

Série d'exercices n°4 (avec solution)-Equations différentielles

Exercice n°1 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

- 1) $y' - y = (x + 1)e^x$, pour $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $y' - \tan x \ y = \sin x$, pour $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.
- 3) $(1 + e^x)y' = ye^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- 4) $2x^2y' = x^2 + y^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution :

- 1) Les solutions de l'équation homogène associée :

$$y' - y = 0$$

sont les :

$$y(x) = \lambda e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est la fonction :

$$g(x) = (x + 1)e^x.$$

Comme e^x apparaît dans les solutions de l'équation homogène on cherche donc une solution particulière de la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x.$$

On a :

$$y'_p(x) - y_p(x) = (x + 1)e^x \Rightarrow (2ax + b)e^x = (x + 1)e^x.$$

Par identification des coefficients, on trouve que :

$$y_p(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x.$$

Les solutions de notre équation initiale sont :

$$y = y_H + y_p = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 2) L'équation homogène associée est :

$$y' - \tan x \ y = 0.$$

Une primitive de :

$$f(x) = -\tan x = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

est : $F(x) = \ln |\cos x| = \ln(\cos x)$ car $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Donc la solution générale de l'équation homogène est :

$$y(x) = C \exp(-F(x)) = C \exp(-\ln(\cos x)) = \frac{C}{\cos x}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière y_p qui vérifie :

$$y'_p(x) - \tan x \ y_p(x) = \sin x.$$

Cette solution s'écrit sous la forme :

$$y_p(x) = G(x) \exp(-F(x)) \text{ avec } G(x) \text{ primitive de } \sin x \exp(F(x)) = \cos x \sin x.$$

Par la suite on trouve que :

$$G(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x \text{ et } y_p(x) = G(x) \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{2 \cos x}.$$

La solution générale de notre équation est :

$$y(x) = \frac{C}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{2 \cos x} = \frac{\sin^2 x + C'}{2 \cos x}.$$

3) La fonction nulle ($y = 0$) est une solution de $(1 + e^x)y' = ye^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $y \neq 0$, alors l'équation précédente et équivalente à une équation à variables séparables :

$$\frac{y'}{y} = \frac{e^x}{1+e^x},$$

d'où :

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx.$$

Donc : $\ln |y| = \ln(1 + e^x) + K \Rightarrow y = C(1 + e^x), \quad C \in \mathbb{R}^*.$

La solution générale est donc :

$$y = C(1 + e^x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

4) Pour $x \neq 0$, l'équation

$$2x^2 y' = x^2 + y^2 \quad (E)$$

est équivalente à :

$$2y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Une équation de type homogène. Posons $z = \frac{y}{x}$ alors :

$$y = zx \Rightarrow y' = 2(z + xz').$$

remplaçant dans (E), on trouve :

$$1 + z^2 = 2(z + xz')$$

$$1 + z^2 - 2z = 2xz' \Rightarrow (1 - z)^2 = 2xz'$$

Don on obtient:

$$\frac{2z'}{(1-z)^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{2}{(1-z)^2} dz = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{2}{(1-z)} = \ln Cx,$$

Par la suite on trouve que :

$$z = 1 - \frac{2}{\ln Cx} \Rightarrow y = x - \frac{2x}{\ln Cx}, \quad \text{avec } Cx \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Exercice n°2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y''(x) - y(x) = 0.$

2) $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0.$

3) $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0.$

Solution :

1) L'équation caractéristique de $y''(x) - y(x) = 0$ est :

$$r^2 - 1 = 0, \quad \Delta = 4 > 0, \quad r_1 = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = +1.$$

Donc on a deux racines réelles distinctes . Par conséquent la solution générale est donnée par :

$$y(x) = \lambda \exp(-x) + \mu \exp(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2) L'équation caractéristique de $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$ est :

$$r^2 + 6r + 9 = 0, \quad \Delta = 0, \quad r_0 = -3.$$

Donc on a une racine réelle double. Par conséquent la solution générale est sous la forme :

$$y(x) = (\lambda + x\mu) \exp(-3x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3) L'équation caractéristique de $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$ est donnée par :

$$r^2 + 4r + 13 = 0, \quad \Delta = -36 < 0, \quad r_1 = -2 + 3i \quad \text{et} \quad r_2 = -2 - 3i.$$

Donc on a deux racines complexes conjuguées. La solution générale dans ce cas est :

$$y(x) = (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x) \exp(-2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°3 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + y(x) = \cos x \quad (E).$$

Solution :

L'équation donnée est une équation de deuxième ordre non-homogène. Son équation associée est :

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique de cette dernière est :

$$r^2 - 1 = 0, \quad \Delta = -4 < 0, \quad r_1 = i \quad \text{et} \quad r_2 = -i.$$

Donc on a deux racines complexes conjuguées. La solution générale dans ce cas est :

$$y_H(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est : $g(x) = \cos x$. Utilisons la méthode de la variations des constantes et cherchons une solution particulière de la forme :

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad \text{avec} \quad y_1 = \cos x \quad \text{et} \quad y_2 = \sin x$$

qui vérifie :

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = g(x). \quad (S)$$

Remplaçant par :

$$y_p(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

Dans (S) et résolvant le système on trouve :

$$C_1(x) = \frac{\cos 2x}{4} \quad \text{et} \quad C_2(x) = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}.$$

Une solution particulière est donc :

$$y_p(x) = \frac{\cos 2x}{4} \cos x + \left(\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}\right) \sin x = \frac{\cos x}{4} + \frac{x}{2} \sin x.$$

Alors la solution générale est donnée par :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \lambda \cos x + \left(\mu + \frac{x}{2}\right) \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°4 :

En utilisant le changement de variable $x = e^t$ résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\quad (1).$$

Solution :

Comme on cherche une fonction de $x \in]0, +\infty[$, et que l'application est bijective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on peut prendre comme changement de variable : $x = e^t$ et $Z(t) = y(e^t)$. Donc on a :

$$t = \ln x, \quad y(x) = z(\ln x), \quad y'(x) = \frac{1}{x} Z'(\ln x) = e^{-t} Z'(t)$$

$$\text{et} \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} Z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} Z''(\ln x) = -e^{-2t} Z'(t) + e^{-2t} Z''(t).$$

En remplaçant dans (1) on trouve que :

$$x^2 y'' + x y' + y = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\Leftrightarrow Z''(t) + Z'(t) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Cette dernière possède la solution générale suivante :

$$Z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On conclut que la solution de notre problème est :

$$y(x) = Z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x), \quad x \in]0, +\infty[, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$