Géométrie différentielle

Solution de l'examen

Exercice 1:

$\mathrm{Jf}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$ ………………………………………….**(1 point)**

$|\mathrm{Jf}(x,y,z)| = 4z(x^2 + y^2)$ ……………………………………………**(0.5 point)**

$4z(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $(x,y) = (0,0)$…………………………..**(0.5 point)**

$z \neq 0$ et $(x,y) \neq (0,0) \Longrightarrow rg_{(x,y,z)}f = 3$ …………………………… **(0.75 point)**

$(x,y) \neq (0,0) \Longrightarrow rg_{(x,y,0)}f = 2$ ……………………………………… **(0.75 point)**

$z \neq 0 \Longrightarrow rg_{(0,0,z)}f = 1$ ……………………………….………………… **(0.75 point)**

$rg_{(0,0,0)}f = 0$ ………………………………………………..……………. **(0.75 point)**

Exercice 2 :

$Jf(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ………………………….……………………………..**(1 point)**

$rg_x f = 1$ alors f immersion sur $\mathbb{R}$ ……………….……………………….**(1 point)**

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto (x, e^x + y)$$ …………………..**(1 point)**

$Jh(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$ ………………………….…………………………..**(1 point)**

$|Jh(x,y)| = 1 \neq 0$ ………………………….……………………………..**(1 point)**

Donc $d_{(x,y)}h$ est inversible $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ …….………………………..**(0.5 point)**

D'après le théorème d'inversion globale h est un difféomorphisme globale **(0.5 point)**

$$h^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto (x, y - e^x)$$ …………………..**(0.5 point)**

Si on pose $g = h^{-1}$ on obtient $(g \circ f)(x) = (x, 0)$ ………………………..**(0.5 point)**

Exercice 3 :

$f(x,y,z) = xy + xz + 2x + 2y - z$ ……..……………………………..**(1 point)**

$V = f^{-1}(0)$ ………………………….……………………………..**(1 point)**

$Jf(x,y,z) = (y+z+2, x+2, x-1)$ ……………………………..…..**(1 point)**

$x+2$ et $x-1$ ne peut pas être nulles en même temps donc $rg_{(x,y,z)}f = 1$

et f est une submersion …………………………..…………………..…..**(1 point)**

donc V est une sous variété de dimension 2 ……..…………………..…..**(1 point)**

$T_{(1,-1,2)}V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, d_{(1,-1,2)}f(x,y,z) = 0\right\}$ ………………..…..**(1 point)**

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (3,3,0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\right\}$$ ……………..…………..…..**(1 point)**

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0\}$$ ………..………..……………..…..**(1 point)**