ $X_G = 2{,}4$ cm et $Y_G = 4{,}9$ cm
- ☐ $X_G = 4{,}9$ cm et $Y_G = 2{,}4$ cm

Moment d'inertie

VIII

1. Moment quadratique d'une section

Définition

On définit le moment d'inertie ou moment quadratique d'une section comme le degré de résistance de cette section aux efforts extérieurs appliqués, en tenant compte de la forme de cette section.

Par définition, les intégrales :

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad (4.9)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \qquad (4.10)$$

S'appellent moments d'inertie de la section A par rapport aux axes ox et oy, respectivement, conformément à la figure 4.1. Ces expressions sont déduites de la définition suivante.

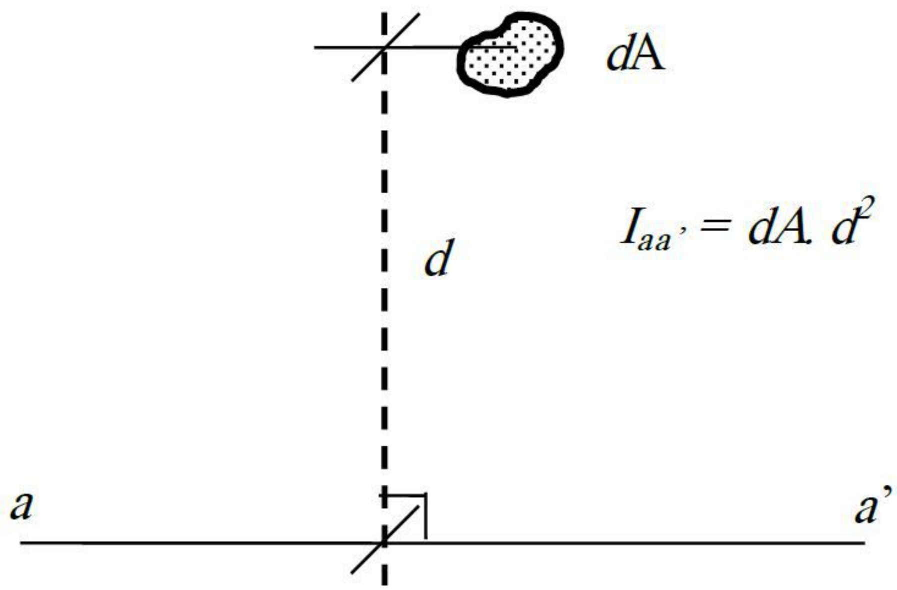


Fig. 4.5 Moment quadratique d'une section.

Le moment d'inertie d'une surface infiniment petite par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe. Il est toujours positif et s'exprime en m^4(cm^4, mm^4).

L'intégrale:

$$I_{xy} = \int_A xydA \qquad (4.11)$$

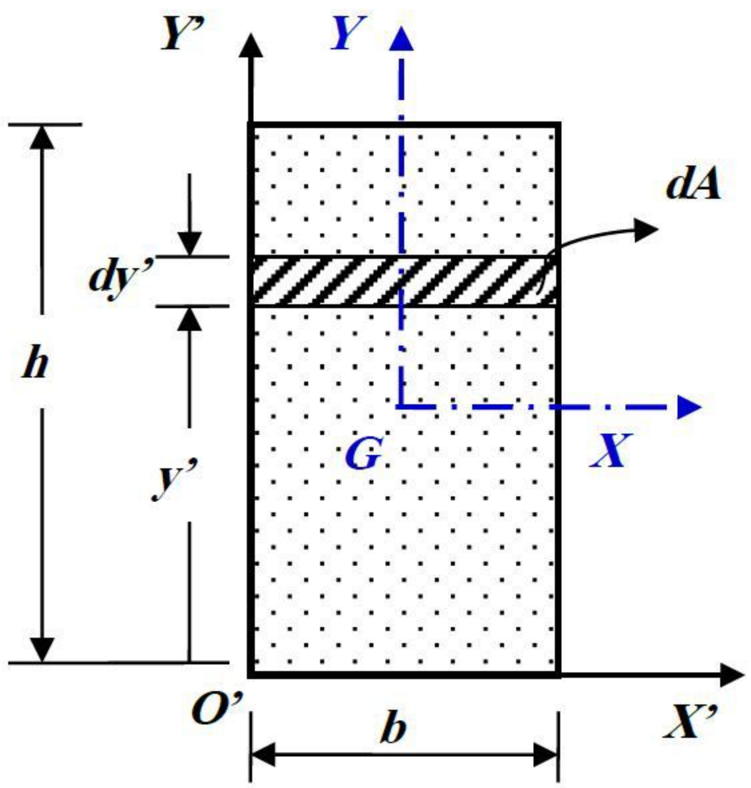
S'appelle moment centrifuge ou produit d'inertie de la section A par rapport au système xoy.

Remarque

Les moments quadratiques I_x et I_y sont toujours positifs, tandis que le moment produit I_{xy} peut être positif, négatif ou nul.

Exemple

Calculer les moments quadratiques par rapport aux axes o'x' et o'y' et le moment produit pour le rectangle montré par la figure suivante.



- **Solution**

$$I_{x'} = \int_A y'^2 \, dA$$

$$I_{x'} = \int_0^H y'^2 \, b.dy' = \frac{bh^3}{3}$$

De la même manière

$$I_{y'} = \int_A x'^2 \, dA = \frac{b^3 h}{3}$$

et

$$I_{x'y'} = \int_A x'.y'^2 \, dA$$

$$I_{x'y'} = \int_0^H \int_0^B x'.y'.dx'.dy' = \frac{b^2 h^2}{4}$$

2. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire de la section montrée par la figure 4.1 est donné par la relation :

$$I_P = \int_A r^2 dA \qquad (4.12)$$

Avec

$r^2 = x^2 + y^2$

$$I_P = I_x + I_y \qquad (4.13)$$

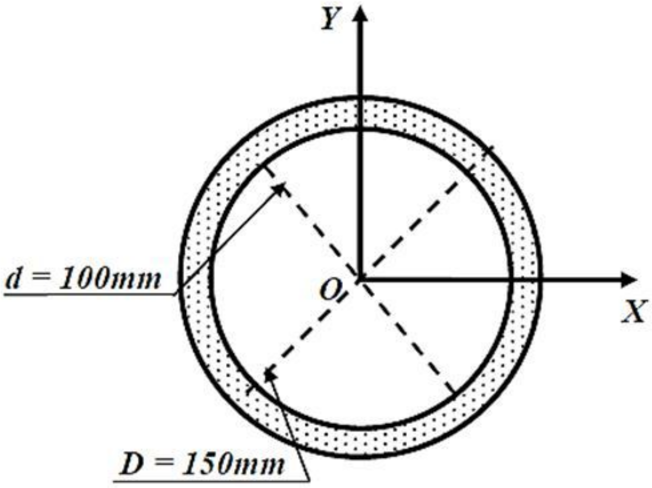
Le moment d'inertie polaire est toujours positif et n'est jamais nul.

Fondamental

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

Exemple

Calculer, analytiquement, le moment quadratique polaire I_O de la section S représentée sur la figure ci-contre.



- **Solution**

$$I_O = \int_A r^2 \ dA = \int_A r^2 \ (r\, dr. d\theta) = \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I_O = \left[\frac{R^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} \times [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi\left[\frac{R_1^4}{4} - \frac{R_2^4}{4}\right] = 2\pi\left[\frac{75^4}{4} - \frac{50^4}{4}\right] = 3.99 \ \times 10^7 mm^4$$

Variations des moments d'inertie

IX

1. Translation des axes

Soit une section A, ses moments d'inertie dans le système xoy: I_x, I_y, I_{xy} sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section A dans le système x'o'y' en procédant aux translations des axes ox et oy conformément à la figure 4.6.

x' = x + a ; y' = y + b

$$I_{x'} = \int_A y'^2\, dA = \int_A (y+b)^2\, dA$$

$$= \int_A y^2 dA + 2b\int_A y dA + b^2 \int_A dA$$

D'où

$$I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2 A \qquad (4.14)$$

On suit le même raisonnement pour Iy' et Ix'y'

Si le point O coïncide avec le centre de gravité G, les moments statiques S_x et S_y deviennent nuls et on a:

$$I_{x'} = I_x + b^2 A \qquad (4.15)$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 A \qquad (4.16)$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + abA \qquad (4.17)$$

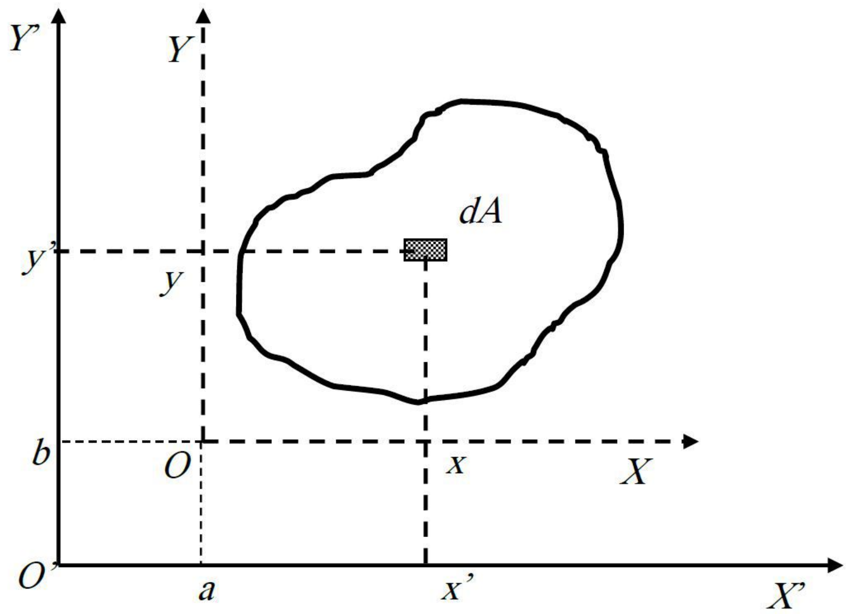


Fig. 4.6 Moment d'inertie d'une section et translation des axes.

• Théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe quelconque Δ est égal au moment d'inertie de la section par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à Δ augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + d^2 A \qquad (4.18)$$

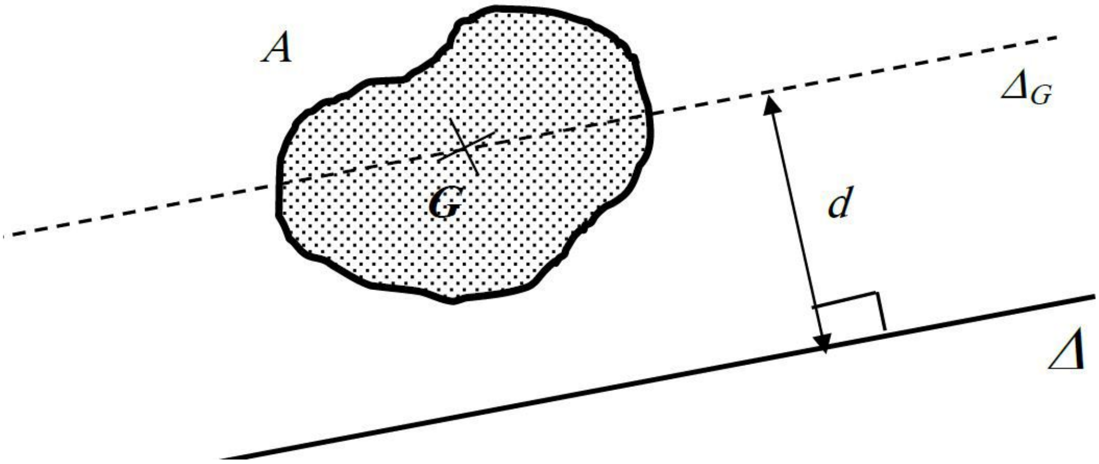
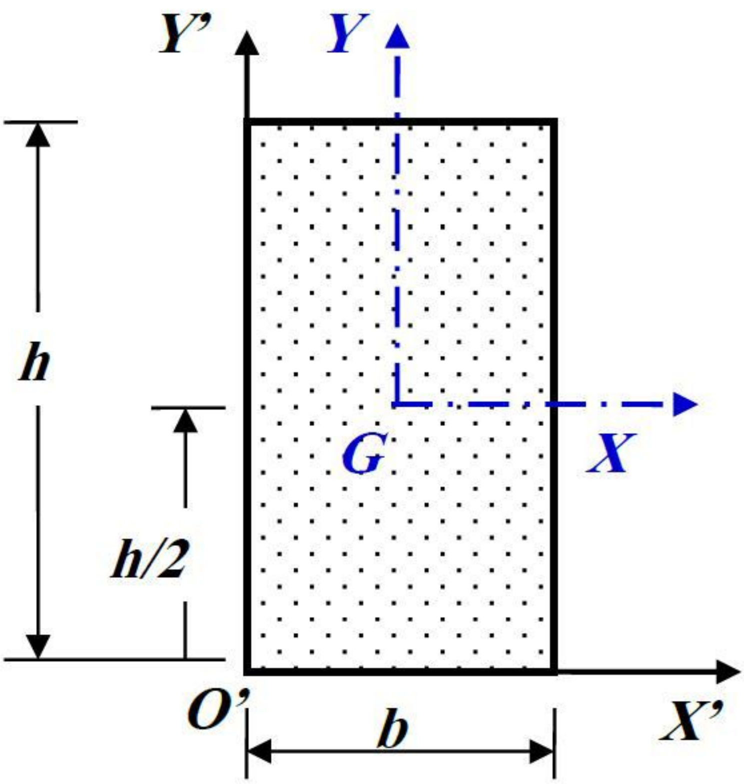


Fig. 4.7- Schématisation du théorème de Huygens.

Exemple

Déterminer les moments d'inertie par rapport au système xOy pour le rectangle montré par la figure ci-dessous.



• **Solution**

De la relation de Huygens on écrit:

$$I_x = I_{x'} - d^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

Et $I_y = I_{y'} - d^2 A$

$$= \frac{b^3 h}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{b^3 h}{12}$$

De même

$$I_{xy} = I_{x'y'} - abA = \frac{b^2h^2}{4} - \frac{b}{2}\frac{h}{2}bh = 0$$

I_{xy} et $I_{x'y'}$ sont nul car les axes x et y sont centraux.

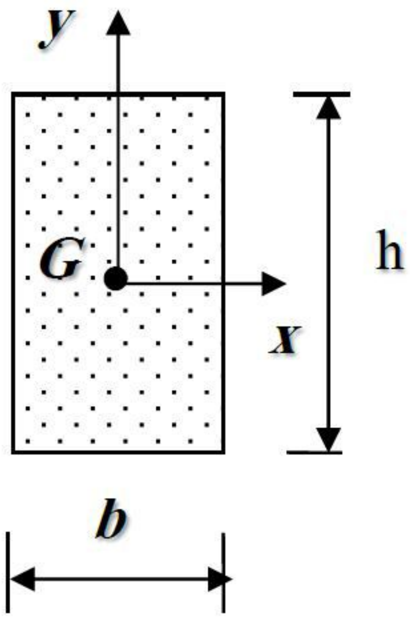
2. Rayon de giration

Le rayon de giration d'une surface A selon l'axe x ou l'axe y est défini par :

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ou \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Exemple

Calculer les rayons de giration de la surface rectangulaire montrée par la figure suivante :



- **solution**

  Les rayons de giration sont :

$$i_x = \sqrt{\frac{\left(bh^3/12\right)}{bh}} \approx 0{,}3h \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{\left(b^3h/12\right)}{bh}} \approx 0{,}3b$$

Conclusion

Dans ce chapitre, les caractéristiques géométriques des sections planes à manipuler dans le dimensionnement des éléments d'une structure sont présentées avec des exemples illustratifs. Ce chapitre est accompagné de deux annexes. Dans la première annexe, les caractéristiques (aire, coordonnées du centre de gravité et moments quadratiques centraux) pour des sections usuelles sont données. Dans la deuxième annexe, on a présenté sous forme d'un tableau les étapes à suivre pour déterminer les moments d'inertie centraux pour des sections composées en procédant par décomposition en sections usuelles.