(1)

Correction (Examen 26/05/2022)

$$(\gamma)\ \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

1. $\left(x'(t), y'(t)\right) = \left(2 + 2t, 2 + \dfrac{2}{t^3}\right)$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Tableau des variations:

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$0 \Vert 0$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

2. la Courbe (γ) possède un seul point singulier $A = M(-1)$ car $\left(x'(-1), y'(-1)\right) = (0, 0)$.

$A = (-1, -3)$

. l'équation de la tangente au point A:

On a $\left(x''(t), y''(t)\right) = \left(2, -\dfrac{6}{t^4}\right)$

d'où $\left(x''(-1), y''(-1)\right) = (2, -6)$.

Alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la Tangente (T_A).

$$(x, y) \in (T_A) \iff \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y+3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -3x - y - 6 = 0.$$

3. la nature du point A: On a $\left(x''(-1), y''(-1)\right) \neq (0,0)$ donc $\boxed{p=2}$ et $\left(x^{(3)}(-1), y^{(3)}(-1)\right) = (0, -24)$ de plus $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas Colinéaires $\Rightarrow \boxed{q=3}$. le point A est un point de rebroussement 1ère esp

4. les branches infinies de (γ) en $-\infty$, $+\infty$, et 0.

On a $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$, donc, il faut voir la limite du rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$.

$\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0 \Rightarrow (\gamma)$ admet une branche parabolique de direction (Ox) lorsque $t \to \pm\infty$.

D'autre part, on a $\lim\limits_{t \to 0} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} y(t) = +\infty$, d'où (γ) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

5. la relation relative de la courbe (γ) et la droite asymptote verticale revient d'étudier le signe de $x(t)$.

t	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
$x(t)$	$+$ 0	$-$	$+$
la Position	la Courbe (γ) est à droite de l'asymptote	(γ) est à gauche de l'asymptote	la Courbe (γ) est à droite de l'asymptote

6. pour trouver les points multiples de (γ), on cherche les couples (t, u) de $\mathbb{R}^*$ tels que $t > u$ et $M(t) = M(u)$ c-à-d $\begin{cases} 2t + t^2 = 2u + u^2 \\ 2t - \frac{1}{2t^2} = 2u - \frac{1}{2u^2} \end{cases}$

d'après les simplifications, on trouve $\begin{cases} t + u = -2 \\ \frac{t+u}{t^2u^2} = -2 \end{cases}$

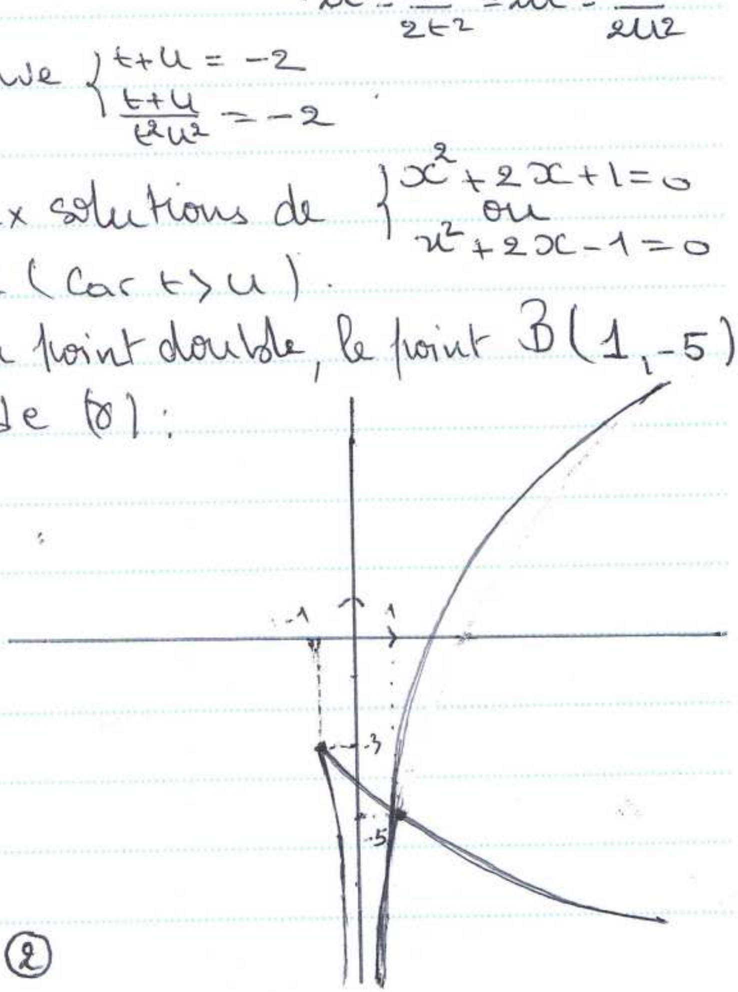
Posons $S = t + u$ et $P = tu$

il vient que t et u sont les deux solutions de $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$

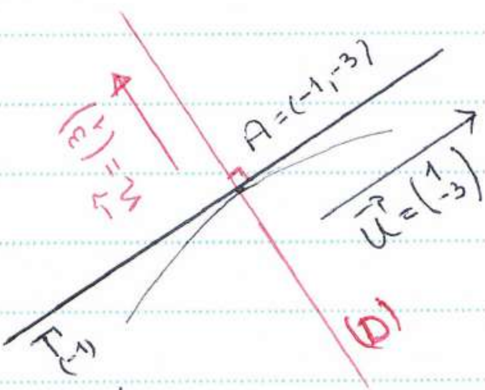
Donc $t = -1 + \sqrt{2}$ et $u = -1 - \sqrt{2}$ (car $t > u$).

Cela montre que (γ) admet un point double, le point $B(1, -5)$

7. représentation graphique de (γ) :



8. La perpendiculaire de la tangente au point $M(-1) = (-1, -3)$ est dirigée par le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de la tangente $T_{(-1)}$



Donc,

$$M(x, y) \in (D) \iff \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y+3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff x - 3y - 8 = 0$$

9. Pour voir s'il y a des points d'intersections entre la courbe (γ) et la droite d'équation $y = x$, nous vétifions si l'equations $y(t) = x(t)$ possede des solutions dans $\mathbb{R}^*$ c-à-d $2t + t^2 = 2t - \frac{1}{t^2}$.
il vient donc que $t^4 = -1$ ce qui impossible.
D'où $(\gamma) \cap (\Delta') = \phi \mid (\Delta'): y = x$.

10. L'expression de y en fonction de x lossque $t > 0$:
On remarque que si $t > 0$ alors $x > 0$
Donc l'équation $t^2 + 2t - x = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_+^*$ car $\Delta = 4 + 4x > 0$.
les solutions sont :

$$t_1 = -1 - \sqrt{1+x} < 0 \quad (t_1 \notin \mathbb{R}_+^*)$$

$$t_2 = -1 + \sqrt{1+x} \geq 0$$

D'où $y = -2 + 2\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{(-1+\sqrt{1+x})^2}$