التمرين 03 :

$\varphi = f(K.L) = 3K + 5L + 6KL$

$P_L = 3 \quad P_K = 5$

1- المسار الأمثل للتطور:

$$\frac{P_m P_L}{P_m P_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{5+6K}{3+6L} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 25 + 30K = 9 + 18L$$

$$\Rightarrow 30K = 18L - 16$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{3}{5}L - \frac{8}{15}}$$

2- إذا كان مستوى الإنتاج المرجو يساوي 100 :

$$\begin{cases} \varphi = 100 = 3K + 5L + 6KL \quad \ldots (1) \\ K = \frac{3}{5}L - \frac{8}{15} \quad \ldots (2) \end{cases}$$

باستراتيجية المنتج تدنية التكاليف تحت قيد الإنتاج

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow K = \frac{100 - 5L}{3+6L} \\ (2) \Rightarrow K = \frac{3}{5}L - \frac{8}{15} \end{cases}$$

بحل المعادلة (1) و (2) نجد أن التوليفة الأقل تكلفة هي $(L,K) = (4,84 ; 2,37)$ والتي يتضح باستخدامها لصاحب المؤسسة.

3- نحسب ميل منحنى تساوي الإنتاج عن طريق إيجاد معادلته:

$$100 = 3K + 5L + 6KL \Rightarrow \boxed{K = \frac{100 - 5L}{3+6L}}$$

ومنه القيمة المطلقة للميل عند نقطة التوازن تساوي

$$\frac{dK}{dL} = \frac{-5(3+6L) - (100-5L)6}{(3+6L)^2} = \left| \frac{-615}{(3+6L)^2} \right| = 0,6$$

أما السعر النسبي للعمل يساوي $\frac{P_L}{P_K} = \frac{3}{5} = 0,6$

إذن ميل منحنى تساوي الإنتاج عند التوازن يساوي ميل خط الميزانية (السعر النسبي للعمل).

- إن الميل $\frac{dK}{dL}$ يعبر عن الميل الحدي للإحلال والقيمة 0,6 تعني أن المنتج يكون مستعد للتنازل عن 0,6 وحدة من K مقابل الحصول على وحدة إضافية من العمل حتى تبقى مؤسسة عند نفس مستوى الإنتاج.

4- دوال الكلف: نستخدم مساهمة الشروط الأولى للتعظيم Π

$$\Pi = RT - CT = P_x \varphi_x - P_L L - P_K K$$

$$= P_x(3K + 5L + 6KL) - P_L L - P_K K$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial L} = 5P_x + 6P_x K - P_L = 0 \quad \ldots (1) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 3P_x + 6P_x L - P_K = 0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

من معادلة (1) نستخرج دالة الكلف على رأس المال K:

$$K = \frac{P_L - 5P_x}{6P_x} \Rightarrow \boxed{\frac{P_L}{6P_x} - \frac{5}{6} = K}$$

من معادلة (2) نستخرج دالة الكلف على العمل:

$$L = \frac{P_K - 3P_x}{6P_x} = \frac{P_K}{6P_x} - 1/2$$

$$\boxed{L = \frac{P_K}{6P_x} - 1/2}$$

التمرين 04: $\varphi = f(L,K) = K^2 - KL + 2L^2$

1- درجة تجانس الدالة:

$f(tL, tK) = (tK)^2 - KtLt + 2(tL)^2$

$= t^2K^2 - t^2KL + t^2 2L^2$

$f(tL, tK) = t^2(K^2 - KL + 2L^2)$

$= t^2 f(L,K)$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

2- المسار الأمثل للتطور:

$\frac{PmP_L}{PmP_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{-K+4L}{2K-L} = \frac{2}{4}$

$\Rightarrow 4K - 2L = -4K + 16L$

$\Rightarrow \boxed{K = \frac{9}{4}L}$

- تمثل النقاط التوازنية (نقاط المماس) بين L و K عندما يتغير مستوى المنتوج أو تتغير التكلفة الكلية بينما تبقى أسعار عناصر الإنتاج ثابتة.

3- أمثل إنتاج للمؤسسة إذا كانت $C = 100$

حل جملة معادلتين

$\begin{cases} K = \frac{9}{4}L & \cdots(1) \\ 100 = 2L + 4K & \cdots(2) \end{cases}$

بتعويض (1) في (2) نجد:

$100 = 2L + 4(\frac{9}{4}L) \Rightarrow \boxed{L = \frac{100}{11}} = 9$

$\boxed{K = 20}$

$\therefore$ أمثل إنتاج هو $(L;K) = (9;20)$

4- حساب المرونة الجزئية لكل عنصر:

$e_L = \frac{\Delta\varphi}{\Delta L} \cdot \frac{L}{\varphi} = (-K+4L) \times \frac{L}{K^2 - KL + 2L^2}$

$e_K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta K} \cdot \frac{K}{\varphi} = \frac{(2K-L) \times (K)}{K^2 - KL + 2L^2}$

$e_L + e_K = \frac{2(K^2 - KL + 2L^2)}{K^2 - KL + 2L^2} = 2$

بستنتج أن مجموع المرونات الجزئية $(e_L + e_K)$ يساوي درجة تجانس الدالة $(e_L + e_K = 2)$.

التمرين الخامس:

$\varphi = f(K,L) = 2K$

* الإنتاج الكلي عند النقطة $(K,L) = (10;20)$

نعوضها نجد: $\varphi = f(10;20) = 20(10) = 200$

* رأس المال ثابت $K = 10$.

$\varphi = f(10,L) = 10L$

$PmP_L = \frac{\Delta\varphi}{\Delta L} = 10$

$PMP_L = \frac{\varphi}{L} = \frac{10L}{L} = 10$

* العمل ثابت وليساوي $L = 20$

$f(20,K) = 20K$

$PmP_K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta K} = 20$

$PMP_K = \frac{\varphi}{K} = \frac{20K}{K} = 20$

* حساب مرونة الإنتاج للعمل وأس المال $(K;L) = (10;20)$

$e_L = \frac{\partial\varphi}{\partial L} \times \frac{L}{\varphi} = \frac{PmP_L}{PMP_L} = \frac{10}{10} = 1$

$\therefore$ الإنتاج متكافئ المرونة

كلما زاد العمل بـ 1٪ فإن الإنتاج يزداد بـ 1٪

$e_K = \frac{\partial\varphi}{\partial K} \cdot \frac{K}{\varphi} = \frac{PmP_K}{PMP_L} = \frac{20}{20} = 1$

كلما زاد رأس المال بـ 1٪ فإن الإنتاج يزداد بـ 1٪

التمرين السادس:

$\varphi = 10 K^{0,5} L^{0,5}$

دالة من نوع كوب دوغلاس Cup douglas

درجة تجانس الدالة

$\varphi = f(tK, tL) = 10 (tK)^{0,5} (tL)^{0,5}$

$= t (10 K^{0,5} L^{0,5}) = t\varphi$

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى

غلة الحجم ثابتة

التوفيقة المثلى من L و K التي تحقق إنتاج 40.

$$\begin{cases} \frac{PmL}{PmK} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow K = \frac{P_L}{P_K} L = \frac{1}{4} L \quad (1) \\ 40 = 10 K^{0,5} L^{0,5} \quad \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بتعويض (1) في (2) نجد:

$40 = 10 (\frac{1}{4} L)^{0,5} L^{0,5} \Rightarrow \boxed{L = 8}$

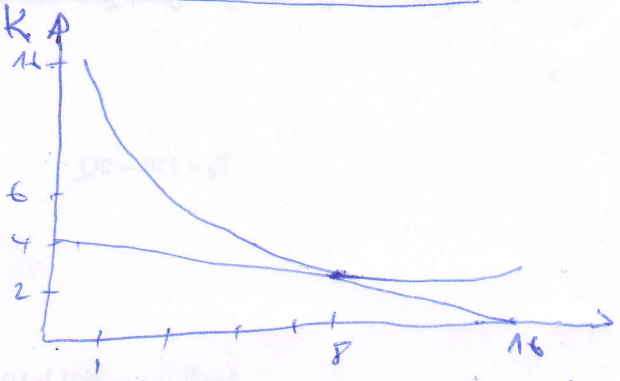
$\boxed{K = 2}$

- منحنى الناتج المشاري:

$40 = 10 K^{0,5} L^{0,5} \Rightarrow \boxed{K = \frac{16}{L}}$

رسم منحنى الناتج:

L	1	2	4	8	16
K	16	8	4	2	1



$C = P_L L + P_K K = L + 4K \Rightarrow$

L	0	16
K	4	0

* $Pm_L = \frac{1}{2} K^{0,5} L^{-0,5}$

$Pm_K = \frac{1}{2} K^{-0,5} L^{0,5}$

$TMST = \frac{Pm_L}{Pm_K} = \frac{K}{L}$

تابع التمرين الخامس:

- زيادة K و L بـ 10٪ فإن المنتج يصبح يتبع بالرمز $\varphi(1,1K ; 1,1L)$

$L + 0,1L = 1,1L$

$K + 0,1K = 1,1K$

وتصبح دالة الإنتاج على الشكل:

$\varphi = f(1,1K ; 1,1L) = f(1,1K . 1,1L) = (1,1)^2 K.L$

$= 1,21 KL$

∴ زيادة عناصر الإنتاج بـ 10٪ يؤدي إلى زيادة الإنتاج بـ 21٪.