Université Djilali BOUNAAÂMA-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Niveau : 1ière année LMD
Année : 2021-2022
Matière : Algèbre 2

Examen final

Mer 01-06-2022 - Durée : 1h

Questions de cours : (6 pts) (Interrogation 2)

Voir le cours

Soient $\mathbb{k}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et B, B' deux bases de E.

(2) 1. Rappeler la définition de sous-espace vectoriel F de E.
(2) 2. Montrer que si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $V_1 \cap V_2$ est aussi un sous espace vectoriel de E.
(2) 3. Rappeler la définition de la matrice de passage P de la base B à la base B'.

Exercice 1 : (14 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2z, y, y + z)$$

(1) 1. Montrer que f est linéaire.
(0,75) 2. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ où $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
(1,[illegible]) 3. Donner la matrice A_f de f dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.
(1) 4. Déterminer la matrice A_{f^2} de $f \circ f$ dans la base canonique.
5. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ et leurs dimensions. f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
(1) (1) (0,25)+(0,25) (0,5) (0,5)
(0,5) 6. Donner le théorème de rang et l'appliquer à f.

On pose $e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (1,1,0)$ et $e'_3 = (1,1,1)$.

(1) 1. Montrer que $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(1) 2. Trouver la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'.
(1,25) 3. Déterminer la matrice de f dans la base B'.

Soit A la matrice donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5) 1. Calculer A^2 et écrire le résultat en fonction de A et de I_3.
(1,5) 2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

EXO 1:

1- $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z')\in\mathbb{R}^3,\ \underbrace{f((x,y,z)+(x',y',z'))}_{①} \overset{?}{=} f(x,y,z)+f(x',y',z')$

$① = f(x+x', y+y', z+z') = (x+x'+2z+2z', y+y', y+y'+z+z')$

$= (x+2z, y, y+z) + (x'+2z', y', y'+z') = f(x,y,z) + f(x',y',z')$

• $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \forall\lambda\in\mathbb{R},\ f(\lambda(x,y,z)) \overset{?}{=} \lambda f(x,y,z)$

$f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + 2\lambda z, \lambda y, \lambda y + \lambda z)$

$\therefore\ = \lambda f(x,y,z)$ d'où f est linéaire

2)- $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,1)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (2,0,1)$

3)- $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4)- comme $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A_{f^2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5)- $\ker f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x+2z, y, y+z) = 0\}$ (*)

$(*) \Rightarrow \begin{cases} x+2z = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 0 \\ y+z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$ d'où $\ker f = \{(0,0,0)\}$

$\dim \ker f = 0 \Rightarrow f$ est injective

$\mathrm{Im} f = \{f(x,y,z) / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\} = \{(x+2z, y, y+z) / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$= \{x\underbrace{(1,0,0)}_{u} + y\underbrace{(0,1,1)}_{v} + z\underbrace{(2,0,1)}_{w} / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

d'où $\mathrm{Im} f = \langle\{u,v,w\}\rangle$ et comme $\{u,v,w\}$ est libre alors $\{u,v,w\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$ et $\dim \mathrm{Im} f = 3$

donc $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$ alors $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$

d'où f est surjective.

6) Théorème du rang : $\underbrace{\dim \ker f}_{0} + \underbrace{\dim \mathrm{Im} f}_{3} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3}$

3

7). comme $\operatorname{card} B' = \dim \mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que B' est libre on pose $\forall \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\lambda(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \lambda = 0 \\ \beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta' \text{ est libre}$$

$\Rightarrow \beta'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

8). $e'_1 = (1,0,0) = e_1$

$e'_2 = (1,1,0) = e_1 + e_2$

$e'_3 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$

d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9). $f(e'_1) = (1,0,0) = e'_1$

$f(e'_2) = (1,1,1) = e'_3$

$f(e'_3) = (3,1,2) = 2e'_1 - e'_2 + 2e'_3$

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

~~Exercice 2~~ : 3pts

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$

2) On a $A^2 = A + 2I \Leftrightarrow A^2 - A - 2I = 0$

$\Leftrightarrow A(A - I) = 2I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}(A - I)\right) = I$

$\Rightarrow$ A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$