

# Chapitre 5 : écoulements à surface libre

Mécanique des fluides

Christophe Ancey

# Chapitre 5 : écoulements à surface libre



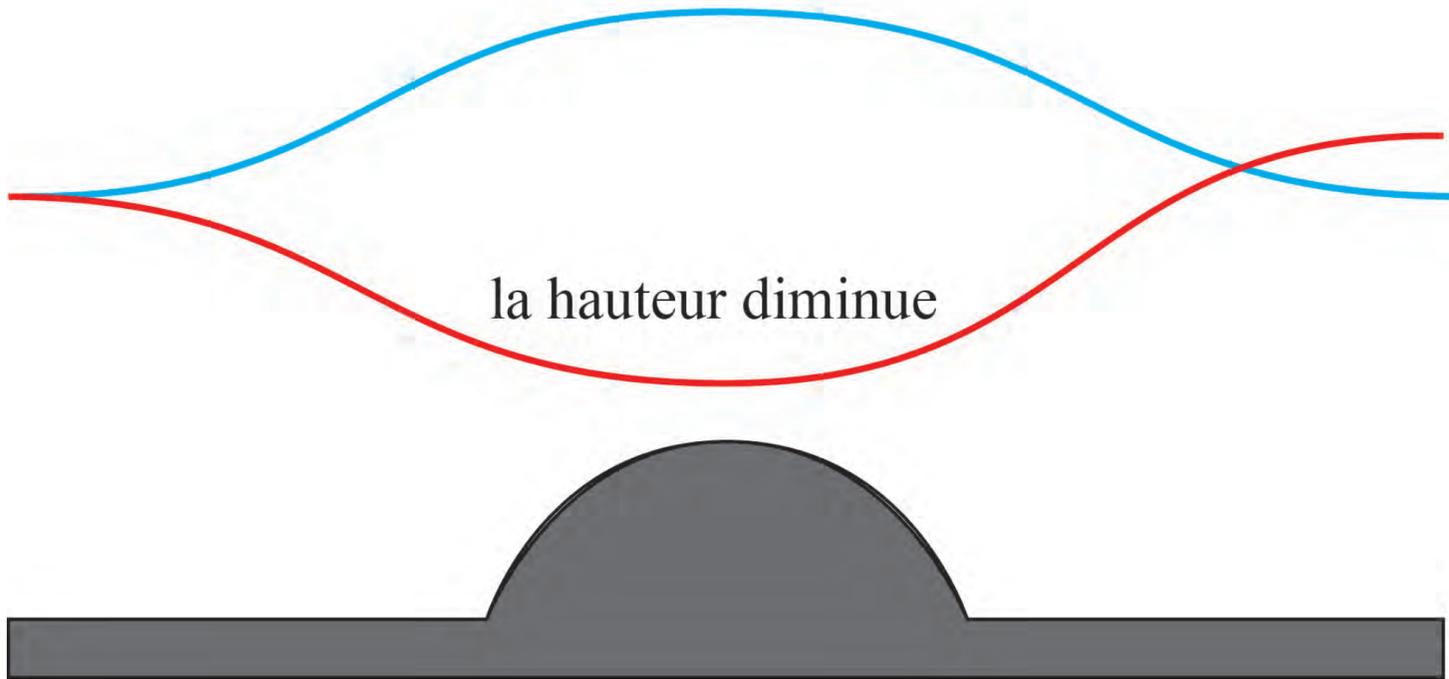
- Vocabulaire
- Notion de perte de charge hydraulique
- Régime permanent uniforme
- Régime permanent non uniforme
- Courbes de remous et écoulements critiques

# Un petit quiz pour s'échauffer

- Quelle est la forme de la surface libre d'écoulement d'eau au-dessus d'un obstacle ?

la hauteur augmente

la hauteur diminue



- Que se passe-t-il quand un barrage libère un gros volume d'eau ?



# Vocabulaire

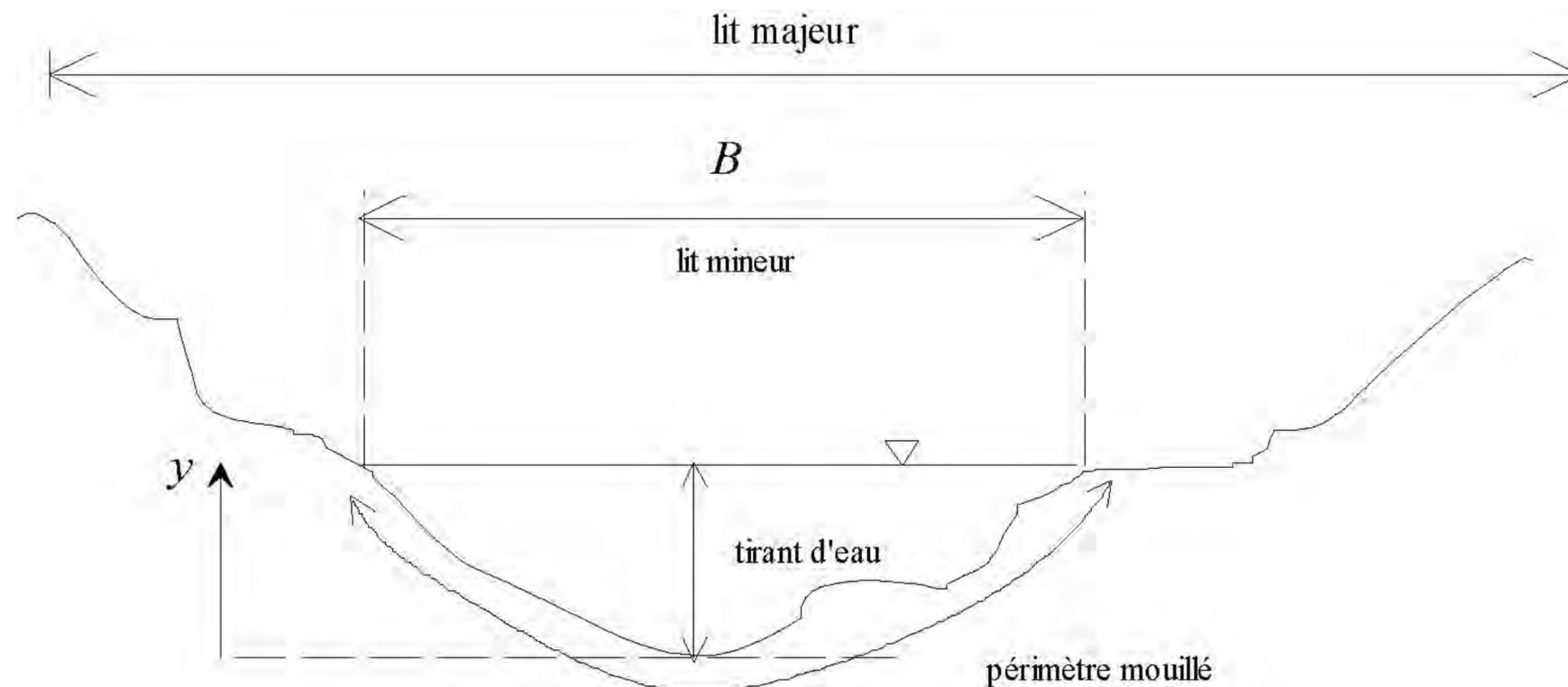
Une terminologie technique, parfois au charme désuet

- *bief* : tronçon homogène en termes de pente moyenne et de section d'écoulement ;
- type de cours d'eau : il existe plusieurs classifications. Une distinction des cours d'eau peut se faire en fonction de la pente  $i$  :
  - $i < 3 \%$  on parle de *rivière*,
  - $3 < i < 6 \%$ , on parle de *rivière torrentielle*,
  - $i > 6 \%$ , on parle de *torrent* ;



# Vocabulaire

- *périmètre mouillé*  $\chi$  : longueur de la surface d'écoulement en contact avec le lit
- *section d'écoulement* (ou section mouillée)  $S$  : partie de la section du canal limitée par les parois et la surface libre



# Vocabulaire

- *hauteur d'écoulement* : hauteur moyenne d'eau, par définition c'est

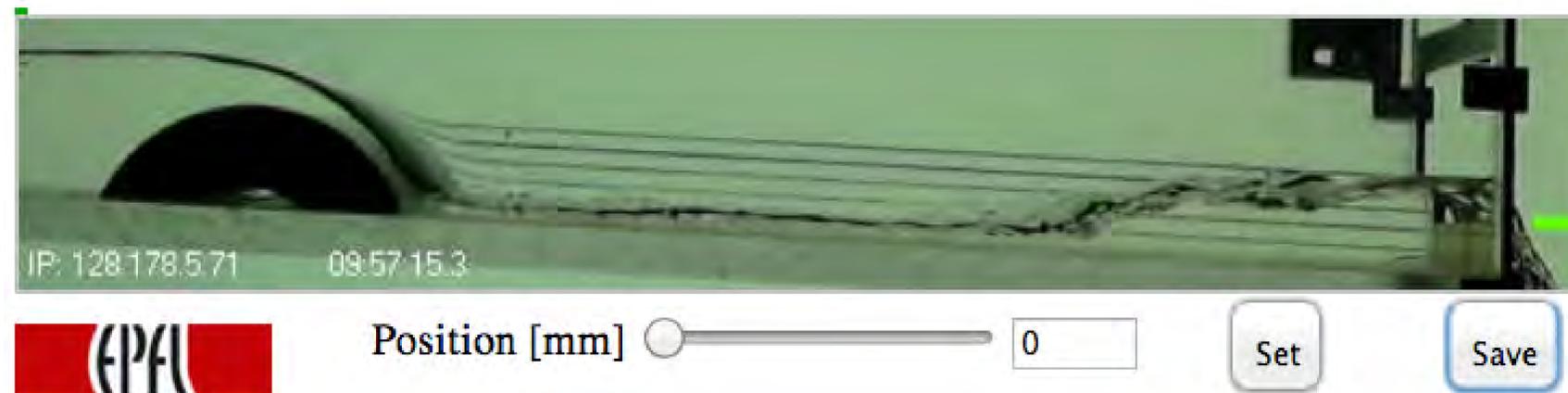
$$h = S/B$$

- *hauteur normale  $h_n$*  : c'est la hauteur d'un écoulement permanent uniforme dans un bief. La hauteur normale est fonction du débit  $Q$ , de la rugosité  $K$ , et de la pente moyenne  $i$
- *tirant d'eau* : profondeur maximale d'une section d'écoulement
- *largeur au miroir  $B$*  : largeur de la section d'écoulement au niveau de la surface libre
- *rayon hydraulique* : c'est une longueur caractéristique définie par

$$R_H = S/\chi.$$

# Vocabulaire

- régime *uniforme* : régime d'écoulement le long d'un bief où les caractéristiques d'écoulement sont constantes ( $\partial h / \partial x = 0$ )
- régime *permanent* : régime où l'écoulement ne dépend pas du temps ( $\partial h / \partial t = 0$ )
- *courbe de remous* : la courbe de remous est la courbe décrivant la variation de la hauteur d'eau dans un bief pour un écoulement graduellement varié. L'équation de cette courbe est appelée équation de la courbe de remous



Voir en ligne [128.178.27.98:8082/LHE1.html](http://128.178.27.98:8082/LHE1.html)

# Vocabulaire

- régime *graduellement varié* : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très faible, typiquement si  $L$  désigne une longueur d'écoulement et  $\Delta h$  une variation de hauteur, on a  $\Delta h/L \ll 1$
- régime *rapidement varié* : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très importante, typiquement si  $L$  désigne une longueur d'écoulement et  $\Delta h$  une variation de hauteur, on a  $\Delta h/L = O(1)$ . À l'approche d'une singularité ou bien en cas de ressaut hydraulique, l'écoulement peut entrer dans un régime rapidement varié
- *ressaut hydraulique* : variation brutale de hauteur d'eau (passage d'un régime torrentiel à un régime fluvial)

# Vocabulaire

- *pente moyenne* : pente moyenne longitudinale  $i = \tan \theta$  d'un bief exprimé en ‰ ou en ‰
- régime *torrentiel* : régime supercritique ( $Fr > 1$ ), forte vitesse, faible hauteur
- régime *fluvial* : régime subcritique ( $Fr < 1$ ), faible vitesse, hauteur élevée
- *débit*  $Q$  : flux d'eau par unité de temps à travers la surface d'écoulement
- *vitesse moyenne*  $\bar{u}$  : vitesse

$$\bar{u} = \frac{Q}{S};$$

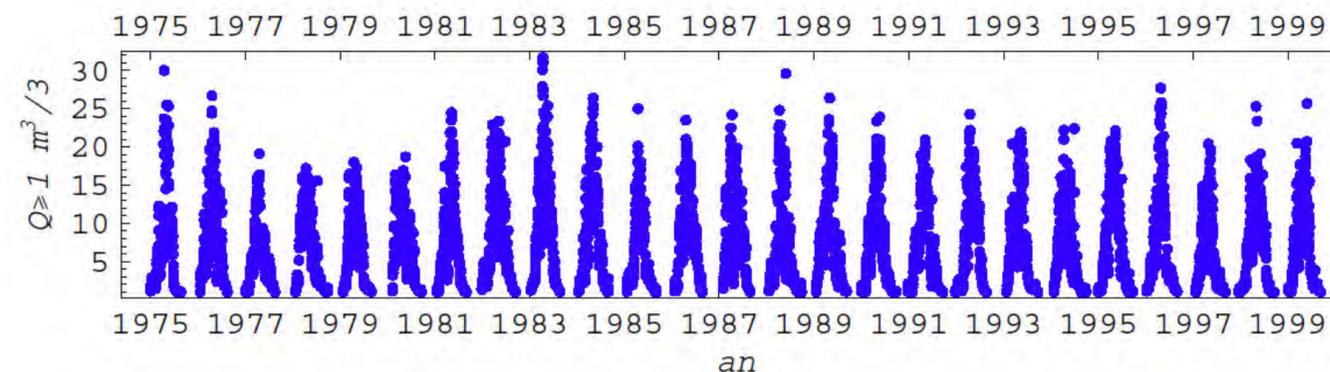
# Vocabulaire

---

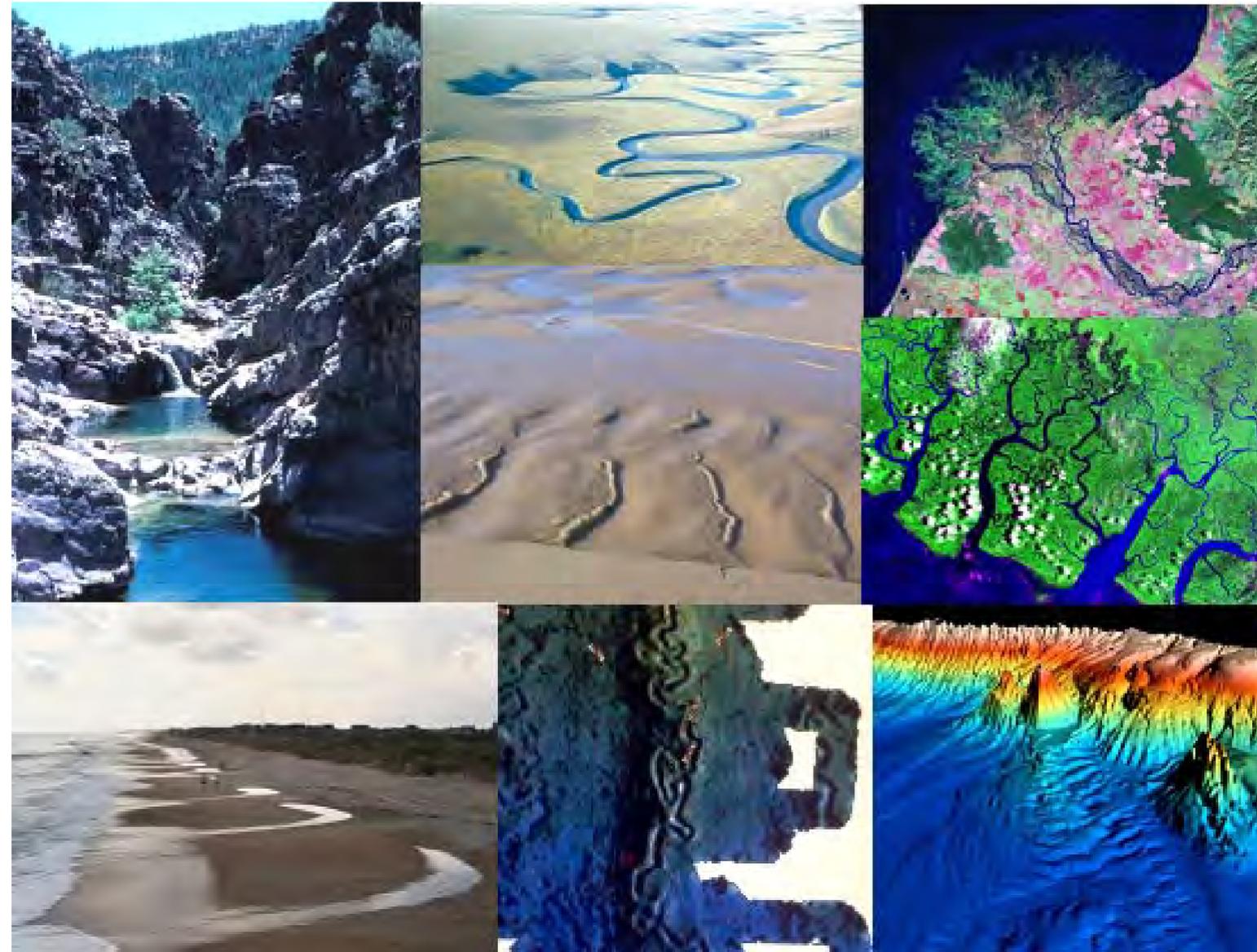
- coefficient de *rugosité* : coefficient traduisant la rugosité des parois
- lit *mineur* : lit occupé ordinairement par un cours d'eau par opposition au lit *majeur* qui correspond à l'emprise maximale historique d'un cours d'eau ou à la plaine inondable. On parle aussi de *niveau des plus hautes eaux* (PHE) pour désigner la cote maximale atteinte par la surface libre d'un cours d'eau
- la berge ou rive est le talus qui sépare le lit mineur du lit majeur. Lorsque la berge est couverte par la végétation, on parle de *ripisylve*

# Vocabulaire

- Le *débit d'étiage* est le débit minimal d'un cours d'eau. Le *débit de plein bord* est le débit atteint lorsque la rivière sort de son lit mineur. On parle de débit de pointe pour désigner le débit maximal atteint. Pour les crues, on peut relier le débit de pointe à la *période de retour*  $T$ .
- *débit dominant* : c'est le débit de la crue ordinaire qui permet de façonner un cours d'eau. Pour les rivières à sable, le débit dominant correspond au débit de pointe d'une crue de période 1–2 ans alors que pour un lit à gravier, il correspond à crue de période de retour de quelques dizaines d'années.



# Morphologie des cours d'eau



Une grande variété de morphologies d'écoulement

# Morphologie des cours d'eau



Tagliamento (Frioul-Vénétie, Italie) : lit à tresses

# Morphologie des cours d'eau



Tagliamento (Frioul-Vénétie, Italie) à son débouché dans l'Adriatique  
(Lignano Sabbiadoro) : lit à méandres

# Rugosité du lit



Navisence (affluent du Rhône, val d'Anniviers) : régime de cascade

# Rugosité du lit



Navisence (affluent du Rhône, val d'Anniviers) : régime de seuils et mouilles

# Rugosité du lit



Banc de gravier (Sandy River, Portland EUA)

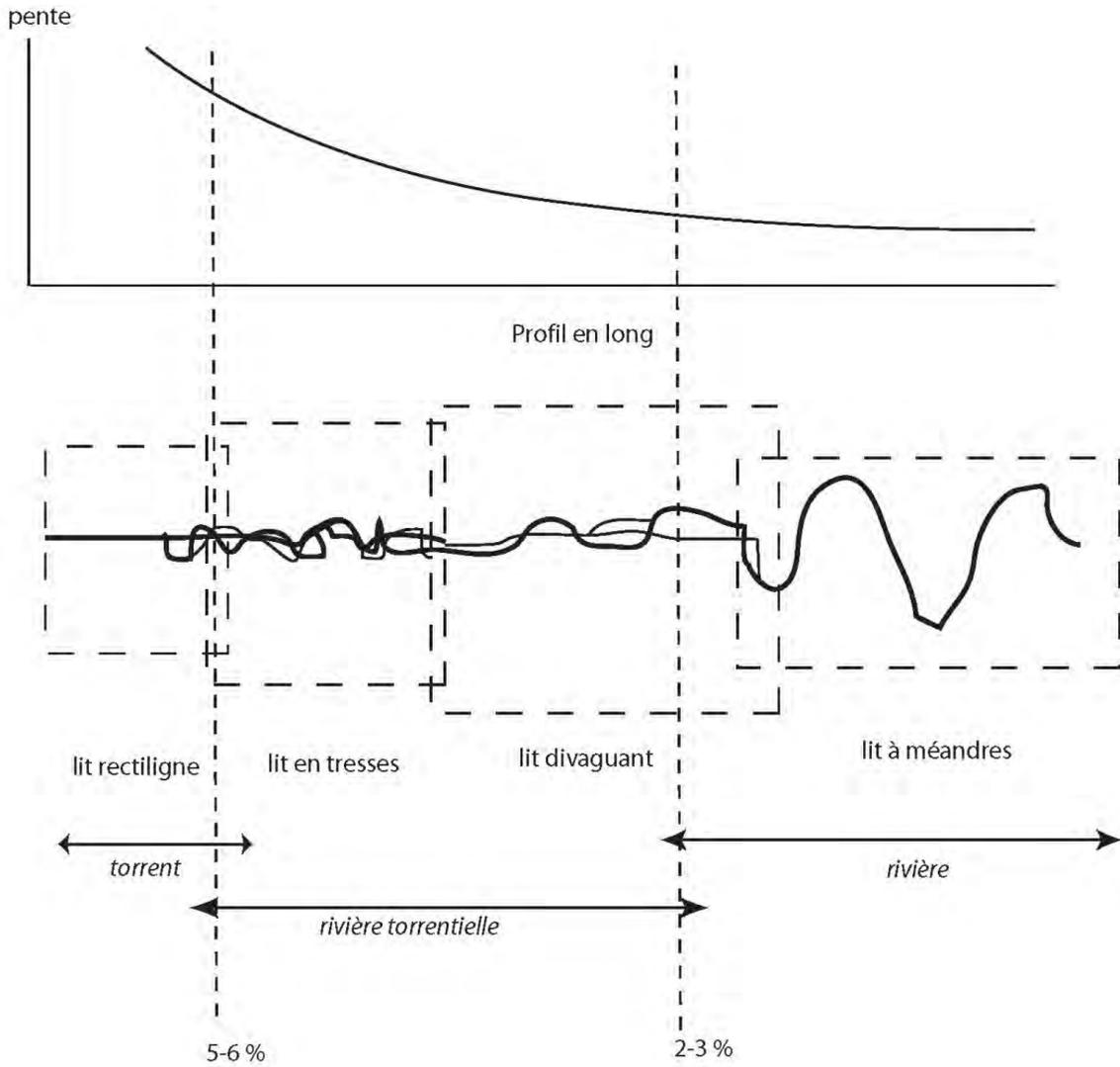
# Rugosité du lit



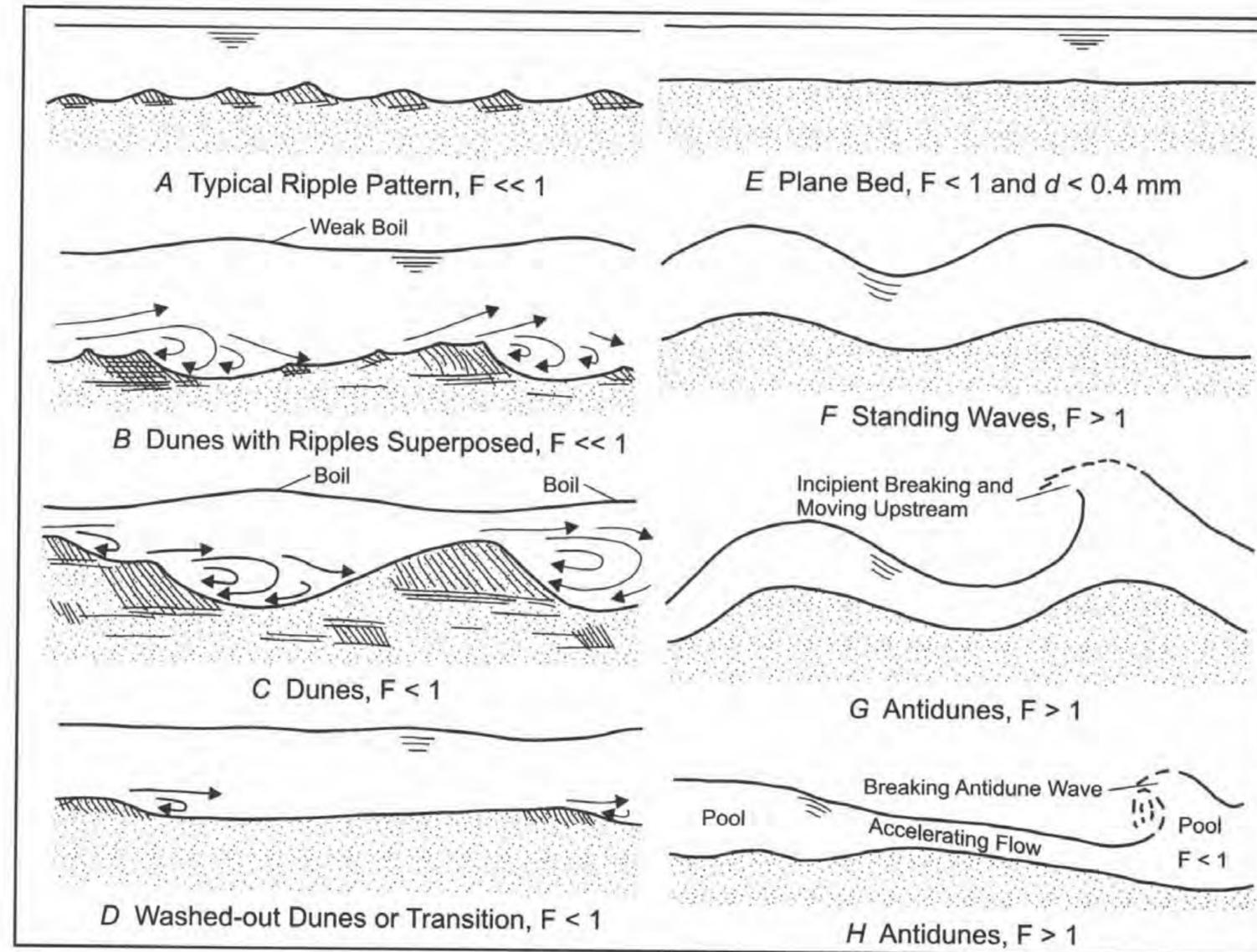
Le Rhône à Sierre

# Rugosité du lit et structure du lit

Vue en plan du lit d'une rivière

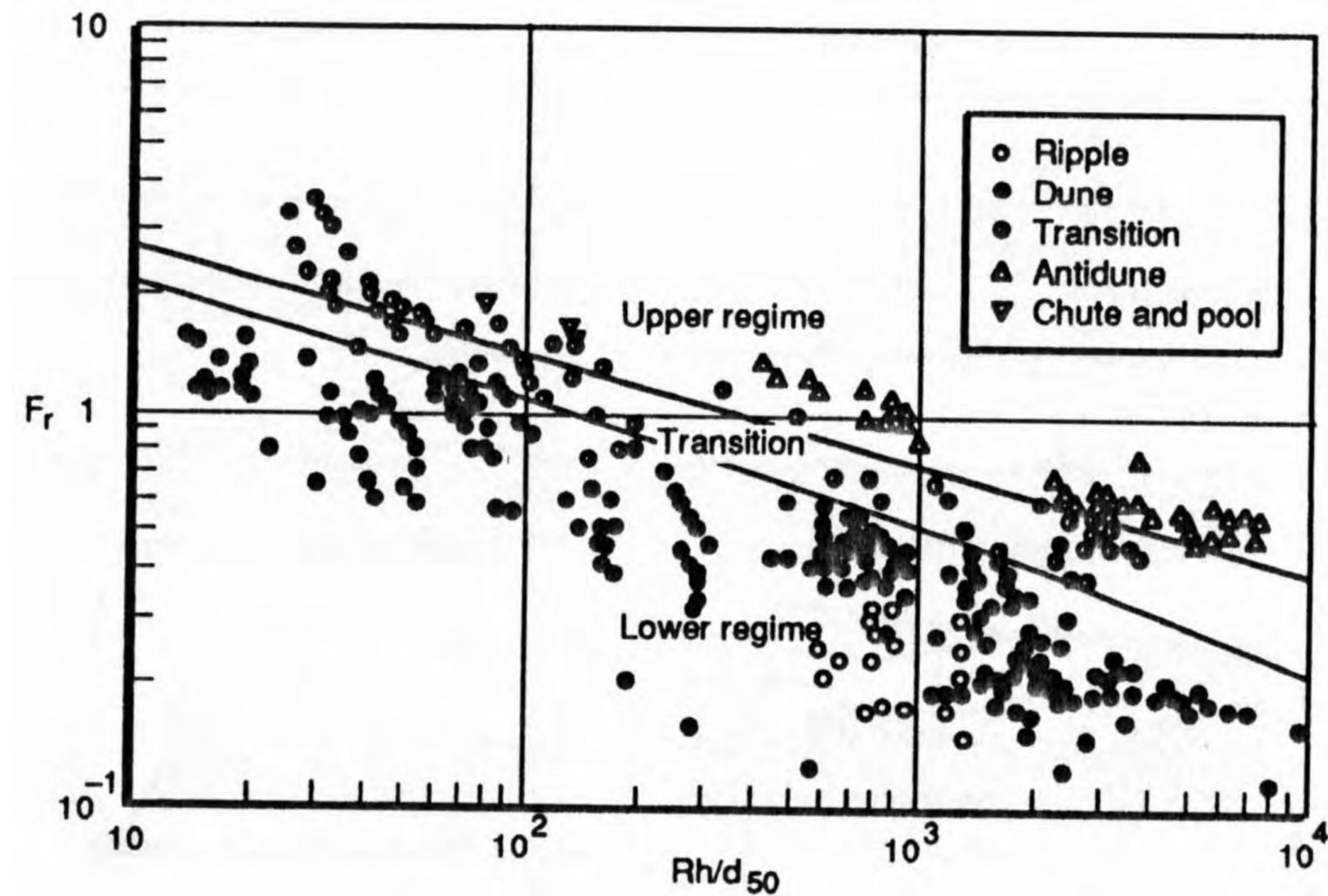


# Rugosité du lit et structure du lit



Évolution des structures morphologiques (longitudinales)

# Rugosité du lit et structure du lit



Type de structures morphologiques longitudinales en fonction du nombre de Froude

# Régime d'écoulement



Le Rhône à Sion : écoulement dans son canal (régime graduellement varié)

# Régime d'écoulement



Débordement sur l'A3 en juin 2013 (régime graduellement varié)

# Régime d'écoulement



Crue de la Loire au barrage de Grangent en novembre 2008 : chute et ressaut hydraulique (régime rapidement varié)

# Régime d'écoulement



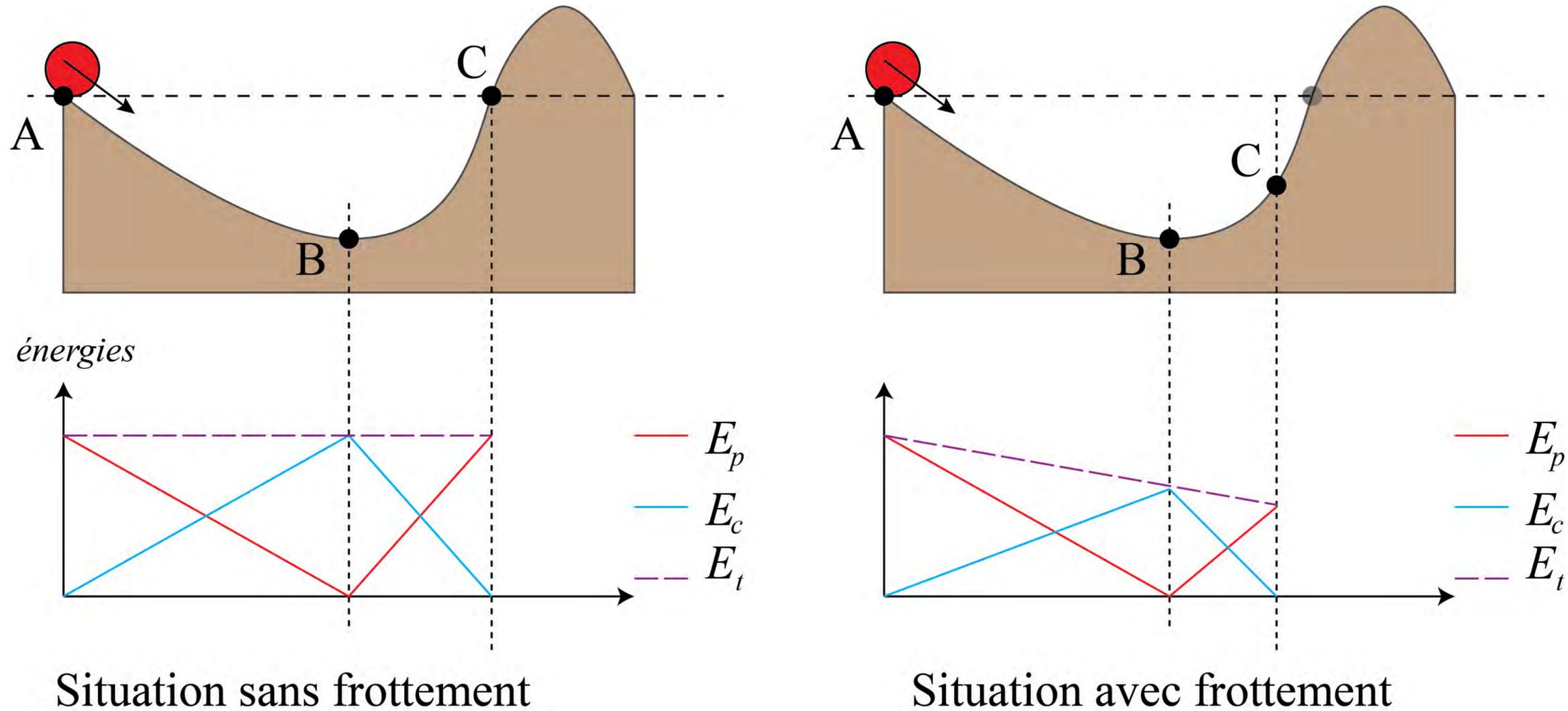
Mascaret sur la seine : ressaut hydraulique (régime rapidement varié)

# Régime d'écoulement



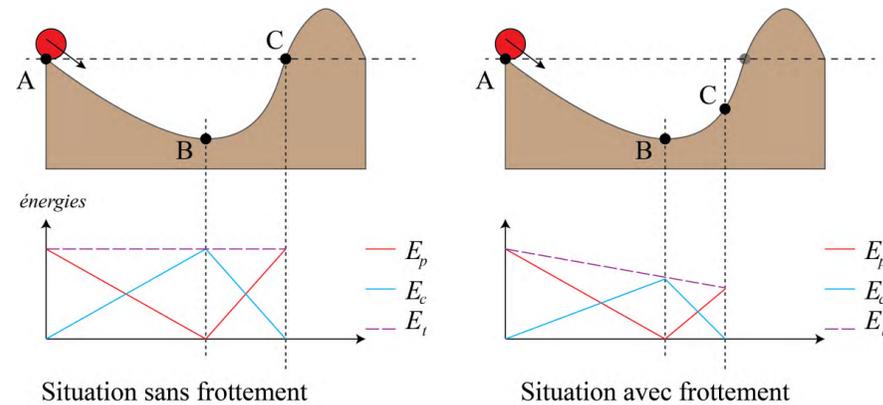
Chute sur déversoir (Aar à Berne) (régime rapidement varié)

# Notion de perte de charge



Analogie avec une bille roulant avec ou sans frottement.

# Notion de perte de charge



La différence d'altitude traduit la perte d'énergie (perte de charge) subie par la bille

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_t,$$

où  $\Delta$  représente la différence d'énergie entre les instants final et initial. Cette relation trouve son pendant en hydraulique :

$$\frac{1}{\rho g} \Delta(\Psi + p + k) = \Delta H,$$

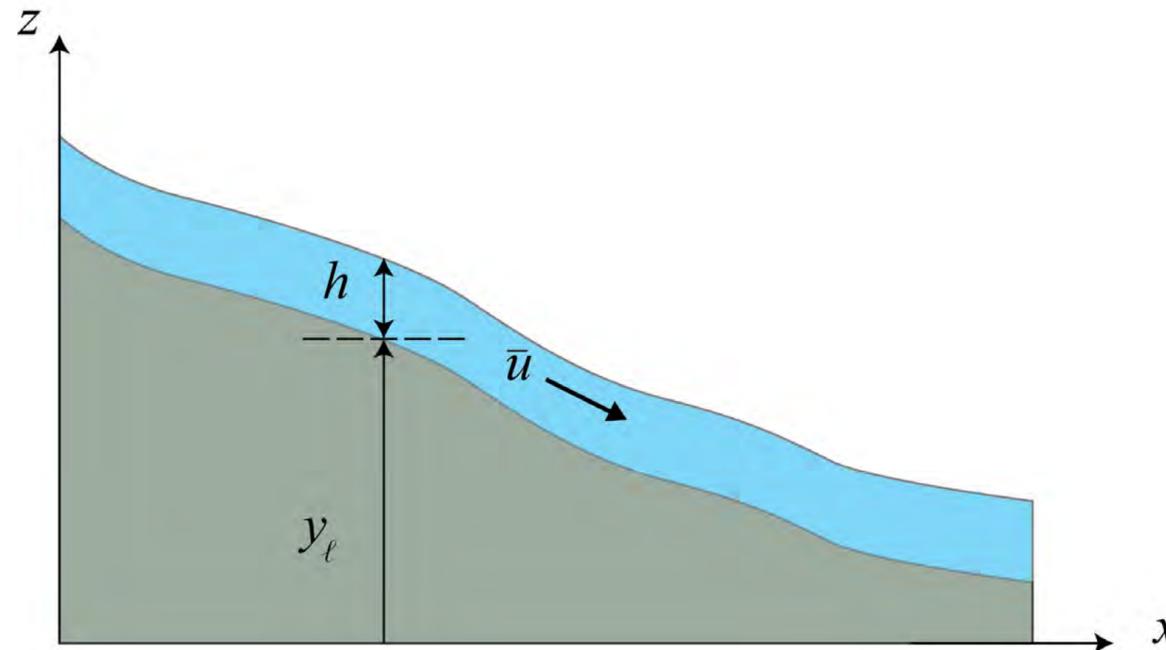
avec  $\Delta H$  la perte de charge (énergies converties en équivalent d'hauteur en eau en divisant par  $\rho g$ ).

# Charge totale et charge spécifique

La charge totale hydraulique s'écrit :

$$H = y_\ell + \underbrace{h + \frac{\bar{u}^2}{2g}}_{H_s},$$

avec  $y_\ell$  la cote du fond,  $h$  la hauteur d'eau, et  $\bar{u}$  la vitesse moyenne de l'eau ( $\bar{u} = q/h$  si  $q$  désigne le débit par unité de largeur).  $H_s$  s'appelle la charge spécifique.



# Débit à charge spécifique constante

Si on écrit la charge spécifique comme une fonction de la hauteur, on a :

$$H_s(h) = h + \frac{\bar{q}^2}{2gh^2},$$

d'où l'on tire que le débit par unité de largeur  $q = \bar{u}h$  vaut

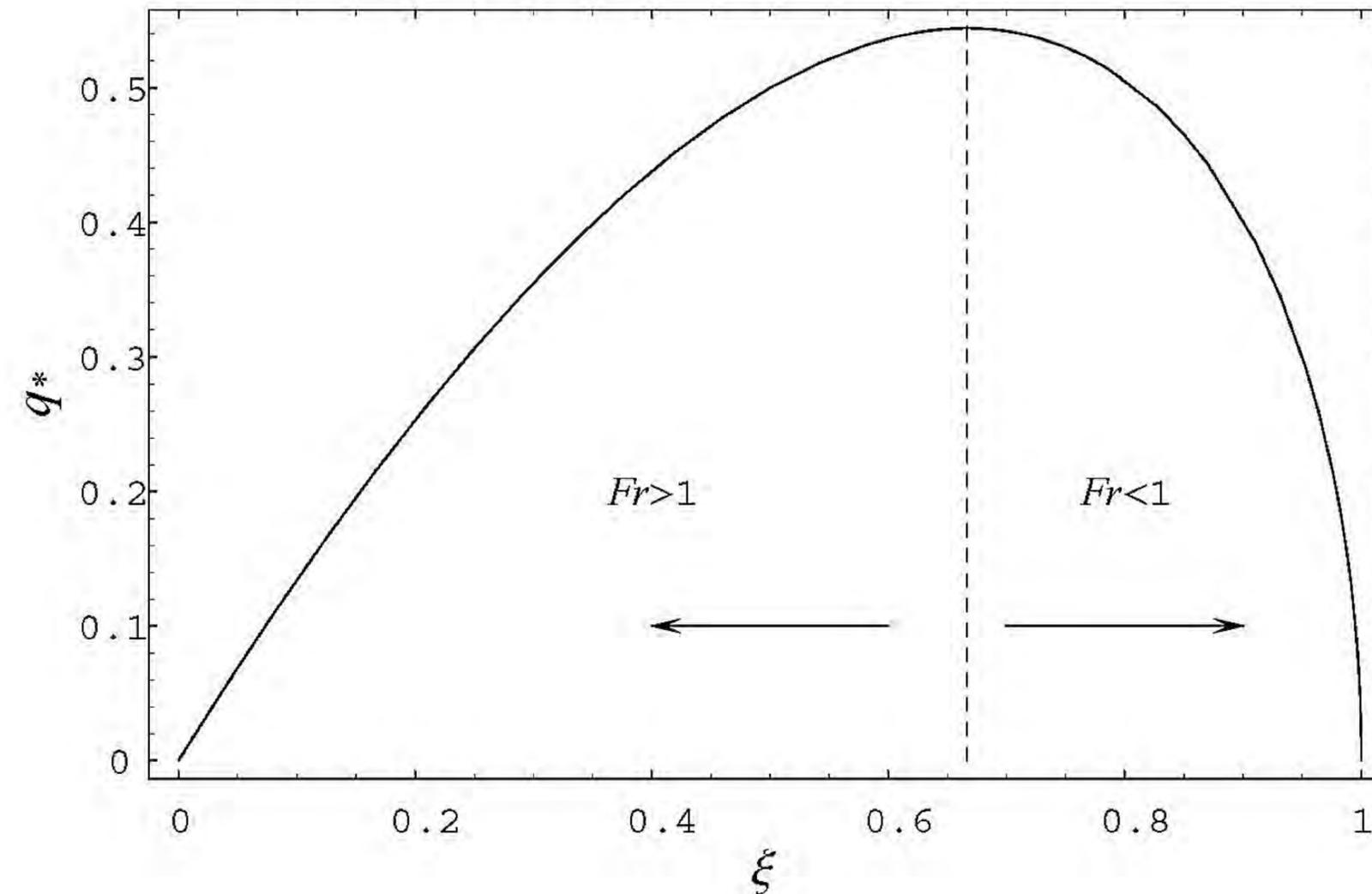
$$q(h) = \sqrt{2gh^2(H_s - h)}.$$

ou sous forme adimensionnelle

$$q_* = \frac{q(h)}{\sqrt{gH_s^3}} = \sqrt{2\xi^2(1 - \xi)},$$

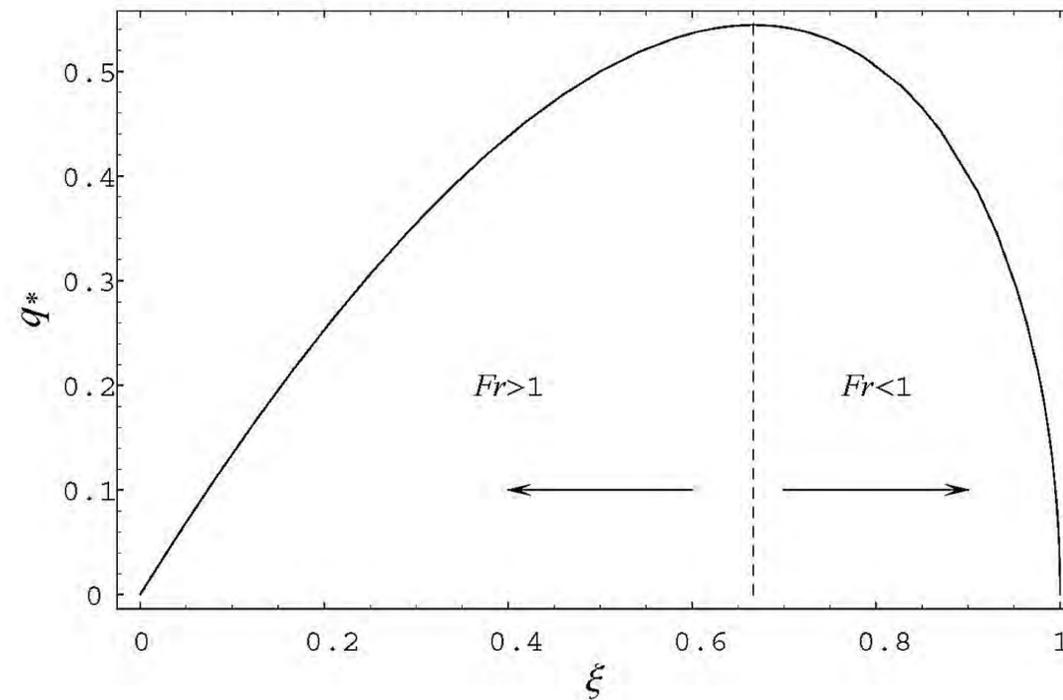
avec  $\xi = h/H_s$ .

# Débit à charge spécifique constante



Conséquence : un débit maximal  $q_{max} = \sqrt{gh^3} = \sqrt{8gH_s^3/27}$  atteint pour  $Fr = 1$   
( $h = h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ )

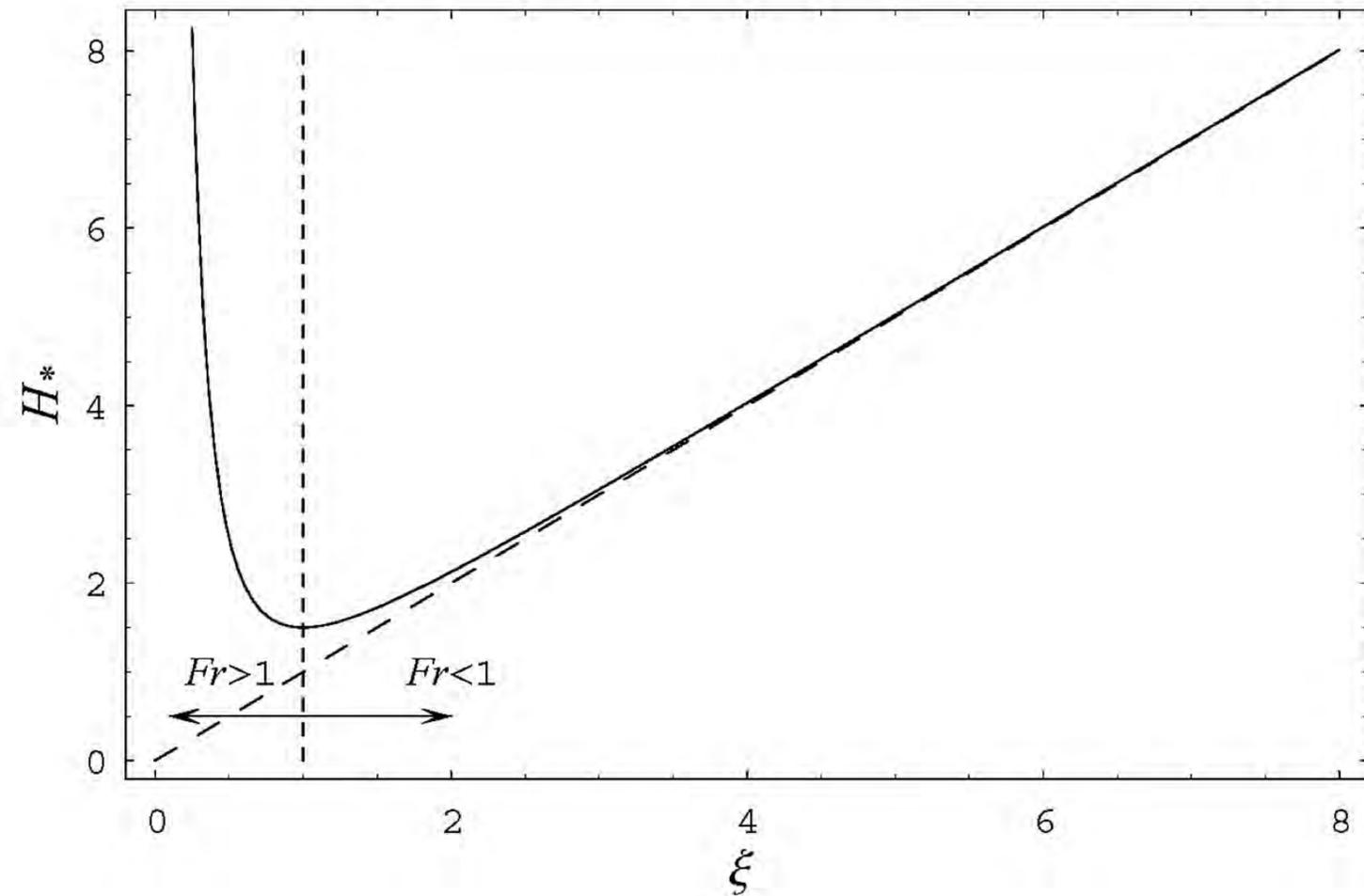
# Débit à charge spécifique constante



Il existe deux régimes possibles :

- un régime *supercritique* (régime appelé aussi torrentiel) :  $h < h_c$  ;
- un régime *subcritique* (régime appelé fluvial) :  $h > h_c$ .

# Hauteur à débit constant



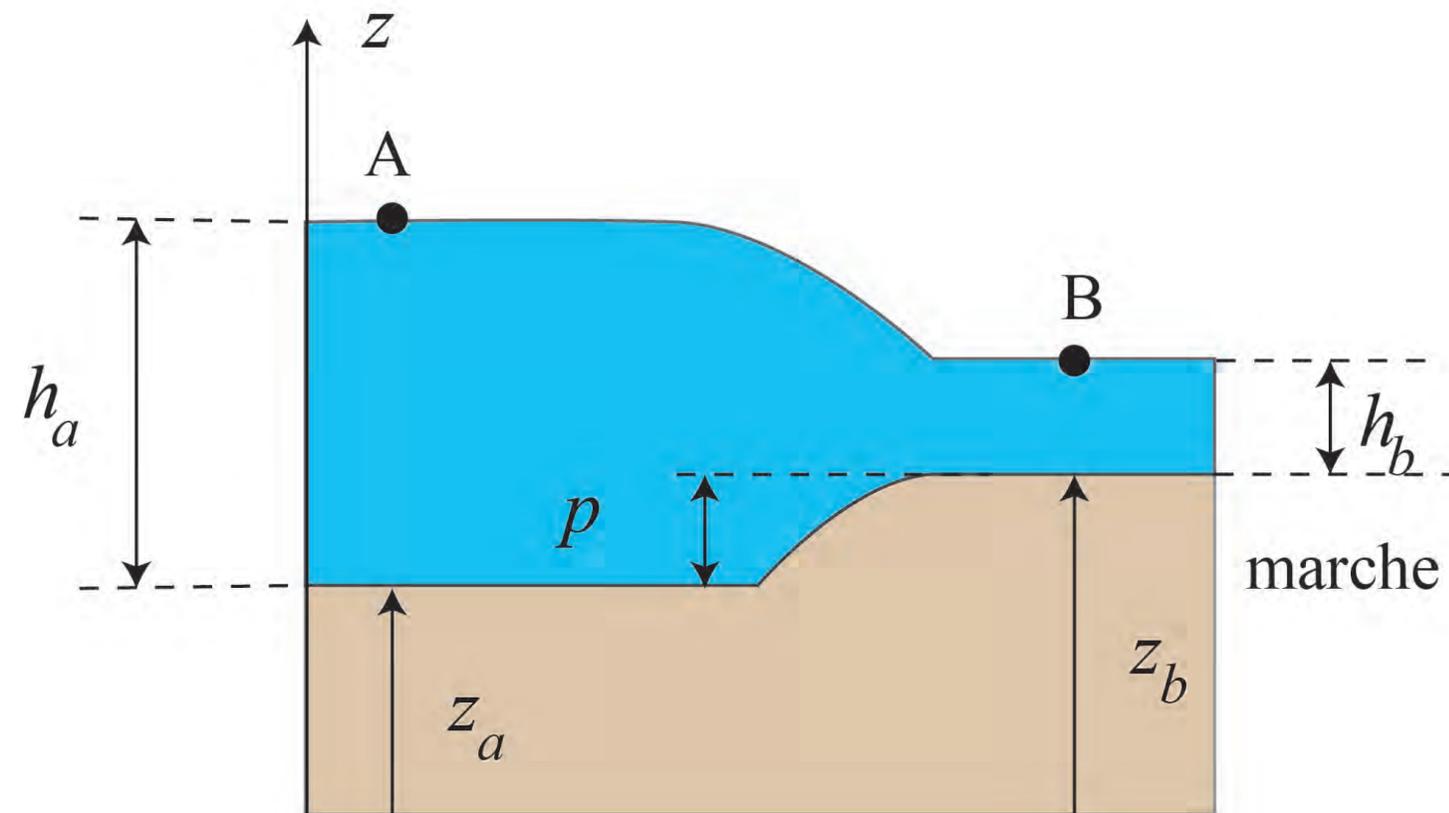
On se place à un débit donné  $0 < q < q_{max}$ ,  
l'énergie spécifique s'écrit comme fonction de  
 $h$

$$H_s(h) = h + \frac{\bar{q}^2}{2gh^2},$$

que l'on peut écrire également, avec  $\xi = h/h_c$ ,

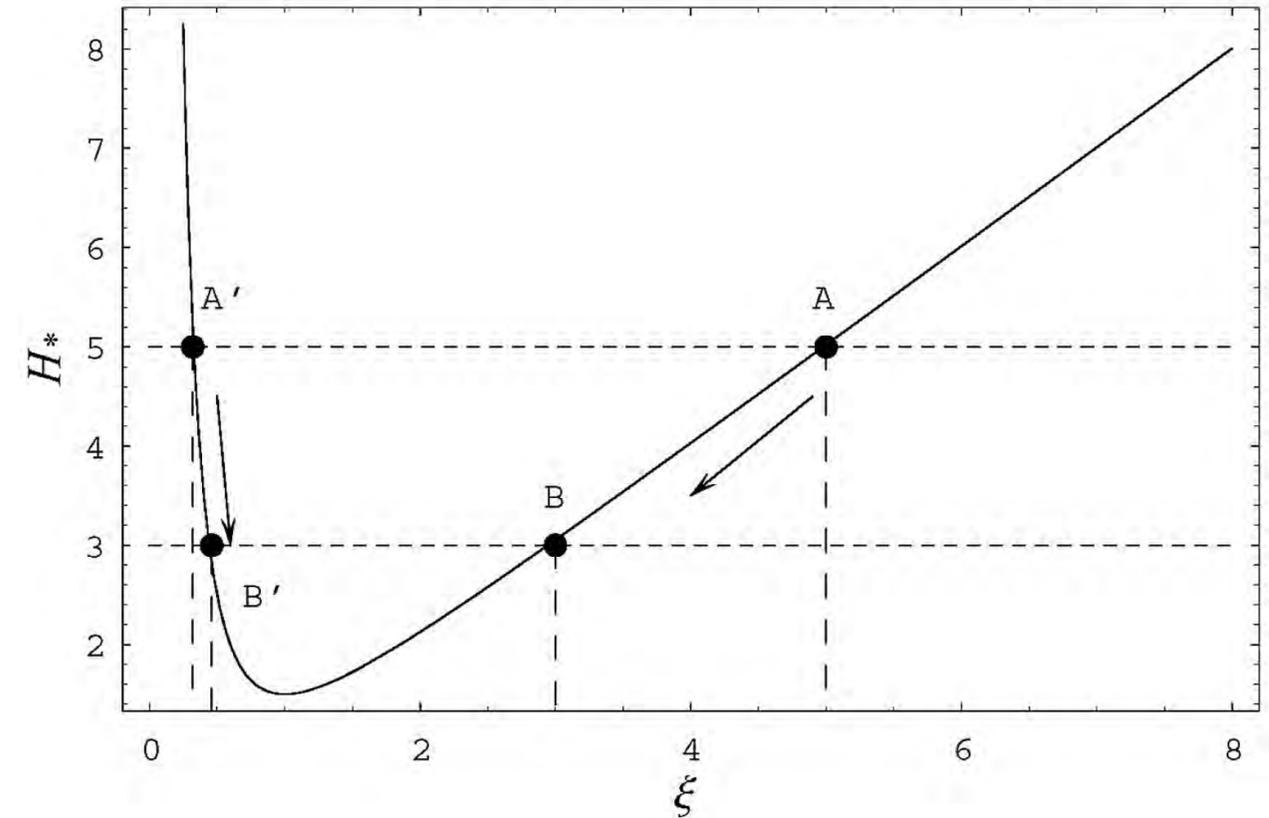
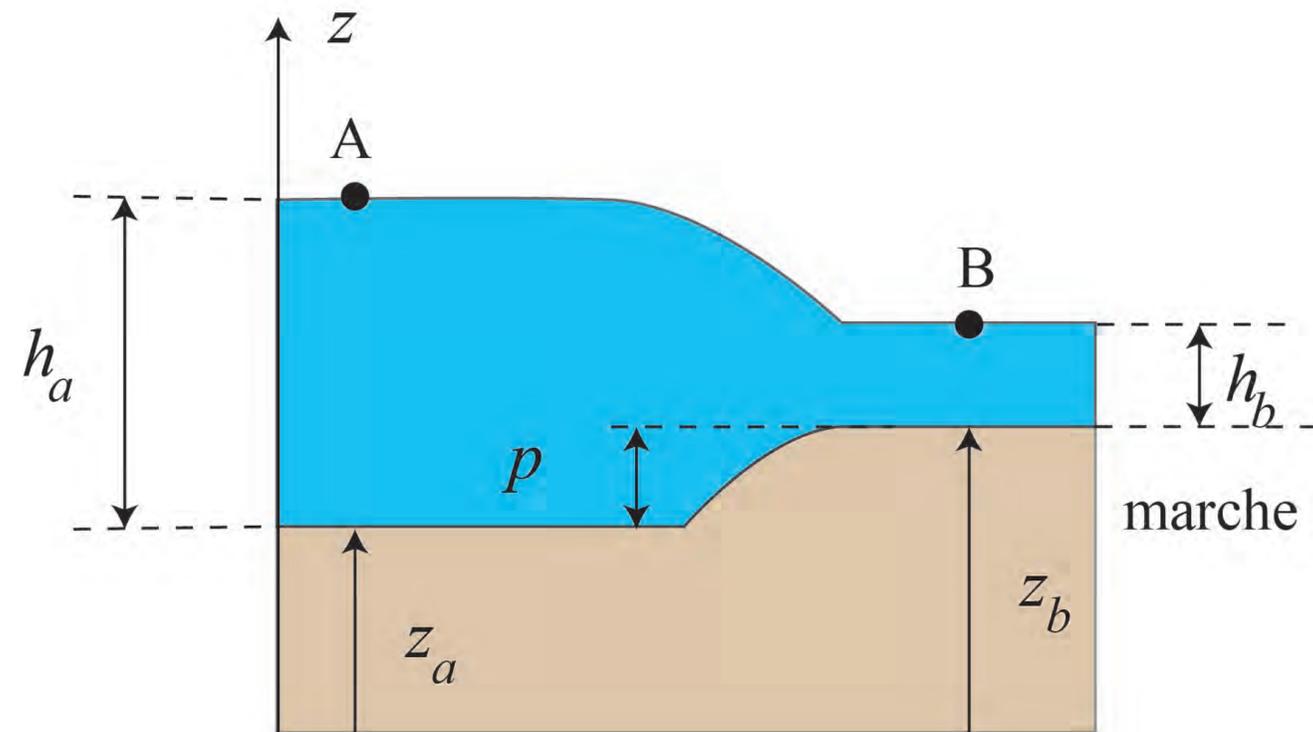
$$H_* = \frac{H_s}{h_c} = \xi + \frac{1}{2\xi^2}.$$

# Application : exemple de la marche



Considérons un régime subcritique sur une marche d'escalier de hauteur  $p = z_b - z_a$ .

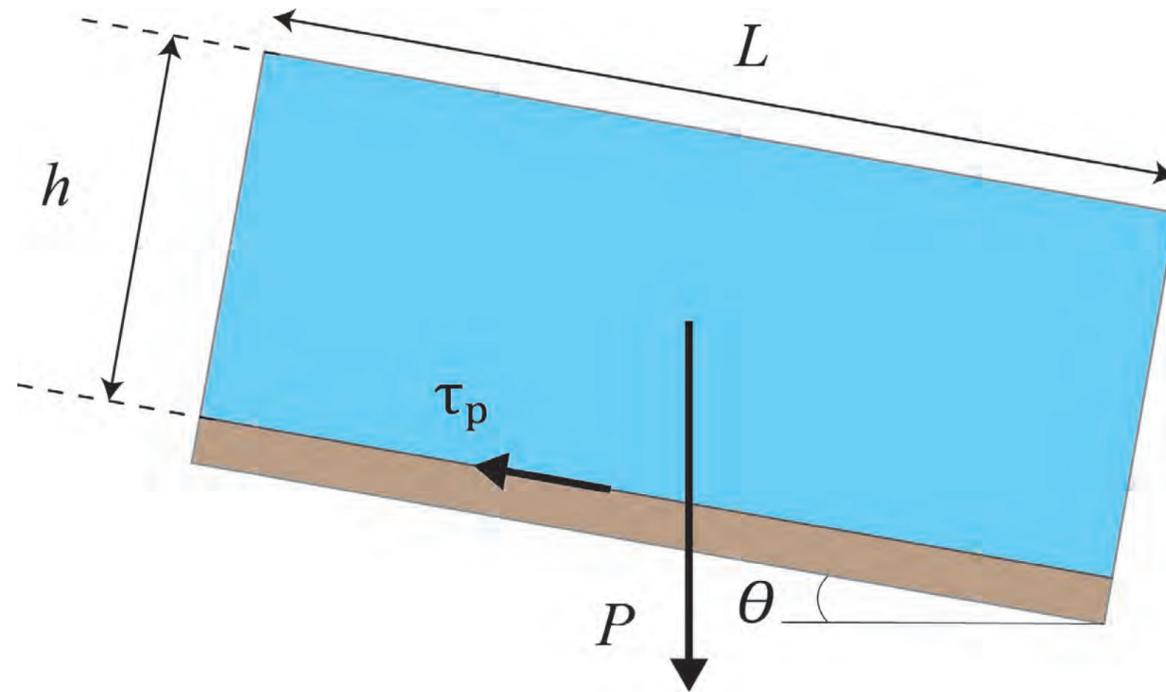
# Application : exemple de la marche



Diminution de la charge spécifique d'une valeur égale à  $p$

$$H_A = H_B = z + h + \frac{\bar{u}^2}{2g} \Rightarrow H_s(B) = H_s(A) - p.$$

# Conditions d'équilibre pour une section infiniment large

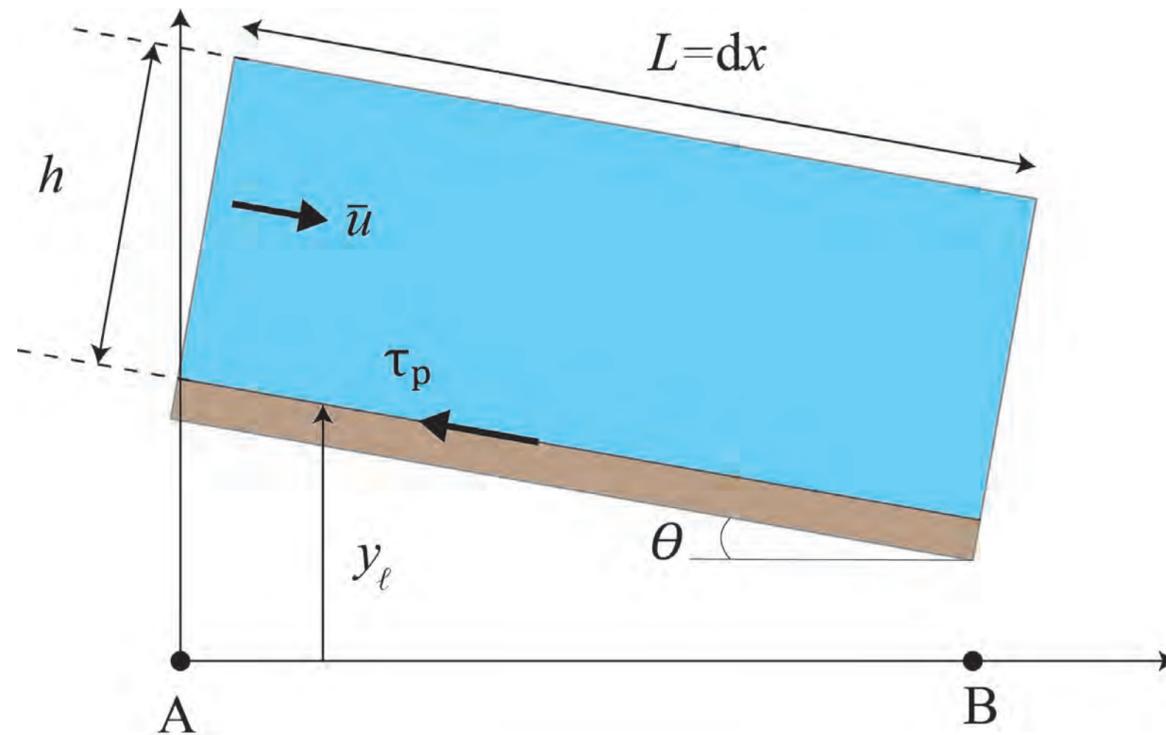


Équilibre d'un volume d'eau  $V = hL$  en équilibre (régime permanent uniforme). La force de frottement doit reprendre la composante motrice du poids

$$P \sin \theta = \rho g h L \sin \theta = \tau_p L \Rightarrow \tau_p = \rho g h \sin \theta,$$

avec  $\tau_p$  la contrainte pariétale (au fond) et  $\theta$  l'angle d'inclinaison.

# Conditions d'équilibre pour une section infiniment large



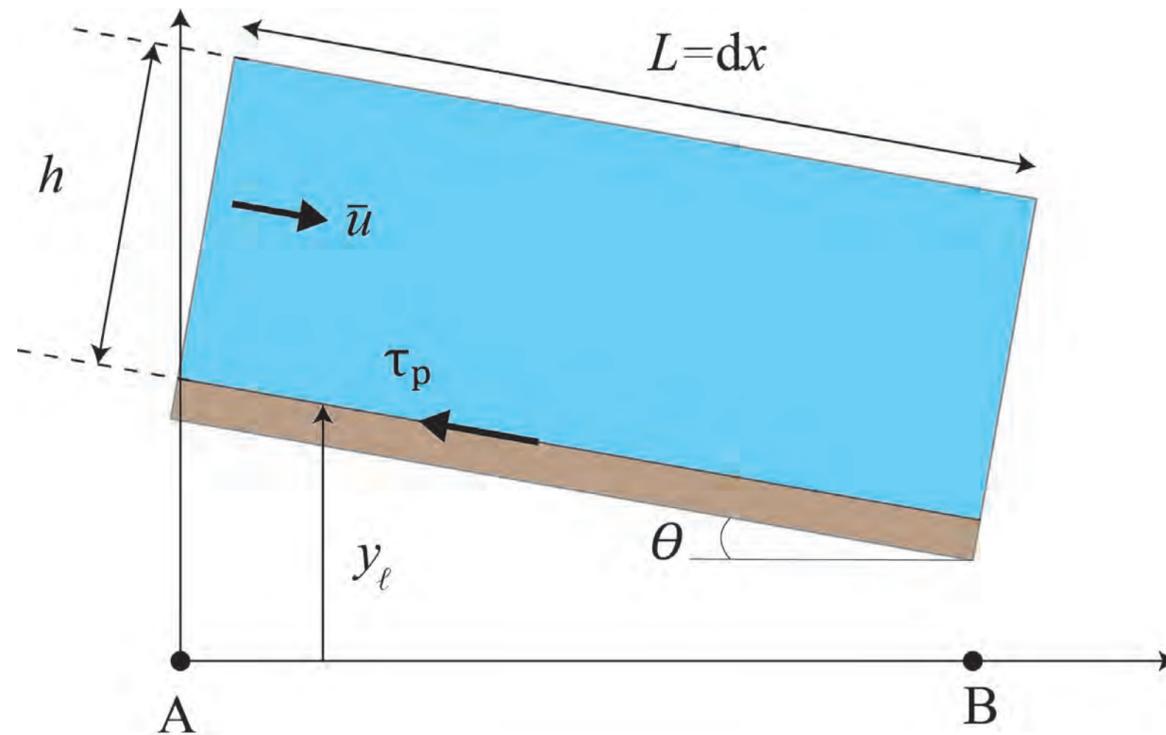
Le théorème de Bernoulli s'écrit sur une petite tranche du bief de longueur  $L = dx$

$$y_\ell(A) + h(A) + \frac{\bar{u}^2(A)}{2g} = y_\ell(B) + h(B) + \frac{\bar{u}^2(B)}{2g} + \Delta H,$$

Comme  $\bar{u}(A) = \bar{u}(B)$  et  $h(A) = h(B)$ , on déduit que

$$y_\ell(A) = y_\ell(B) + \Delta H.$$

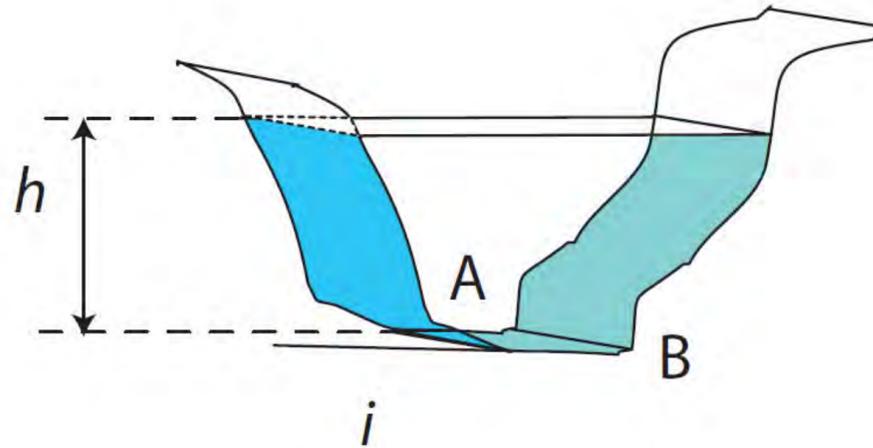
# Conditions d'équilibre pour une section infiniment large



On pose  $y_\ell(A) - y_\ell(B) = i dx$  avec  $i = \tan |\theta|$  et on introduit la pente de frottement  $j_f = dH/dx$ . La condition d'équilibre s'écrit

$$i = j_f$$

# Conditions d'équilibre pour une section quelconque



équilibre d'une tranche de fluide par frottement le long du périmètre  $\chi$

$$\chi \tau_p = S \rho g \sin \theta,$$

soit

$$\tau_p = \rho g \sin \theta R_H \approx \rho g i R_H,$$

avec pour des pentes faibles, on a  $\sin \theta \approx \tan \theta = i$ .

# Lois de frottement

Plusieurs lois empiriques ont été proposées pour établir la relation entre  $\tau_p$  et les variables d'écoulement  $\bar{u}$  et  $h$ . Ces lois expriment les pertes de charge régulières dues aux frottements le long du lit (dissipation dans la couche limite) et par dissipation d'énergie turbulente. La loi la plus employée car valable pour une large gamme de débits et de rugosité est la loi de Manning-Strickler ; la contrainte pariétale s'écrit

$$\tau_p = \frac{\rho g \bar{u}^2}{K^2 h^{1/3}},$$

avec  $K$  le coefficient de Manning-Strickler souvent relié à la rugosité du lit, par exemple la loi de Meyer-Peter

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}}.$$

# Loi de Manning-Strickler

La condition d'équilibre donne :

$$\tau_p = \rho g h \sin \theta,$$

Dans le même temps, la loi empirique de Manning-Strickler

$$\tau_p = \frac{\rho g \bar{u}^2}{K^2 h^{1/3}},$$

d'où l'on déduit la vitesse et la hauteur (normale) en régime permanent ( $q = \bar{u}h$ )

$$\bar{u} = K \sqrt{i} h^{2/3} \text{ et } h_n = \left( \frac{q}{K \sqrt{i}} \right)^{3/5}$$

# Loi de Manning-Strickler

Les valeurs de  $K$  sont tabulées en fonction du type de cours d'eau :

- canal en béton lisse :  $K = 55 - 80 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- canal en terre :  $K = 40 - 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- rivière à galet, rectiligne, section uniforme :  $K = 30 - 40 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- rivière avec méandre, sinuosité, etc. :  $K = 20 - 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  ;
- rivière végétalisée ou torrent :  $K = 10 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .

↪ On se reportera à la publication *Rauheiten in ausgesuchten schweizerischen Fließgewässern* (en allemand) du Bundesamt für Wasser und Geologie (maintenant rattaché à l'Office fédéral de l'énergie) pour une analyse de 12 cours d'eau en Suisse pour différents débits.

# Loi de Manning-Strickler

La formule de Manning-Strickler ne s'applique pas sur des fonds très lisses (béton lissé par exemple). On pose parfois la relation suivante

$$K < 78\bar{u}^{1/6},$$

qui fournit la borne supérieure du coefficient  $K$  en fonction de la vitesse moyenne  $\bar{u}$ . Dans les pays anglo-saxons, on écrit aussi  $K$  en fonction du *coefficient de Manning*  $n$  (sans unité!)

$$K = \frac{1}{n}.$$

On pourra aussi se référer au site

[wwwrcamnl.wr.usgs.gov/sws/fieldmethods/Indirects/nvalues/index.htm](http://wwwrcamnl.wr.usgs.gov/sws/fieldmethods/Indirects/nvalues/index.htm) pour un catalogue de valeurs de  $n = 1/K$  pour différentes rivières (américaines).

# Loi de Darcy-Weisbach

Pour des lits à fond lisse, la loi de Darcy-Weisbach donne de bons résultats

$$\tau_p = \rho \frac{f}{8} \bar{u}^2, \text{ avec :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{14,8 R_H} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right),$$

(formule de Colebrook-White où l'on remplace le diamètre hydraulique par  $4R_H$ ).

Cette équation non linéaire est complexe à résoudre et on lui préfère une forme approchée :

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 3,38 + 5,75 \log_{10} \frac{R_H}{d_{84}}.$$

Attention : le nombre de Reynolds est défini à partir du rayon hydraulique

$$\text{Re} = \frac{4R_H \bar{u}}{\nu}$$

# Loi de Chézy

La loi de Chézy est la formule historique, peu utilisée aujourd'hui si ce n'est pour obtenir des ordres de grandeur

$$\tau_p = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2,$$

avec  $C$  le coefficient de Chézy variant dans la fourchette 30–90  $\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}$  (du plus rugueux au plus lisse).

# Loi de Keulegan

Adaptée aux lits à gravier rugueux ( $h/k_s < 10$ ), la loi de Keulegan revient à dire que la contrainte à la paroi est de type Chézy, mais avec un coefficient

$C = \sqrt{g} \kappa^{-1} \ln(11h/k_s)$  fonction de la hauteur d'eau et de la rugosité, soit encore :

$$\tau_p = \frac{\kappa^2}{\ln^2(11h/k_s)} \rho \bar{u}^2,$$

avec  $\kappa$  la constante de von Kármán et  $k_s$  une taille caractéristique des rugosités du lit ( $k_s \approx 2d_{90}$ ). Actuellement, on préfère employer une loi puissance de type Manning-Strickler comme la formule de Parker (valable pour  $h/k_s < 5$ )

$$C = 8,10 \sqrt{g} \left( \frac{h}{k_s} \right)^{1/6}$$

# Synthèse des principales lois de frottement

Vitesse moyenne  $\bar{u}$  , hauteur normale  $h_n$  (pour un canal infiniment large), et pente de frottement

<i>loi de frottement</i>	$\bar{u}$	$h_n$	$j_f$
Manning-Strikler	$\bar{u} = K \sqrt{i} R_H^{2/3}$	$h_n = \left( \frac{q}{K \sqrt{i}} \right)^{3/5}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{K^2 R_H^{4/3}}$
Darcy-Weisbach	$\bar{u} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{i} R_H^{1/2}$	$h_n = \left( q \sqrt{\frac{f}{8gi}} \right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2 f(R_H)}{2g \cdot 4R_H}$
Chézy	$\bar{u} = C \sqrt{i} R_H^{1/2}$	$h_n = \left( q \frac{1}{C \sqrt{i}} \right)^{2/3}$	$j_f = \frac{\bar{u}^2}{C^2 R_H}$

# Hauteurs caractéristiques

---

Pour les écoulements à surface il existe deux hauteurs caractéristiques :

- la *hauteur normale*, qui correspond à la hauteur d'écoulement en régime permanent uniforme ;
- la *hauteur critique*, qui est la hauteur d'écoulement pour laquelle le nombre de Froude vaut 1.

Ces deux hauteurs jouent un rôle-clé.

# Hauteur normale

La hauteur normale est la profondeur moyenne d'eau en régime permanent uniforme. Elle se calcule en égalant contrainte pariétale et contrainte motrice. Pour Manning-Strickler, on a

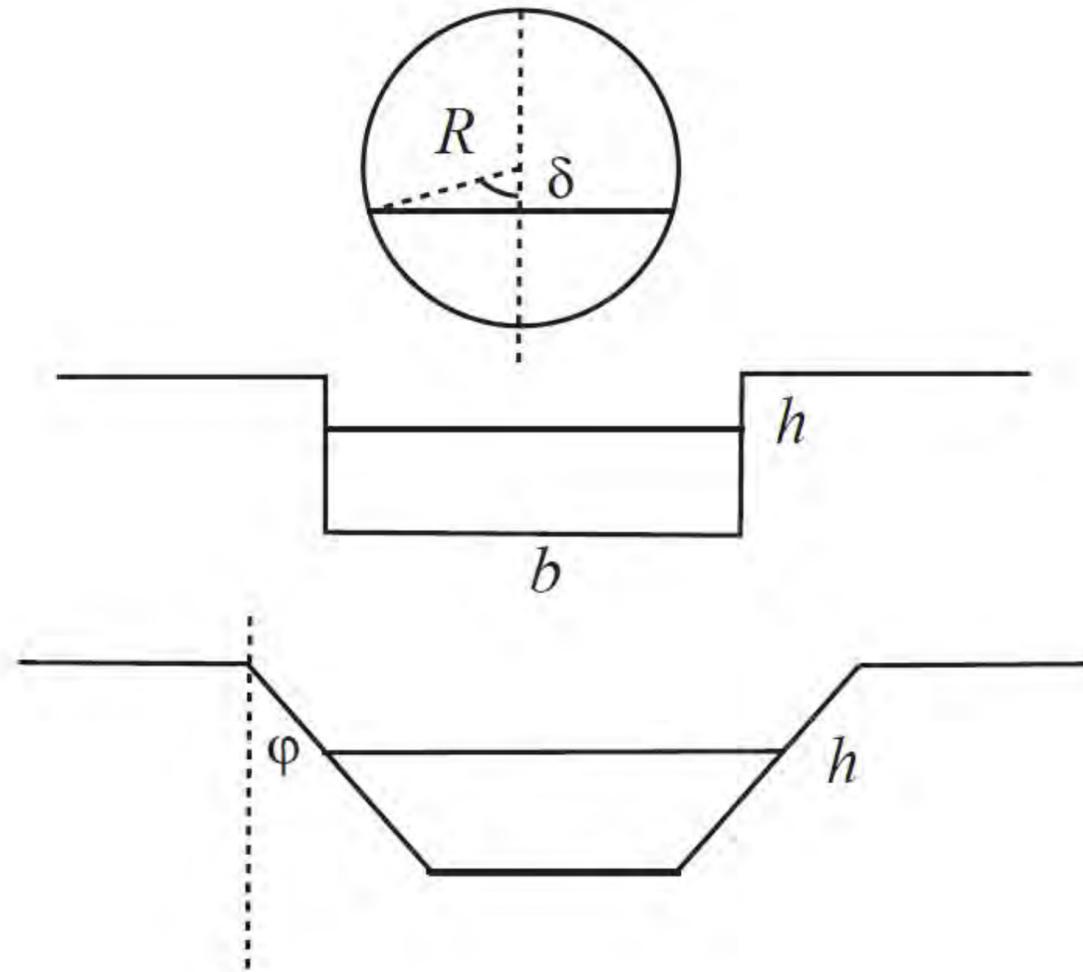
$$Q = \bar{h}B\bar{u} = KR_H^{2/3}\sqrt{i}S,$$

(avec  $S = \bar{h}B = f(h_n)$  la section d'écoulement,  $B$  la largeur au miroir,  $Q$  le débit total,  $\bar{h}$  la hauteur moyenne d'eau). Pour un canal infiniment large ( $B \gg h \Rightarrow R_H \approx h$ ) :

$$h_n = \left( \frac{q}{K\sqrt{i}} \right)^{3/5},$$

avec  $q$  le débit par unité de largeur. La hauteur normale est une fonction du débit et de la pente.

# Hauteur normale et section d'écoulement



type	circulaire	rectangulaire	trapézoïdal
$h$	$R(1 - \cos \delta)$	$h$	$h$
$S$	$R^2(\delta - \sin \delta \cos \delta)$	$Bh$	$(B + b)h/2$
$\chi$	$2R\delta$	$B + 2h$	$2h / \cos \phi + b$

# Hauteur critique

La hauteur critique étant définie comme étant  $\text{Fr}(h_c) = 1$ , on tire que :

$$h_c = \left( \frac{1}{g \cos \theta} \frac{Q^2}{B^2} \right)^{1/3},$$

avec  $Q$  le débit total et  $B$  la largeur au miroir. Dans le cas d'un canal rectangulaire, en introduisant le débit par unité de largeur  $q = Q/B$ , on tire :

$$h_c = \left( \frac{q^2}{g \cos \theta} \right)^{1/3}.$$

Dans la plupart des ouvrages, le terme  $\cos \theta$  est omis car la pente est faible et donc  $\cos \theta \approx 1$ .

# Résistance à l'écoulement

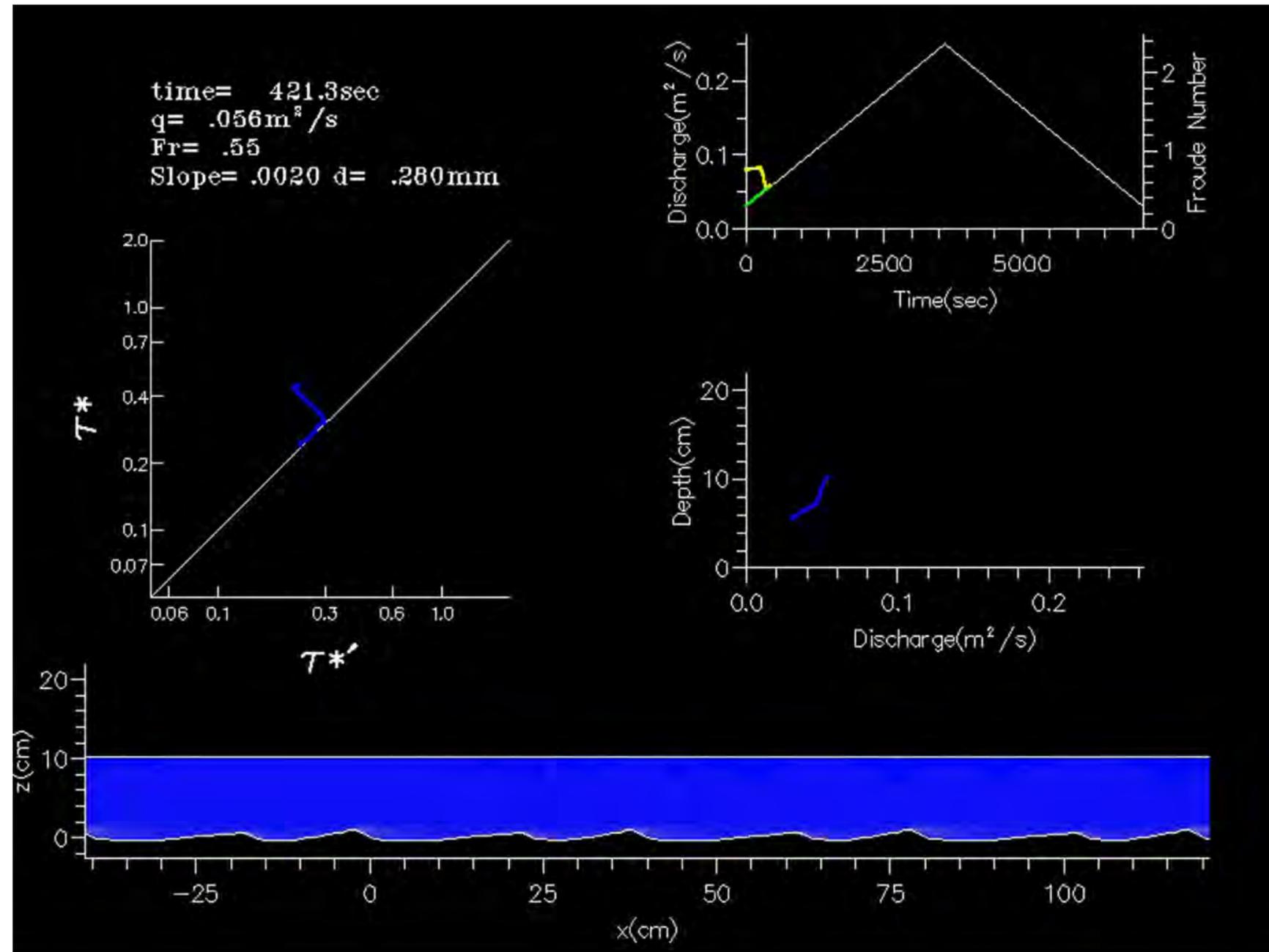
---

La résistance à l'écoulement traduit l'effet de la géométrie d'écoulement sur la dissipation d'énergie. On distingue deux processus

- dissipation locale contrôlée par la rugosité du fond (rugosité de peau) ;
- dissipation à plus grande échelle due aux structures morphologiques (rugosité de forme).

Ces deux processus peuvent varier dans le temps (pavage, déplacement des structures du lit).

# Résistance à l'écoulement



# Résistance à l'écoulement : effet de peau

Le coefficient de Manning-Strickler est donné en fonction de la granulométrie telle que la formule de Meyer-Peter et Müller

$$K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}},$$

ou bien la formule plus récente de Jäggi

$$K = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

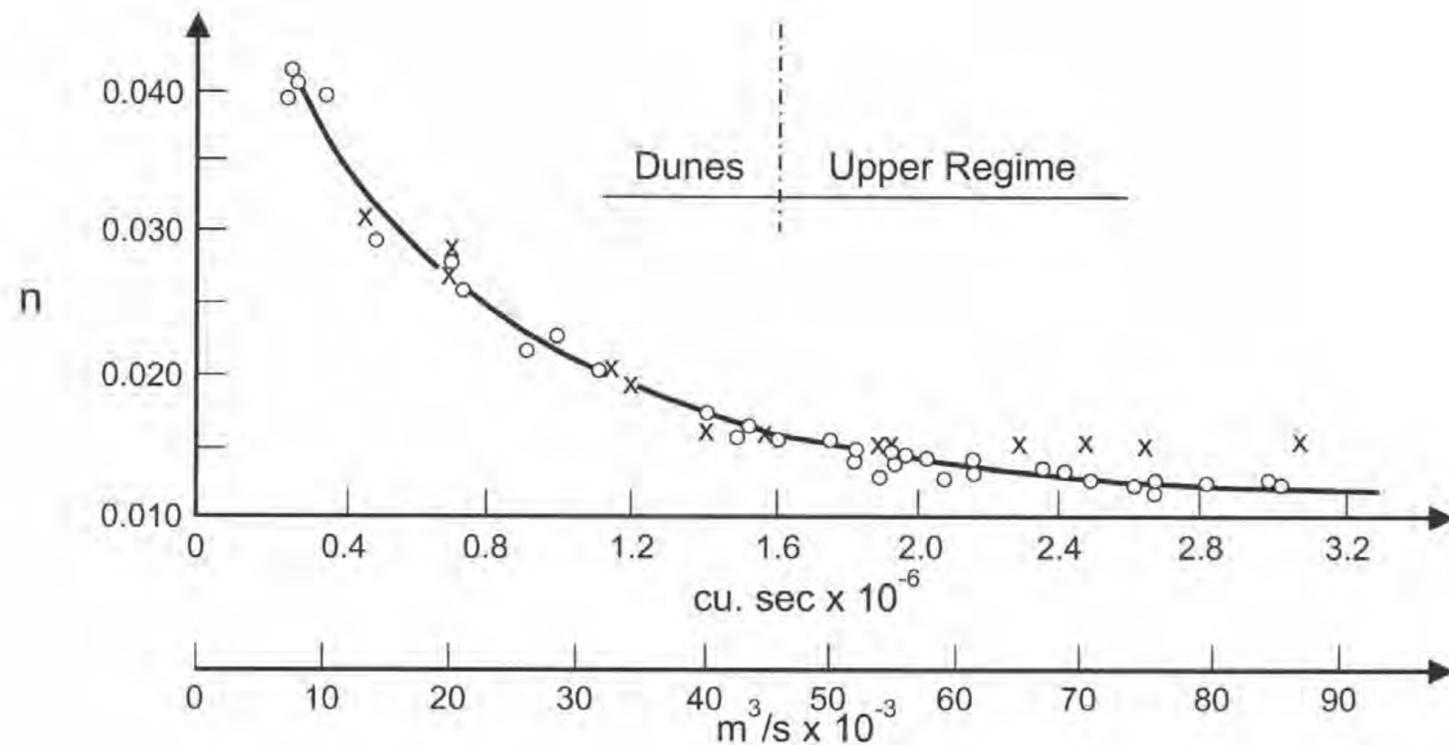
ou encore celle de Raudkivi

$$K = \frac{24}{d_{65}^{1/6}},$$

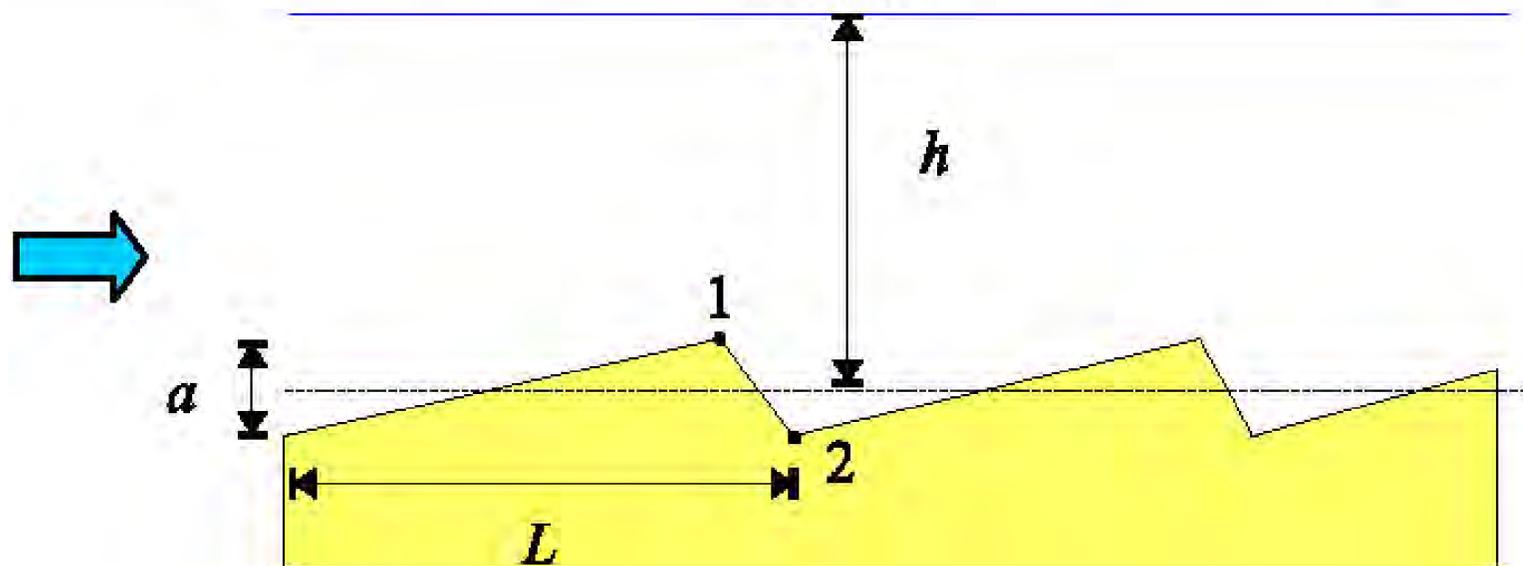
avec  $d_{65}$  le diamètre des particules tel que 65 % (en poids) des grains du lit aient un diamètre inférieur.  $K$  peut varier avec la granulométrie du lit.

# Résistance à l'écoulement : effet de forme

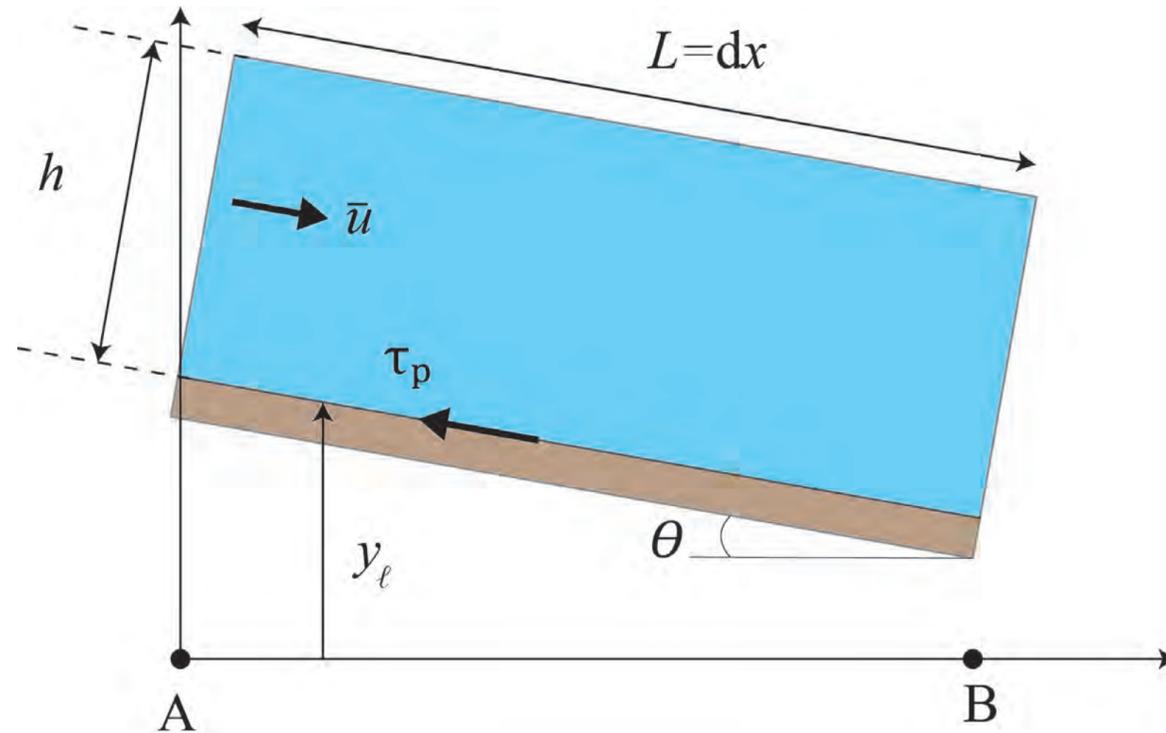
Variation de  $n = 1/K$  au cours d'une crue.



Lorsque le lit présente des structures morphologiques (comme des dunes), une sinuosité (méandres), et un fond mobile, la résistance à l'écoulement peut croître de façon notable. La dissipation d'énergie est due aux grandes structures turbulentes générées par les formes du lit.



# Courbes de remous : canal large



Théorème de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{1}{\rho g} \Delta(\Psi + p + k) = \Delta \left( y_l + h + \frac{\bar{u}^2}{2g} \right) = \Delta H,$$

On fait l'hypothèse d'un régime permanent ( $q = \bar{u}h = cste$ ) et graduellement varié ( $h$  continue,  $dH = -j_f dx < 0$ ).

# Courbes de remous : canal large

On différentie par rapport à  $x$  :

$$\frac{dy_\ell}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{d\bar{u}^2}{dx} = \frac{dH}{dx},$$

soit

$$-\tan \theta + \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{h^2} \right) = -j_f.$$

En posant  $i = \tan |\theta|$  et comme  $dh^{-2}/dx = -2h'h^{-3}$ , on a finalement

$$\left( 1 - \frac{q^2}{gh^3} \right) \frac{dh}{dx} = j_f - i.$$

Or  $Fr^2 = \bar{u}^2/(gh) = q^2/(gh^3)$ .

# Courbes de remous : canal large

L'équation de la surface libre ou de la *courbe de remous* s'écrit :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{j_f - i}{Fr^2 - 1} = \frac{N(h)}{D(h)}$$

avec  $Fr^2 = \bar{u}^2 / (gh)$  une fonction de  $h(x)$ . C'est une équation différentielle non linéaire du premier ordre.

- quand  $N = 0$  c'est le régime permanent uniforme ;
- quand  $D = 0$  la tangente de la courbe  $h(x)$  est verticale : variation brutale de hauteur d'eau. On est alors en dehors du cadre de nos hypothèses... Lorsque  $Fr = 1$ , l'écoulement ne peut être décrit par l'équation de la courbe de remous.

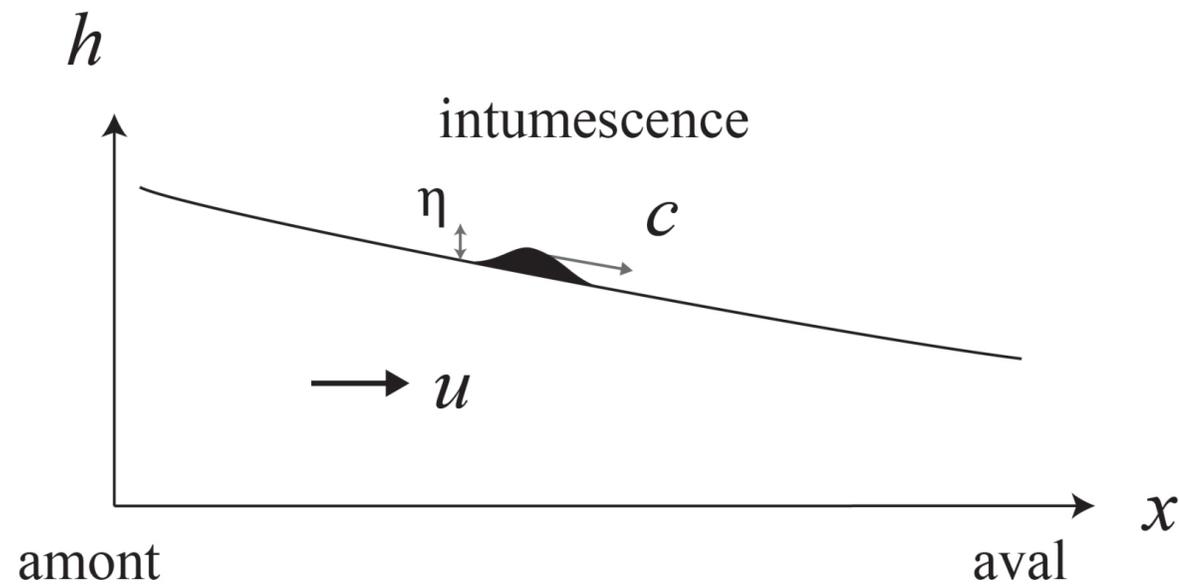
# Courbes de remous : canal quelconque

Pour des canaux quelconques, on peut montrer que la définition du nombre de Froude est identique (puisque  $h = S/B$ ). En revanche l'équation de remous est plus complexe car il faut tenir compte des éventuelles variations de la largeur au miroir  $B$  dans la direction d'écoulement ; on montre qu'on aboutit à :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho g S \cos \theta} \frac{\chi \tau_p - \rho g S \sin \theta - \rho h \bar{u}^2 B'(x)}{\text{Fr}^2 - 1} = \frac{j_f - i - \text{Fr}^2 h/B}{\text{Fr}^2 - 1},$$

avec  $\text{Fr} = \bar{u}/\sqrt{gh} = Q\sqrt{B}/\sqrt{gS^3}$  et  $h = S/B$ .

# Courbes de remous : propagation de l'information



Équation des ondes (linéaires) en eau peu profonde au repos :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Rightarrow c_{\pm} = \pm \sqrt{gh} \text{ célérité des ondes}$$

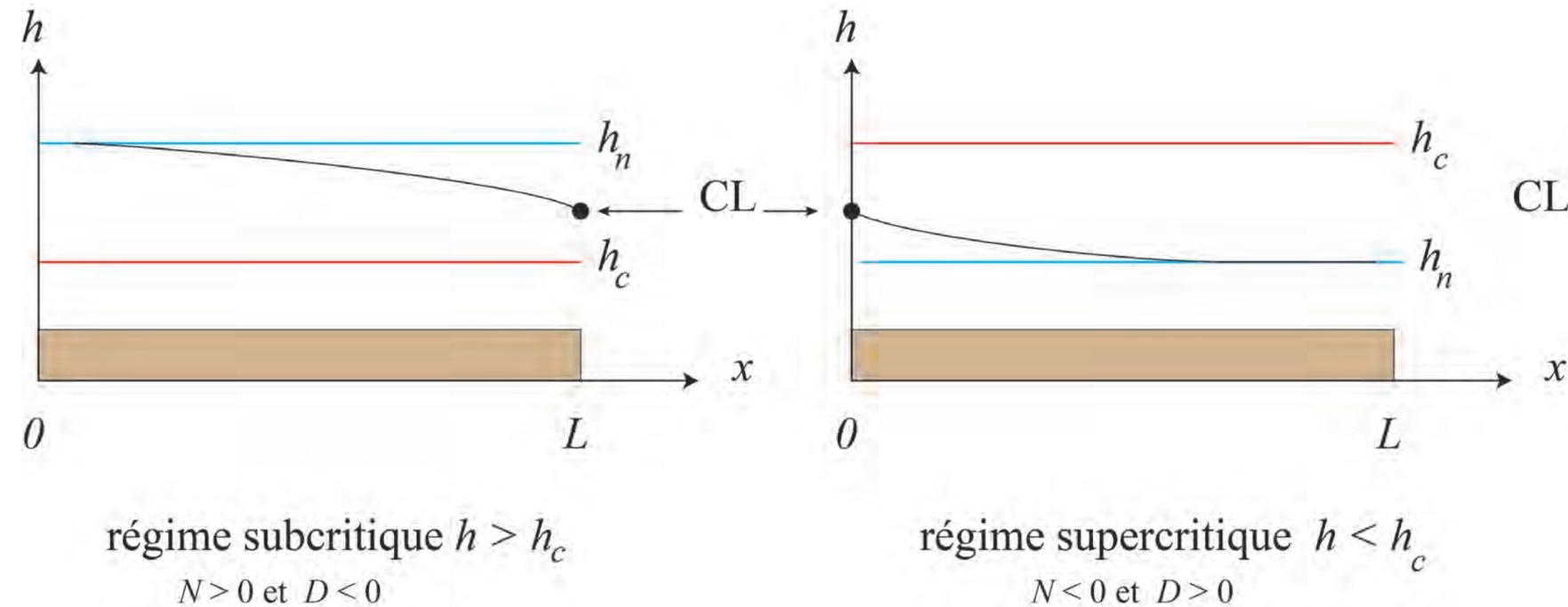
Pour un écoulement d'eau à la vitesse  $\bar{u}$ , les ondes se propagent à la vitesse

$$c_{\pm} = \bar{u} \pm \sqrt{gh} = \sqrt{gh} \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} \pm 1 \right) = \sqrt{gh} (\text{Fr} \pm 1)$$

# Régimes sub- et supercritiques

- régime *subcritique* :  $Fr < 1$ , donc  $c_- = \bar{u} - \sqrt{gh} < 0$  et  $c_+ = \bar{u} + \sqrt{gh} > 0$ . Les ondes se propageant dans les deux sens. La condition à la limite de l'équation de la courbe de remous est fixée par l'aval ;
- régime *supercritique* :  $Fr > 1$ , donc  $c_- = \bar{u} - \sqrt{gh} > 0$  et  $c_+ = \bar{u} + \sqrt{gh} > 0$ . Les ondes se propageant dans le même sens que l'écoulement. La condition à la limite de l'équation de la courbe de remous est fixée par l'amont ;
- régime *critique* :  $Fr \rightarrow 1$ , donc  $c_- \rightarrow 0$  et  $c_+ \rightarrow 0$  et outre  $D \rightarrow 0$ . Quand on résout numériquement l'équation de la courbe de remous, on ne peut pas franchir continûment la zone  $h = h_c$  (Froude  $Fr \rightarrow 1$ ). Une discontinuité ( $h' \rightarrow \infty$ ) se produit : c'est un *ressaut hydraulique*.

# Forme de la courbe de remous

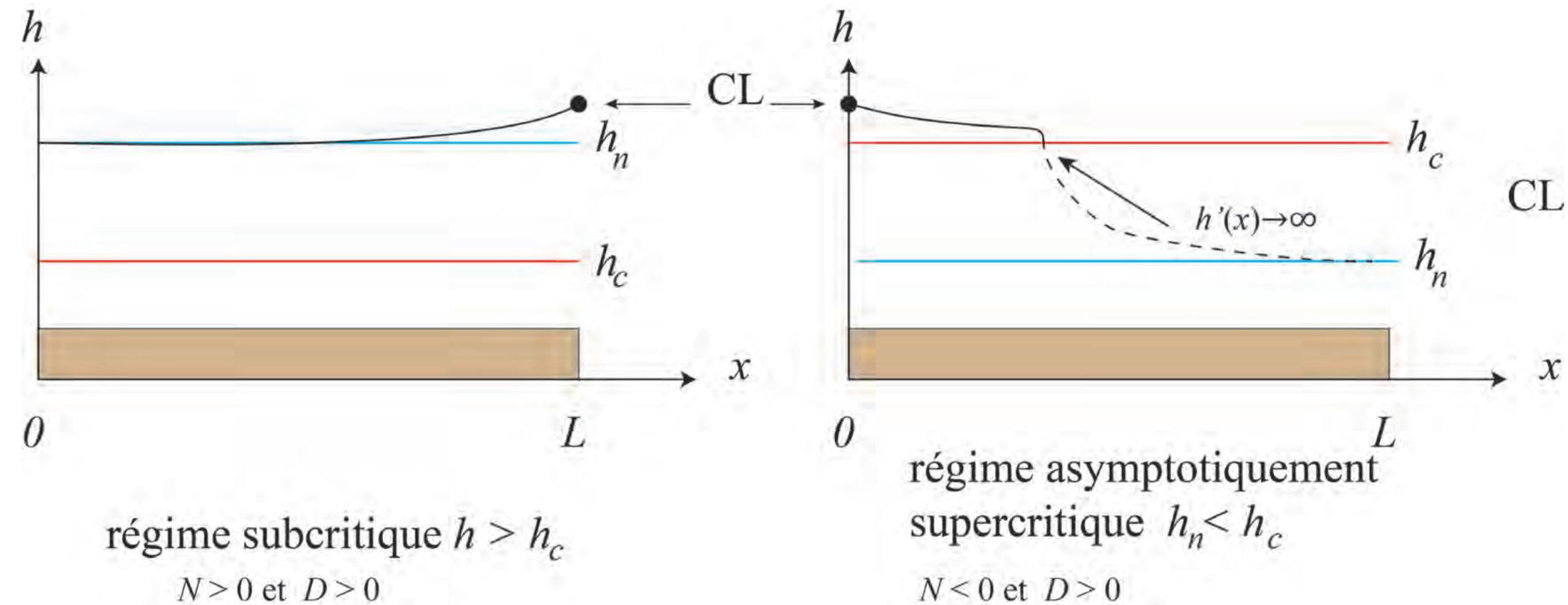


Résolution de l'équation sur  $[0, L]$  :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{j_f - i}{Fr^2 - 1} = \frac{N(h)}{D(h)} = i \frac{(h_n/h)^{10/3} - 1}{(h_c/h)^3 - 1}$$

avec  $j_f = \bar{u}^2 / (K^2 h^{4/3})$  (loi de Manning-Strickler),  $h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ , et  $h_n = (q / (K \sqrt{i}))^{3/5}$ . On a  $h(x) \rightarrow h_n$ .

# Forme de la courbe de remous



Résolution de l'équation sur  $[0, L]$  :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{j_f - i}{Fr^2 - 1} = \frac{N(h)}{D(h)} = i \frac{(h_n/h)^{10/3} - 1}{(h_c/h)^3 - 1}$$

La courbe  $h(x)$  tend toujours vers  $h_n$ , mais si elle rencontre  $h = h_c$ , un ressaut hydraulique se produit.

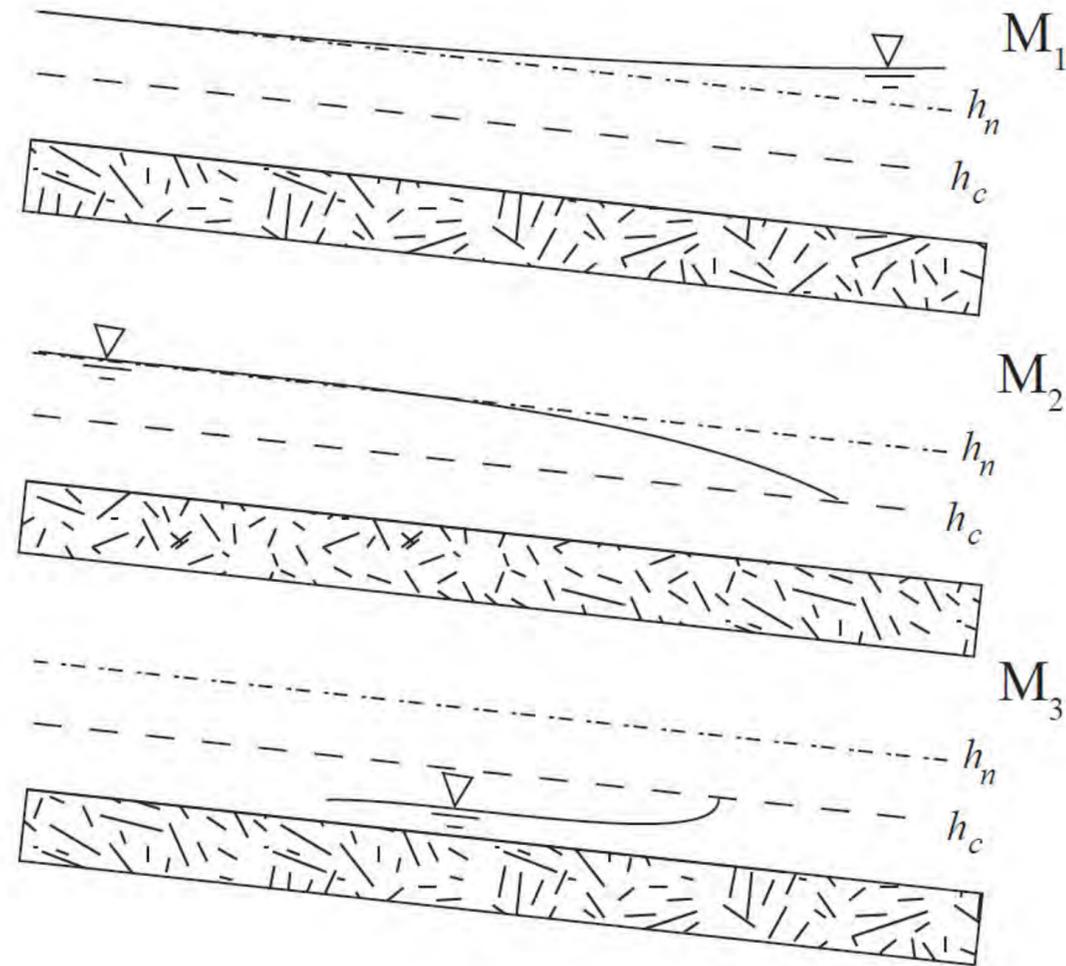
# Classification des régimes d'écoulement

Il y a classification des courbes de remous en fonction des valeurs respectives de  $h$ ,  $h_n$ , et  $h_c$ . Quand la pente est positive ( $i > 0$ ), on a :

- profil de type M (« mild ») pour pente douce quand  $h_n > h_c$  ;
- profil de type S (« steep ») pour pente forte quand  $h_n < h_c$ .

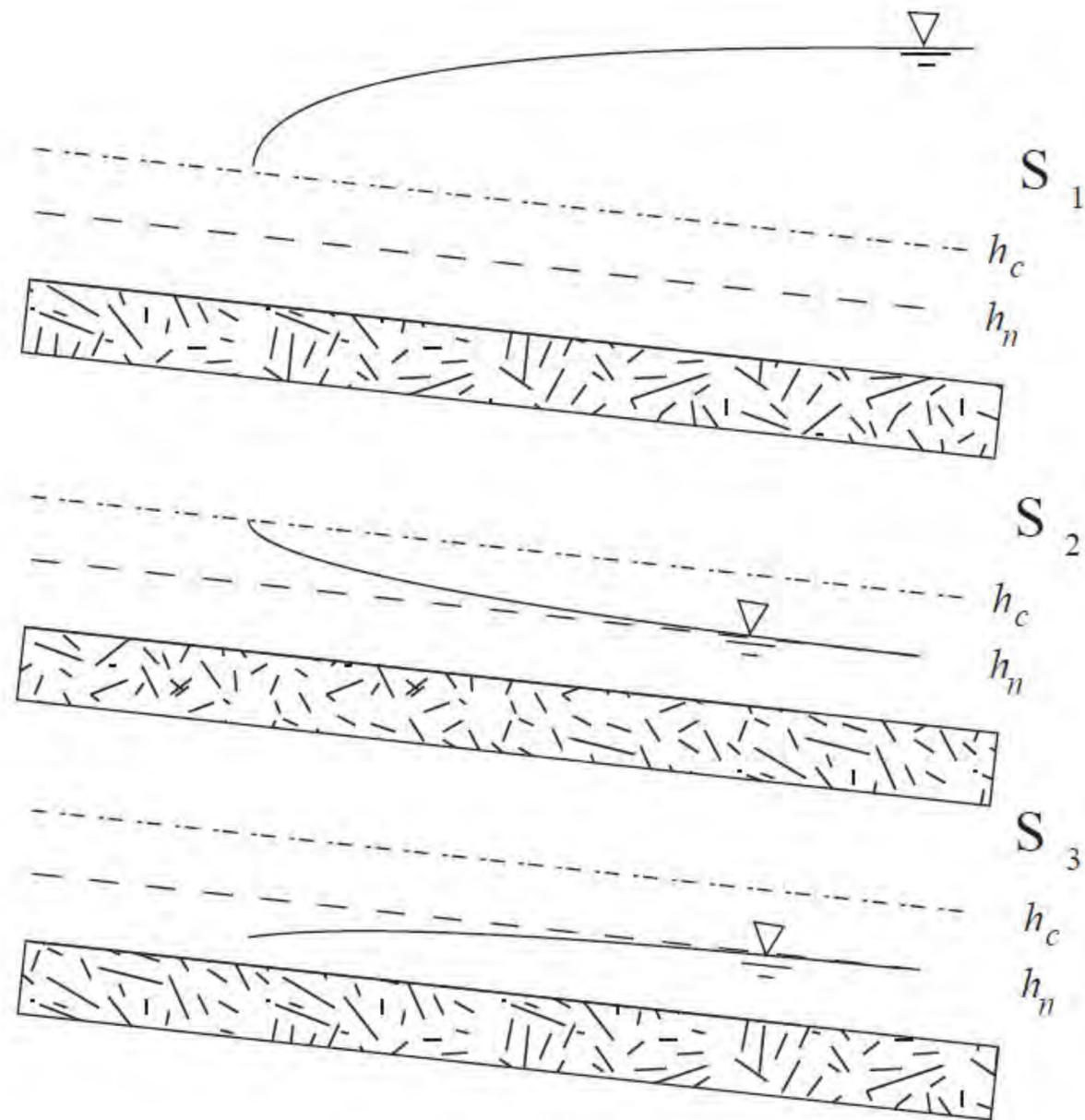
Il faut ajouter les profils critiques C quand  $h = h_c$ . Lorsque la pente est nulle, la hauteur normale devient infinie, la courbe de remous devient horizontale ; on parle de profil H. Lorsque la pente est négative, on parle de profil adverse A. Notons qu'il n'y a pas de hauteur normale dans ce cas-là.

# Classification des régimes d'écoulement : courbes M



- $h > h_n > h_c$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'amont et sa tangente devient horizontale à l'aval.
- $h_n > h > h_c$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'amont. Le profil est décroissant ( $h' < 0$ ). Sa tangente aurait tendance à devenir verticale à l'aval car la courbe de remous croise la hauteur critique.
- $h_n > h_c > h$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'amont. Le profil est croissant ( $h' > 0$ ). À l'aval il se forme un ressaut.

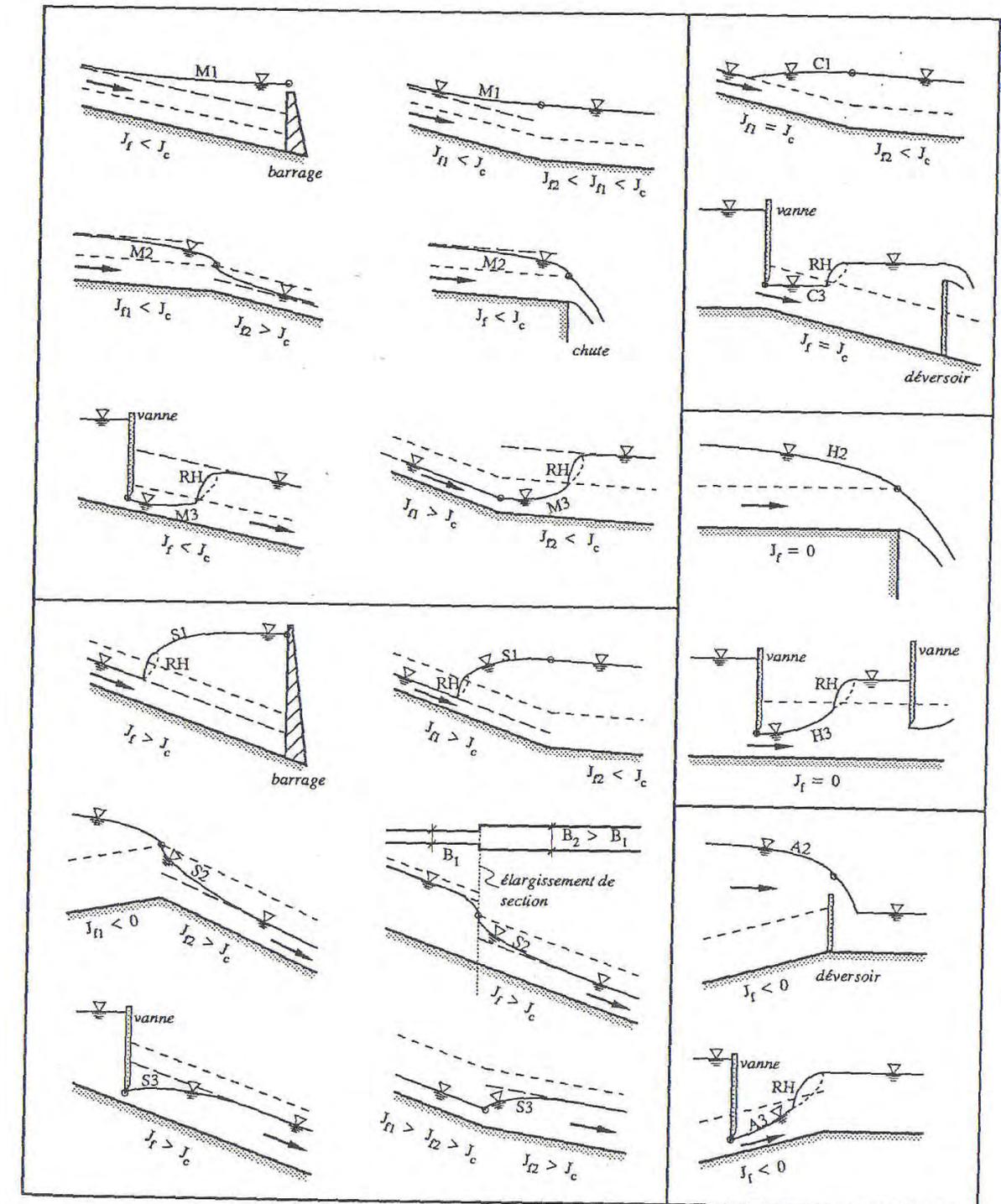
# Classification des régimes d'écoulement : courbes S



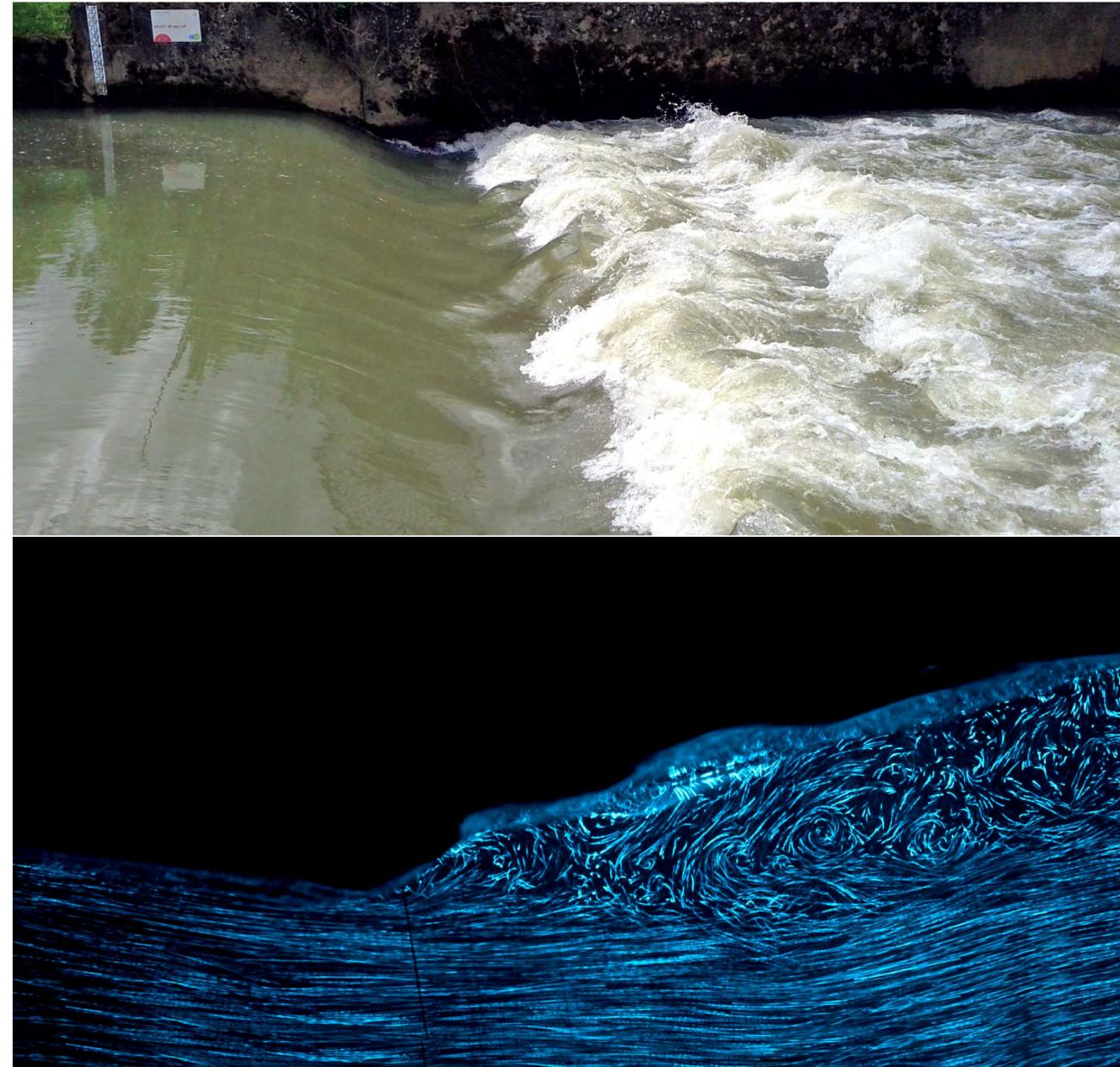
- $h > h_c > h_n$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'aval et sa tangente tendrait à devenir verticale à l'amont car la courbe de remous croise la hauteur critique.
- $h_c > h > h_n$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'aval. Le profil est décroissant ( $h' < 0$ ). Sa tangente aurait tendance à devenir verticale à l'amont.
- $h_c > h_n > h$  : la courbe est tangente à  $h_n$  à l'aval. Le profil est croissant ( $h' > 0$ ). À l'aval il se forme un ressaut.

# Classification des régimes d'écoulement : synthèse

Conditions	$\frac{h_n}{h}$	Signe num.	$\frac{h_c}{h}$	Signe dén.	Signe $\frac{dh}{dx}$	Changement de profondeur	Nom	Figures échelle verticale exagérée
$J_f > 0$ $J_f < J_c$ $h_n > h_c$	$< 1$ $< 1$ $< 1$	$+$ $+$ $+$	$< 1$ $> 1$ $< 1$	$+$ $-$ $+$	$+$ $-$ $-$	croît pas possible décroît	M1 M2 M3	
$J_f > 0$ $J_f > J_c$ $h_n < h_c$	$< 1$ $< 1$ $> 1$	$+$ $+$ $-$	$< 1$ $> 1$ $> 1$	$+$ $-$ $-$	$+$ $-$ $+$	croît décroît croît	S1 S2 S3	
$J_f > 0$ $J_f = J_c$ $h_n = h_c$	$< 1$ $< 1$ $> 1$	$+$ $+$ $-$	$< 1$ $> 1$ $> 1$	$+$ $-$ $-$	$+$ $+$ $+$	croît croît croît	C1 C3	
$J_f = 0$ $h_n = \infty$	$-$ $-$	$-$ $-$	$< 1$ $> 1$	$+$ $-$	$-$ $+$	décroît croît	H2 H3	
$J_f < 0$ $h_n < 0$	$< 1$ $< 1$	$-$ $-$	$< 1$ $> 1$	$+$ $-$	$-$ $+$	décroît croît	A2 A3	



# Ressaut hydraulique



Ressaut hydraulique : variation brutale de  $h$  lors du passage super- à subcritique

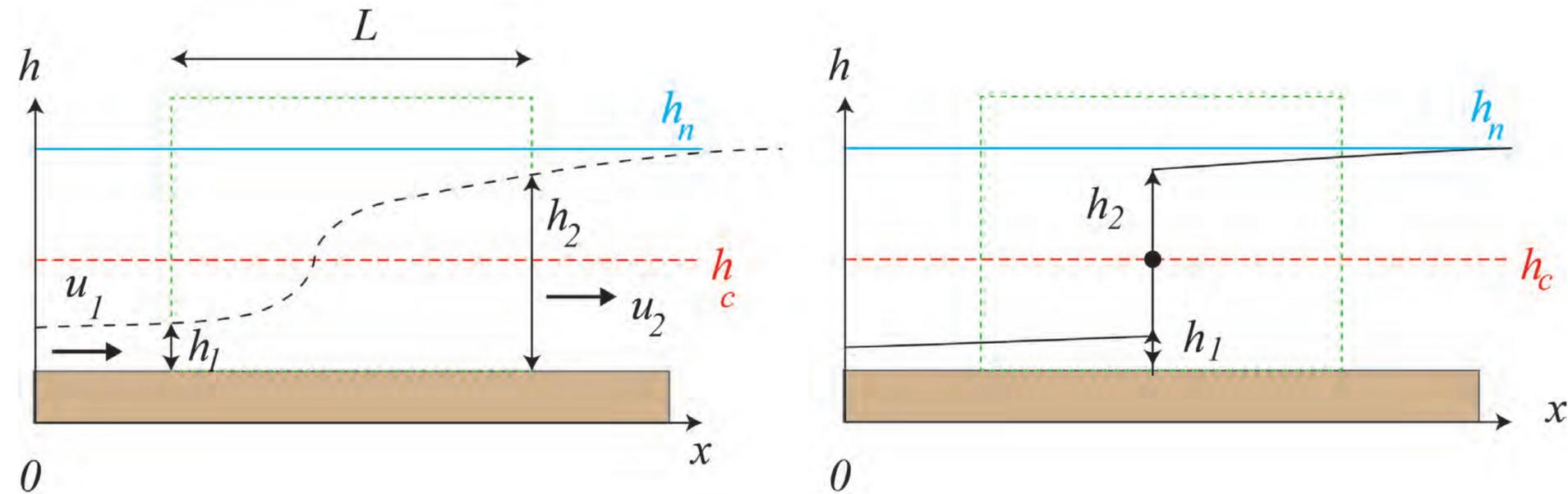
# Ressaut hydraulique



Mascaret : ressaut mobile (onde de choc). Rivière Zavràgia (Tessin) en août 1987.

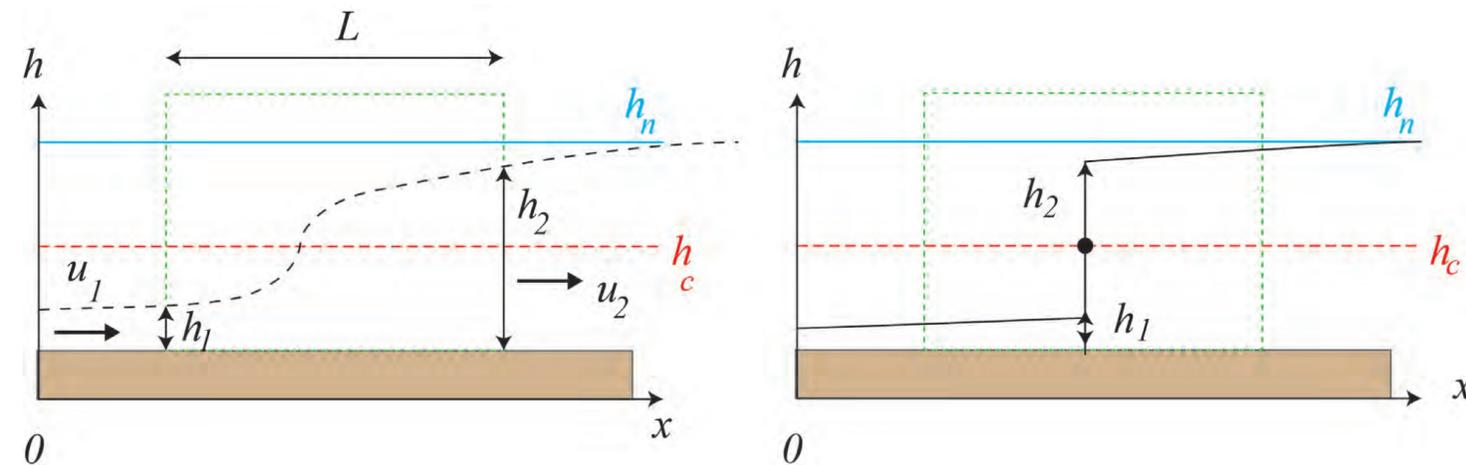
Voir cours de master

# Ressaut hydraulique



Le ressaut hydraulique est une zone tourbillonnaire qui s'étend sur une certaine longueur  $L$  et se caractérise par une variation brutale de hauteur. Mathématiquement, on va considérer qu'il s'agit d'une discontinuité, donc qu'en un point la hauteur passe de  $h_1$  à  $h_2$ .

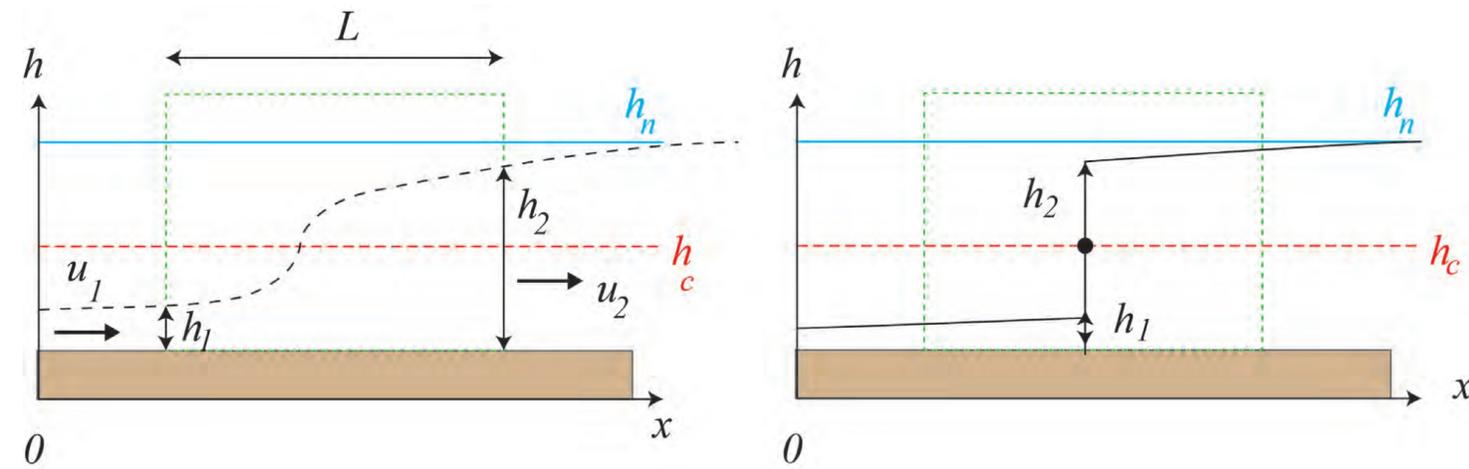
# Ressaut hydraulique



Considérons un volume de contrôle de longueur  $L$ . On fait les hypothèses suivantes

- le fond est peu rugueux et de pente négligeable ;
- l'écoulement est permanent et le débit par unité de largeur vaut  $q$  ;
- l'écoulement est unidirectionnel ;
- le ressaut est immobile (sa vitesse de déplacement est nulle) ;
- la pression est hydrostatique loin du ressaut ;
- le profil de vitesse est uniforme.

# Ressaut hydraulique



Les équations de conservation sur le volume de contrôle donnent :

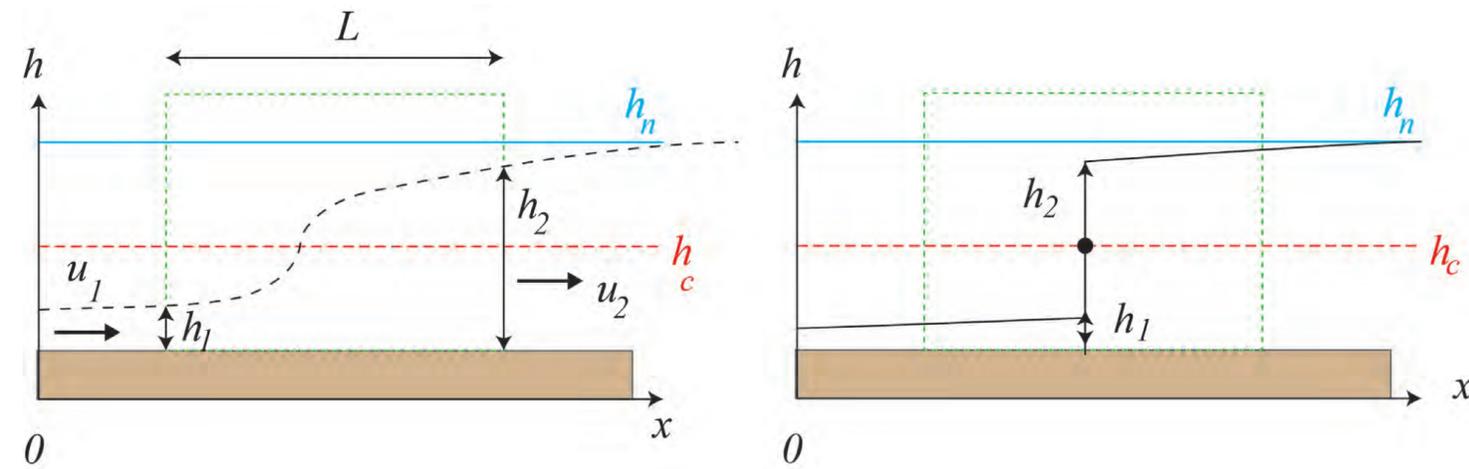
- L'équation de continuité donne :  $u_1 h_1 = u_2 h_2 = q$ .
- L'équation de quantité de mouvement

$$\int_{\partial V} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_{\partial V} p \mathbf{n} dS + \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS$$

projetée le long de la direction d'écoulement donne :

$$\rho q (u_2 - u_1) = -L \tau_p + \frac{1}{2} \rho g (h_1^2 - h_2^2).$$

# Ressaut hydraulique

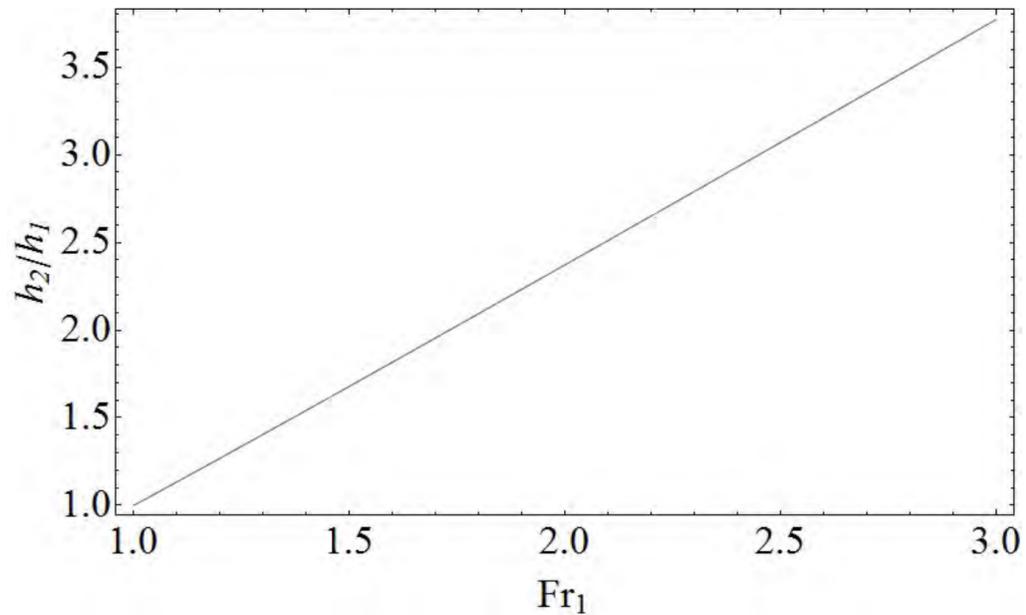


On suppose que l'on connaît les conditions à l'amont ( $h_1$  et  $u_1$ ) et on veut déduire ce qui se passe à l'aval. Quand on peut négliger le frottement  $\tau_p$ , on tire :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right).$$

Cette relation s'appelle relation de conjugaison car elle permet de relier (conjuguer) deux arcs de courbes de remous.

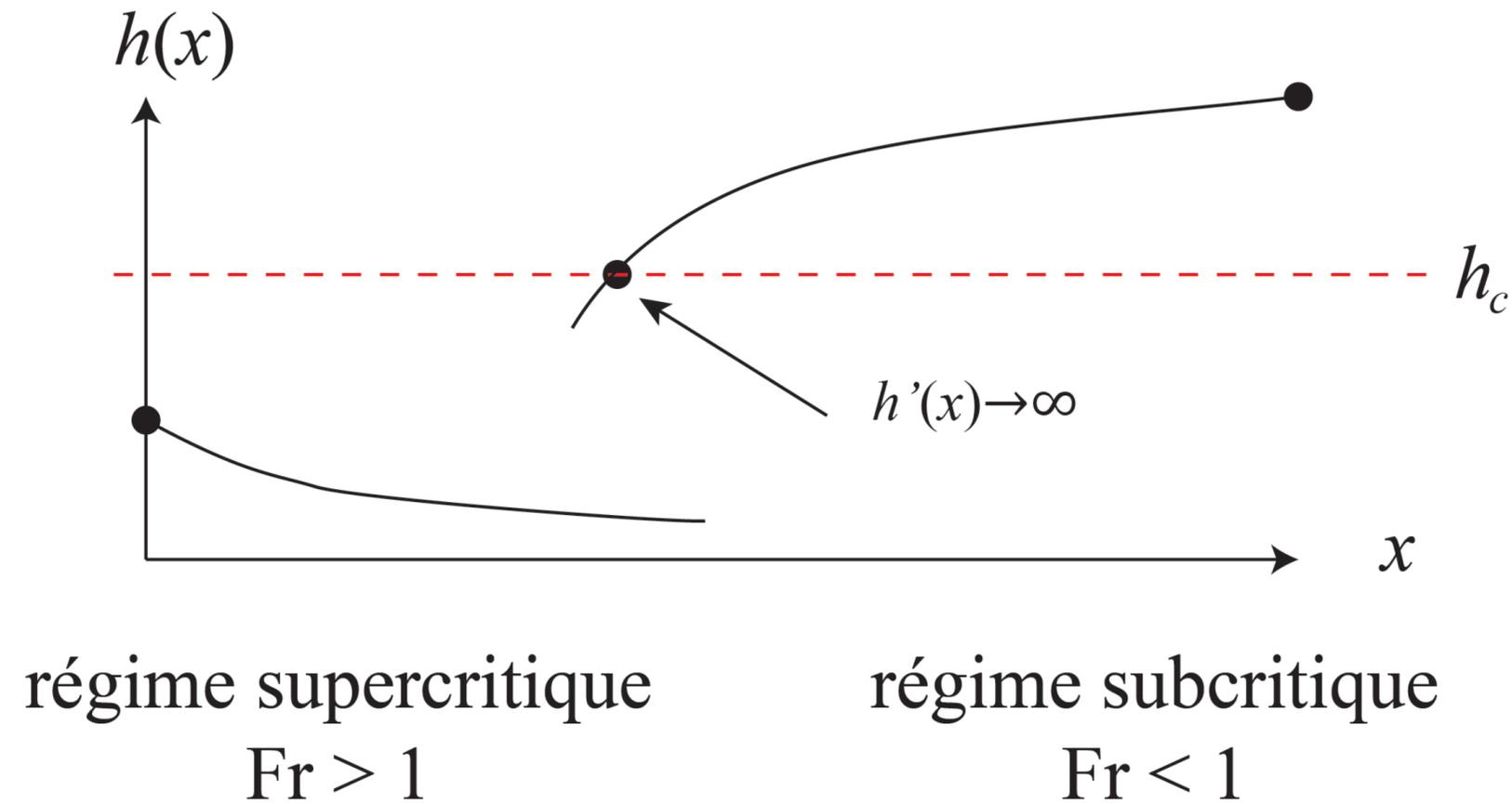
# Ressaut hydraulique



Le rapport  $h_2/h_1$  varie de façon à peu près linéaire avec le nombre de Froude amont  $Fr_1$ . La perte de charge associée s'écrit :

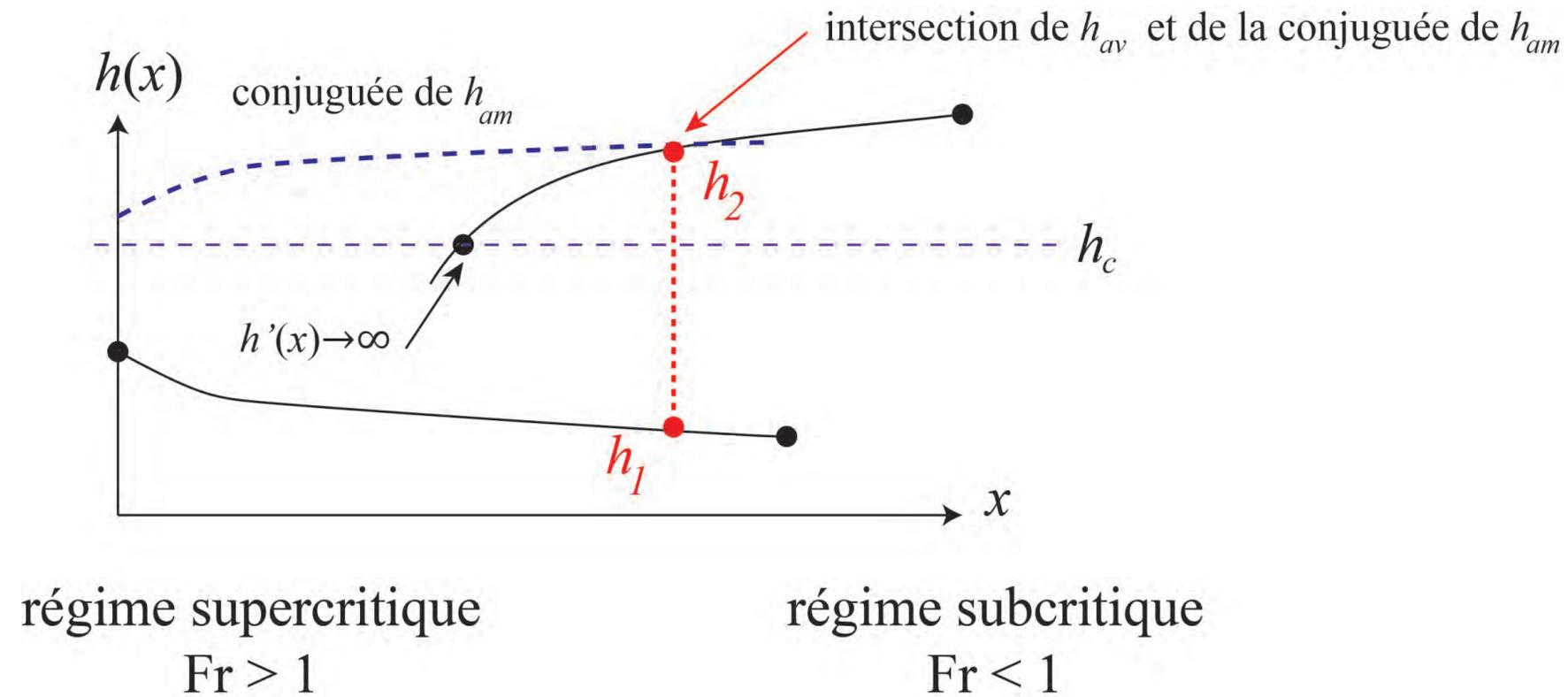
$$\Delta H = H_2 - H_1 = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2} = h_1 \frac{\left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 3\right)^3}{16 \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right)}$$

# Conjugaison des courbes



Un ressaut prend place entre deux branches super- et subcritique. Comment le positionner ?

# Conjugaison des courbes

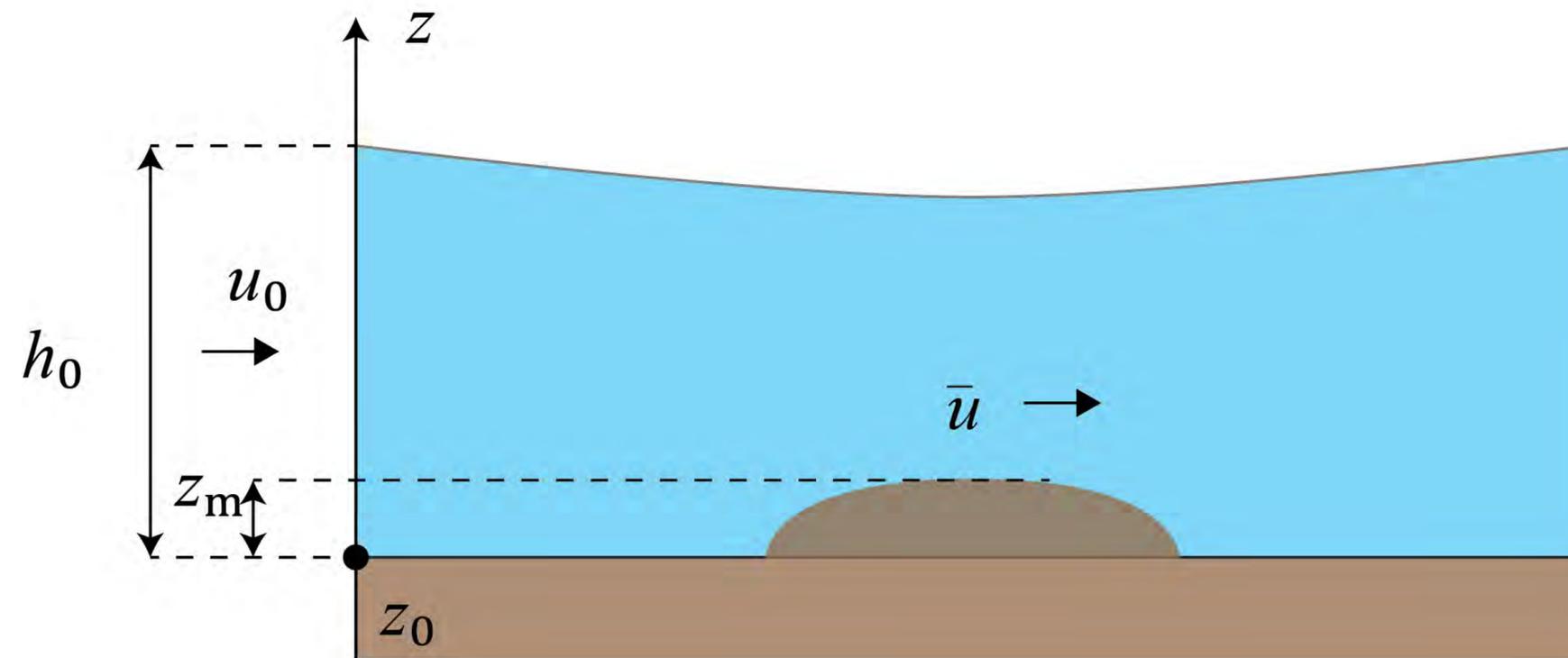


On calcule la courbe conjuguée de la branche amont  $h_{am}$  que l'on note  $h = h_2^c(x)$

$$\frac{h_2^c(x)}{h_{am}(x)} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1^2(x)} - 1 \right)$$

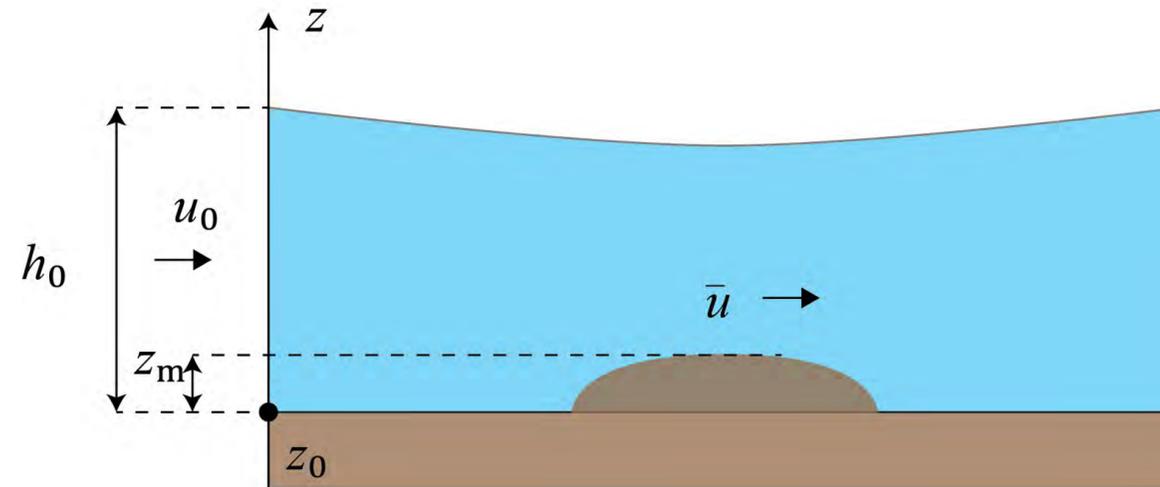
L'intersection de  $h_2^c(x)$  et  $h_{av}(x)$  donne la position du ressaut et  $h_2$ .

# Écoulement au-dessus d'un obstacle



Écoulement d'un débit (par unité de largeur)  $q = h_0 u_0$  en régime permanent. Le nombre de Froude à l'amont est  $F_0 = u_0 / \sqrt{g h_0}$ .

# Écoulement au-dessus d'un obstacle



Sous forme différentielle, le théorème de Bernoulli nous dit que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z \right) = 0,$$

tandis que la conservation du débit entraîne

$$\frac{d}{dx} (h\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u}h = u_0h_0.$$

# Écoulement au-dessus d'un obstacle

En tout point  $x$ , on a aussi :

$$\frac{\bar{u}^2}{2g} + h + z = \frac{\bar{u}_0^2}{2g} + h_0 + z_0,$$

qui peut se transformer en divisant par  $h_0$  (et avec  $z_0 = 0$ )

$$\frac{1}{2} \left( F_0 \frac{h_0}{h} \right)^2 + \frac{h}{h_0} + \frac{z}{h_0} = \frac{1}{2} F_0^2 + 1.$$

Si l'on différentie cette équation par  $x$ , on obtient

$$\left( \frac{\bar{u}^2}{gh} - 1 \right) \frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

# Écoulement au-dessus d'un obstacle

$$\left(\frac{\bar{u}^2}{gh} - 1\right) \frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

Conséquences :

- sur la crête de l'obstacle ( $z = z_m$ ) on doit avoir soit  $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh} = 1$  (écoulement critique) soit  $h' = 0$ ;
- chaque fois que  $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh} = 1$  (écoulement critique),  $z' = 0$ ;
- un écoulement subcritique ( $F_0 < 1$ ) reste subcritique (et réciproquement pour un écoulement supercritique);
- il existe une hauteur maximale d'obstacle associée à un nombre de Froude  $Fr = 1$

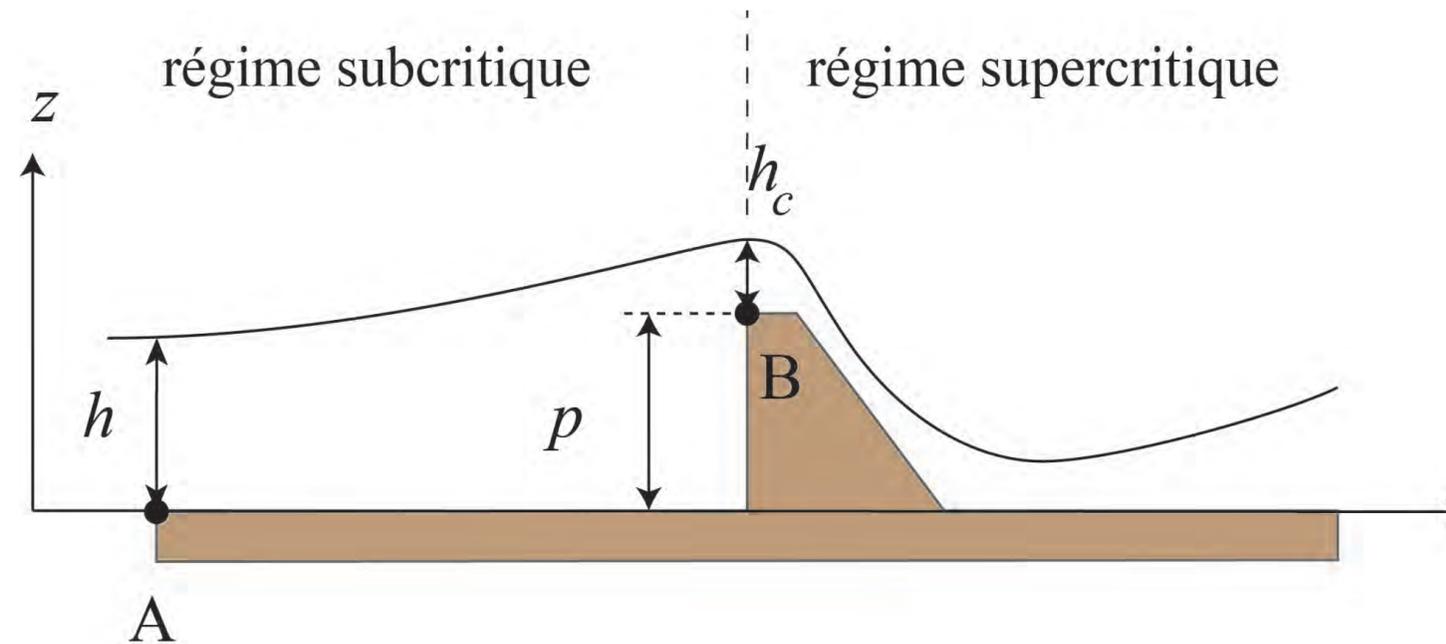
$$\frac{z_{max}}{h_0} = 1 - \frac{3}{2}F_0^{2/3} + \frac{1}{2}F_0^2.$$

# Chute d'eau



Le passage sub- à supercritique s'observe pour des ouvrages avec des chutes d'eau, des cascades, etc.

# Chute d'eau



Conservation de la charge hydraulique entre A et B :

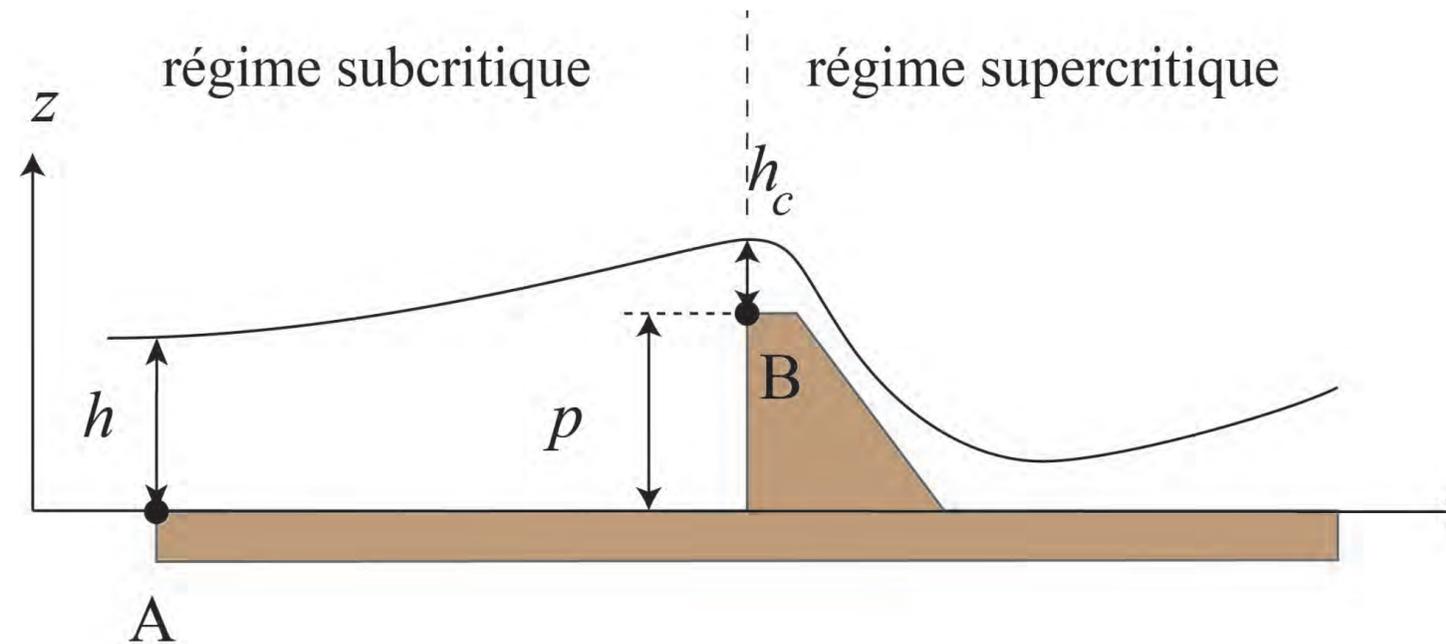
$$z_A + h_A + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + h_B + \frac{u_B^2}{2g}.$$

Hypothèse : la hauteur critique est atteinte au sommet de l'obstacle ( $p$  pelle)

$$h_B = h_c = \sqrt[3]{q^2/g},$$

La conservation de la masse implique :  $q = u_A h_A = u_B h_B$ .

# Chute d'eau

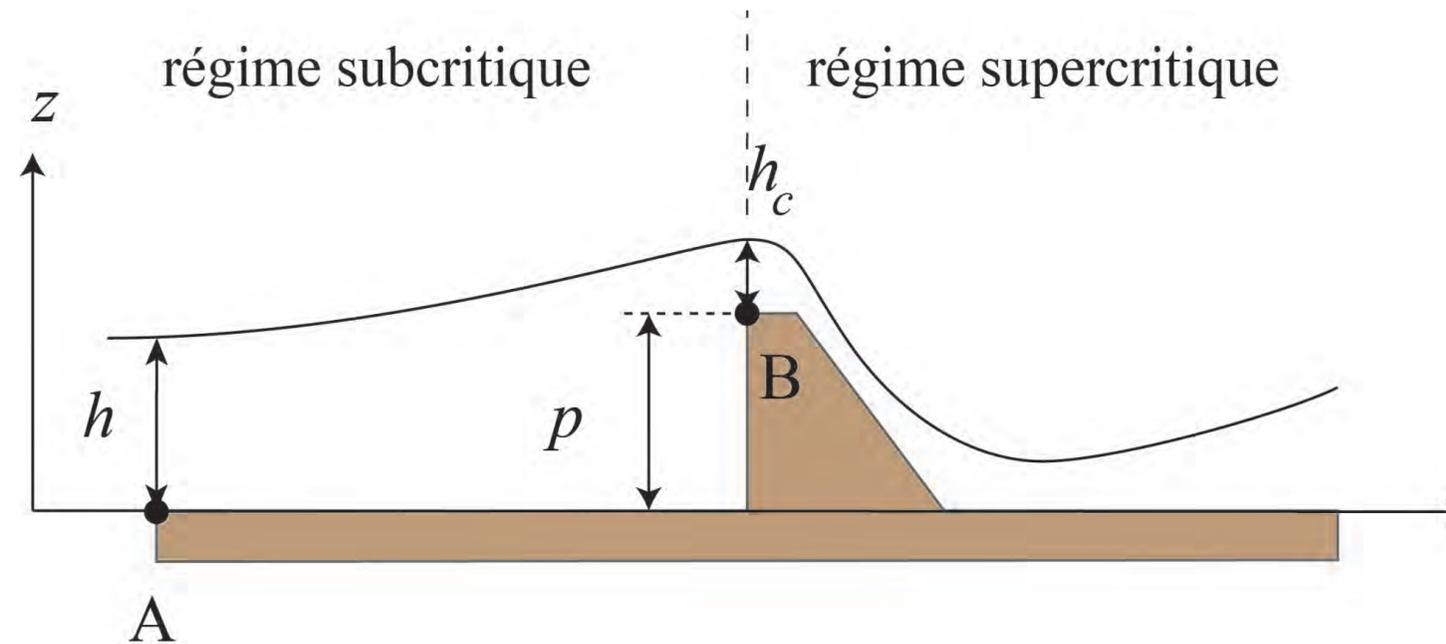


Conservation de la charge hydraulique entre A et B :

$$h + \frac{q^2}{2gh^2} = p + \frac{q^{2/3}}{\sqrt[3]{g}} + \frac{q^{4/3}}{2g}\sqrt[3]{g}.$$

C'est une équation polynomiale de degré 3 en  $h$  (ou  $q^{2/3}$ ).

# Chute d'eau

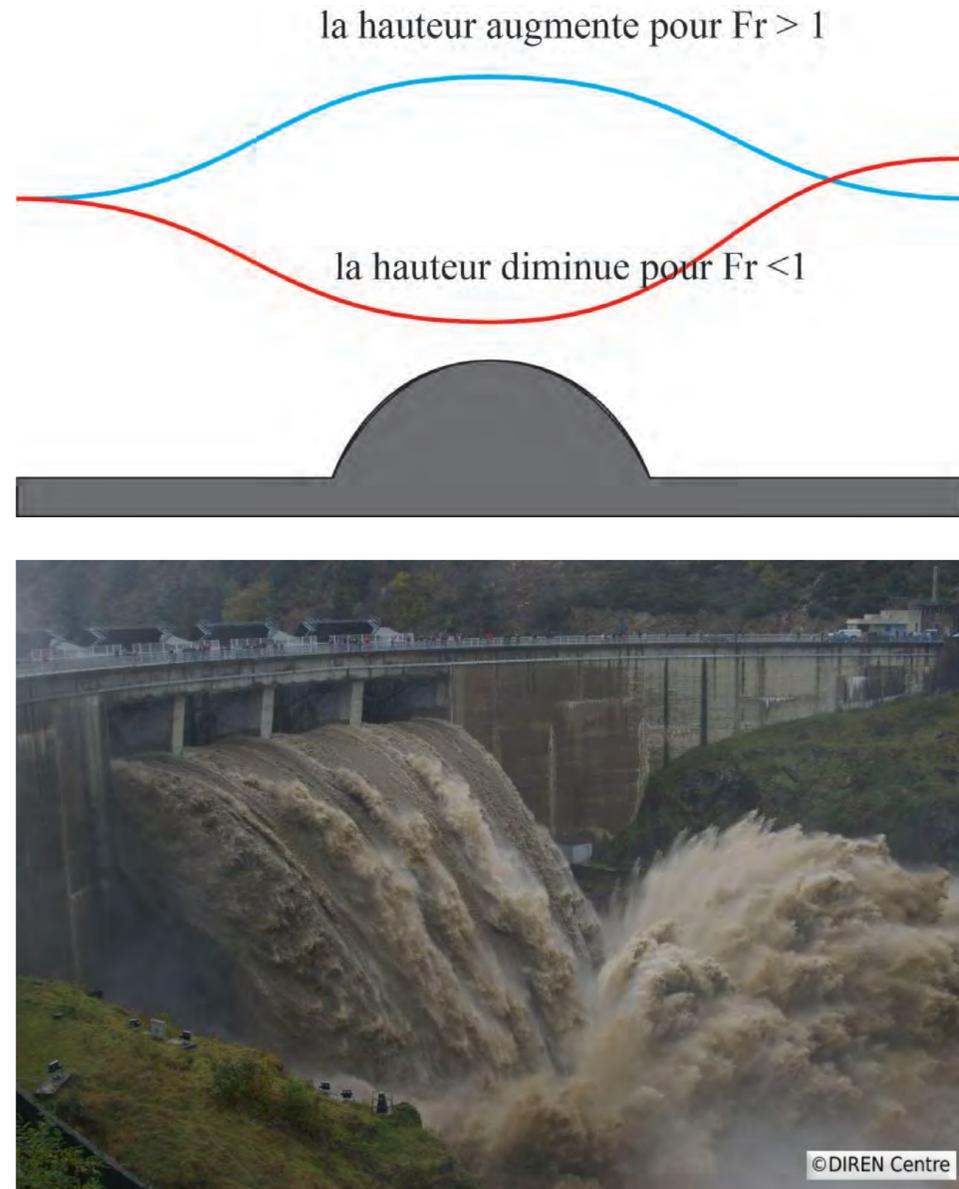


L'équation du seuil s'écrit aussi en fonction de la charge hydraulique à l'amont (en A). C'est l'équation du seuil (dénoyé) :

$$H = h + \frac{q^2}{2gh^2} \Rightarrow q = C_D \sqrt{g} (H - p)^{3/2},$$

avec  $C_D = (2/3)^{3/2} \approx 0.54$  le coefficient de débit en l'absence de perte de charge (dans le cas réel,  $C_D$  prend des valeurs plus petites).

# Réponse au quiz de relaxation



**Question 1.** La forme de la courbe de remous dépend du nombre de Froude : elle présente un minimum quand  $Fr < 1$  et un maximum quand  $Fr > 1$ .

**Question 2.** Il se forme un jet, puis un ressaut hydraulique, qui favorise la dissipation d'énergie.